ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

ANNALES
DE
L'INSTITUT FOURIER

PUBLIÉES AVEC LE CONCOURS
DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

TOME X

Année 1960

RÉDACTEURS

M. BRELOT, C. CHABAUTY et L. NÉEL

CHARTRES
IMPRIMERIE DURAND
9, RUE FULBERT, 9

1960

SOMMAIRE

(La reproduction des résumés ci-après, rédigés par les auteurs eux-mêmes est autorisée.)

Dans ce travail on étudie les théorèmes ergodiques dans un cadre généralisant le cadre des études de Wiener, Riesz, ... Le chapitre I est consacré à l'établissement des théorèmes de dérivation globale pour les intégrales et mesures de Radon. Le chapitre II étudie en particulier les relations entre les modes de convergence dans l'espace des phases et dans l'espace des indices. Le chapitre III traite des applications à la théorie ergodique; on y étudie non seulement les moyennes ergodiques de fonctions de points mais aussi des moyennes de fonctions d'ensembles, essayant de combler en partie une lacune signalée par M. Pauc : l'absence de point de vue dual en théorie ergodique.

On donne un critère permettant de décider si une application différentiable « excellente » f d'une surface dans le plan R^2 peut être factorisée par une immersion dans R^3. Sous certaines conditions, on donne une borne inférieure pour le nombre de cusps de f.

Ce travail apporte, par utilisation systématique de la méthode de résolution des problèmes aux limites de M. Lions, une contribution à l'étude de deux problèmes de perturbation singulière, qui entrent dans un nombre important de problèmes de physique mathématique et de mécanique.

Problème 1 (Chapitre I) : Soit B_ε une famille d'opérateurs elliptiques dépendants du paramètre réel positif ε, et se réduisant, pour $\varepsilon = 0$, à un opérateur elliptique B, d'ordre inférieur à celui des B_ε. On montre que, sous des hypothèses convenables, lorsque $\varepsilon \to 0$, la solution u_ε d'un problème aux limites sur un ouvert Ω de R^n, relatif à $B_\varepsilon u_\varepsilon = f$, converge vers la solution u d'un problème aux limites sur Ω, relatif à $Bu = f$, où f est donnée. Exemples

Green est identique, à un facteur constant près, à la fonction de Green au sens classique.

Comme conséquence immédiate de la définition du type, on déduit l'invariance du type vis-à-vis des applications quasi-conformes.

Soit X un espace mesurable de mesure μ finie ; $\varphi : X \to X$ une application vérifiant $\mu(\varphi^{-1}(S)) = \mu(S)$ pour chaque ensemble mesurable $S \subseteq X$. On donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que X soit un ensemble ergodique.

Dans cet article, l'auteur résoud un problème qui s'est posé en théorie de l'hypoellipticité : existe-t-il des noyaux ayant les propriétés énoncées dans le titre? La réponse est affirmative : on construit une telle distribution et on vérifie successivement les trois points. On peut se représenter cette distribution, en langage imagé, comme une fonction définie dans R^2 dont la surface représentative serait constituée par une suite de petites cloches indéfiniment différentiables, à supports s'approchant d'un point de la diagonale, et telles que vues suivant l'axe des y elles paraissent s'amincir à l'extrême, tandis qu'elles ne s'amincissent pas trop vite si on les voit suivant l'axe des x.

Cet article précise et généralise les notions introduites dans une publication antérieure [1] et servant à établir une théorie des structures locales. La donnée sur une classe d'une loi de composition partout définie et d'une sous-classe d'idempotents vérifiant certains axiomes détermine une structure de groupoïde inductif ou de pseudo-groupe; les différents types de sous-pseudogroupes sont examinés. Une étude analogue est faite dans le cas des catégories inductives. Une catégorie inductive $\mathfrak{C}$ au-dessus d'une catégorie inductive $\mathfrak{C}'$ est étalée au-dessus de la catégorie $\mathfrak{T}(\mathfrak{C}')$ dont les objets sont les paratopologies sur les unités de $\mathfrak{C}'$. On définit la catégorie inductive des jets locaux de $\mathfrak{C}$ au-dessus de $\mathfrak{C}'$; elle est étalée au-dessus de la catégorie des jets locaux de $\mathfrak{T}(\mathfrak{C}')$ au-dessus de $\mathfrak{C}'$. La catégorie de jets locaux est étudiée d'une façon plus précise dans le cas d'une catégorie inductive au-dessus de la catégorie des applications d'un ensemble quelconque dans un ensemble quelconque.

En utilisant une idée de E. Bishop et K. de Leeuw on donne d'abord une démonstration très simplifiée du théorème de représentation intégrale dans les convexes compacts métrisables. Puis on revient sur quelques points du travail de E. Bishop et K. de Leeuw pour en préciser la portée. Enfin on pose quelques problèmes.

Le chapitre I donne des définitions élémentaires de la théorie. Il contient une démonstration simple du théorème d'extension des homotopies et du fait que si X est un complexe de Kan, la relation homotopie entre applications Y → X est une relation d'équivalence. On termine ce chapitre en montrant que, comme dans le cas topologique, on peut définir les groupes d'homotopie en utilisant des applications définies sur des « sphères ». Cette définition est utile pour étudier le cocycle obstruction (chapitre IV).

Le chapitre II est un préliminaire aux chapitres III et IV.

Le chapitre III est réservé à la démonstration de l'existence des suites spectrales d'homologie et de cohomologie des fibrés au sens de Kan. La méthode suivie est celle donnée par V. K. A. M. Gugenheim et J. H. C. Moore.

Dans le chapitre IV, on montre que la théorie classique de l'obstruction à la construction d'une section d'un fibré (de Serre, dont la base est un C. W. complexe) est valable sans restriction pour les fibrés au sens de Kan.

La définition du cocycle obstruction ne présente aucune difficulté compte tenu du chapitre I. La définition de la cochaîne différence s'est avérée au contraire relativement plus difficile.

Une méthode, basée sur une représentation des tenseurs sphériques à l'aide de polynômes est développée pour être appliquée au calcul des niveaux d'énergie d'atomes ou ions perturbés par un potentiel cristallin. Plus spécialement on a étudié l'effet du terme cubique du 6e ordre dans les terres rares.

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
10 (1960), 1-45.

SUR LA THÉORIE ERGODIQUE

par **Jean BOCLÉ** (Rennes)

INTRODUCTION

Point de vue sur la théorie ergodique et son cadre.

En Mécanique classique, on représente un système matériel Σ dépendant de n paramètres q_i, $i = 1, \ldots, n$, par un point x dans un espace à $2n$ dimensions, les coordonnées de ce point étant : $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ où $p_i = \frac{dq_i}{dt}$. Ces $2n$ paramètres caractérisent le système en mouvement à l'instant t; le point x représente la phase de Σ; on confond d'ailleurs point x et phase du système et l'ensemble des points x correspondant à Σ constitue l'*espace des phases* P. L'évolution du système au cours du temps est représentée par une trajectoire dans l'espace des phases.

Se donner les conditions initiales pour Σ revient à choisir un point x_0 dans P; la phase x de Σ à l'intant t est alors le transformé de x_0 par une certaine transformation T_t et nous écrivons : $x = T_t x_0$. D'une façon générale, T_t est une transformation biunivoque de P en lui-même telle que si y est la phase de Σ à l'instant t', sa phase à l'instant $t' + t$ est $T_t y$. Les transformations T_t forment un groupe (si on considère $-\infty < t < +\infty$) :

$$T_0 x = x, \qquad T_t(T_{t'} x) = T_{t+t'} x;$$

elles dépendent de l'indice t, le temps : l'*espace des indices* est ici l'espace du temps.

D'autre part, si on envisage, comme on est amené à le faire en Mécanique statistique, un ensemble d'états possibles pour Σ à un instant t, donc une partie de l'espace des phases P, il est intéressant de faire intervenir un résultat de Liouville

([1], II-8, p. 32) (1) qui affirme que les transformations T_t conservent le volume dans P moyennant un choix convenable des paramètres du système.

D'un point de vue abstrait, nous sommes donc conduits à considérer un groupe de transformations biunivoques d'un espace P en lui-même et tel que, P étant muni d'une mesure convenable, les transformations du groupe conservent la mesure.

Nous plaçant maintenant à ce point de vue de la mesure abstraite, nous devons introduire l'hypothèse ergodique sous la forme suivante: (hypothèse de transitivité métrique): dans l'espace des phases, les seuls ensembles mesurables invariants par les transformations T_t (à un ensemble de mesure nulle près) sont l'espace P lui-même et l'ensemble vide. Dans ce cas, si nous supposons la mesure de P, $\nu(P)$, finie et si f est une fonction dépendant de la phase de Σ, donc de x, le théorème de Birkhoff nous dit que, pour presque tout x dans P, $\frac{1}{\theta}\int_0^\theta f(T_t x)\,dt$ tend vers une limite égale à $\frac{1}{\nu(P)}\int_P f(x)\,d\nu$ lorsque θ tend vers l'infini; en abrégé, les moyennes temporelles ont une limite égale à la moyenne spatiale pour presque tout x. Remarquons que cette limite est indépendante de x, c'est une constante; elle est *invariante* par les transformations T_t. En fait cette dernière remarque est fondamentale, car le théorème de Birkhoff est valable même si l'on ne fait plus l'hypothèse de transitivité métrique et si la limite n'est plus nécessairement une constante, elle garde néanmoins la propriété d'invariance. En effet ce théorème s'énonce de la façon suivante: si P est de mesure finie, si f, fonction définie sur P, est intégrable, alors la limite des moyennes ergodiques $\frac{1}{\theta}\int_0^\theta f(T_t x)\,dt$ existe presque partout sur P et cette limite est intégrable et invariante par les T_t. Un calcul élémentaire de changement de variables montre que cette invariance provient de l'invariance par translation dans le temps de la mesure des durées: mesure de $(0, \theta)$ = mesure de $(t, t+\theta)$ quel que soit t. De là vient l'idée de considérer un groupe de transformations T_t, dépendant d'un indice t, élément d'un espace I, l'espace des indices, qui est un groupe, pas nécessairement

(1) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de l'article.

abélien et dans lequel on introduit une mesure invariante par translation, à gauche par exemple. (Ceci implique évidemment que le σ-anneau support de la mesure est lui aussi invariant par translation à gauche.) Comme d'autre part, il est utile d'avoir une topologie dans I, nous sommes conduits à prendre pour espace des indices un groupe topologique localement compact muni de sa mesure de Haar.

Nous savons que du point de vue métrique, un tel groupe, dans lequel on considère comme ensembles mesurables seulement les ensembles de Baire et la restriction de la mesure de Haar à ces ensembles, est un groupe mesurable ([1], § 59). Cette remarque n'est pas sans utilité, car, de même que dans la définition d'un groupe mesurable on introduit une propriété de conservation de la mesurabilité dans le carré de l'espace par une certaine transformation [2], de même on devra compléter l'hypothèse de la conservation de la mesure dans P par les transformations T_t par une hypothèse de conservation de la mesurabilité dans l'espace produit $I \times P$ par la transformation T^* qui à (t, x) associe $(t, T_t^{-1}x)$ [3].

Origine et résumé de ce travail.

Le premier, à ma connaissance, à avoir généralisé l'espace des indices est Wiener, qui, dans [20], prend pour I un espace euclidien à n dimensions; les moyennes ergodiques sont alors prises sur les boules fermées centrées à l'origine. Mais dans son mémoire Wiener non seulement reprend les théorèmes ergodiques classiques: théorèmes de von Neumann et de Birkhoff, mais encore considère ce que deviennent les moyennes ergodiques lorsque la boule euclidienne au lieu de s'étendre à l'infini se contracte sur l'origine (dérivation dans le cadre ergodique). A ce propos Wiener remarque une ressemblance entre les énoncés du théorème de Birkoff et du théorème de dérivation dans le cadre ergodique qui peuvent être coiffés tous deux par celui du théorème ergodique maximal. En outre Wiener montre une analogie entre la démonstration du théorème ergodique de Birkhoff à partir du théorème de von Neumann et celle du théorème de dérivation (ordinaire) dans

[2] Voir plus loin ch. I, § 2, transformation S^*.

[3] A propos de cette analogie qu'il est intéressant de poursuivre, voir [19], Appendice 1, p. 140 et [11], § 3, p. 9. Voir également dans cet article ch. II, § 1.

l'espace euclidien. Riesz [17] insiste davantage sur cette analogie entre les démonstrations ainsi que Cotlar qui, dans [7], signalant que l'étude n'a pas été faite dans le cas d'un groupe topologique, mentionne le problème suivant : « faire une étude systématique de l'analogie entre les théorèmes ergodiques et le théorème de dérivation de Lebesgue-Perron-Denjoy ». Ce fut là l'origine de ce travail; M. Pauc me proposa en effet d'élucider le rôle des hypothèses vitaliennes en théorie ergodique comme lui-même et Krickeberg l'avaient fait en théorie de la différentiation des fonctions d'ensembles et en théorie des martingales.

Je n'ai pas atteint le but proposé, car, dès le début, j'ai suivi une orientation qui m'en éloignait. En effet, en approfondissant la démonstration du théorème ergodique maximal, puis celle du théorème de dérivation dans le cadre ergodique de Wiener, il m'a semblé qu'il y avait intérêt d'une part à étudier systématiquement l'espace produit $I \times P$, la correspondance qui, à toute fonction f définie sur P, associe dans $I \times P$ la fonction définie par $f(t, x) = f(T_t x)$ et la transformation T^* définie plus haut et d'autre part, à essayer d'établir des relations entre convergences dans l'espace des phases et dans l'espace des indices pour chacun des types : convergence presque partout, convergence en moyenne et convergence en mesure. (Ceci m'a d'ailleurs permis de constater la souplesse que présente dans son maniement la convergence en mesure ou convergence stochastique, comme l'avait déjà fait Krickeberg). Les résultats que j'ai obtenus dans cette voie ont été publiés dans [2]; leur développement fait l'objet du chapitre II.

Le théorème de la densité de Halmos ([8], Ex. 5, § 61, p. 268) me fournissait immédiatement une application aux moyennes ergodiques de fonctions caractéristiques, moyennant une légère extension dans le cas où l'ensemble (E) n'est pas borné; puis utilisant le résultat obtenu dans l'espace des phases, il était facile de l'étendre aux moyennes de fonctions de classe L. Mais une autre voie, dans la ligne des travaux de Pauc en théorie de la différentiation, consistait à généraliser le théorème de la densité et à rechercher des théorèmes de dérivation globale dans I, non seulement dans le cas d'intégrales, mais aussi dans le cas d'une mesure de Radon quelconque,

puis à transposer dans l'espace des phases le résultat relatif aux intégrales qui seul intervient pour les moyennes ergodiques. C'est le mode d'exposition choisi ici : le chapitre I est consacré à l'établissement de ces théorèmes de dérivation globale pour les intégrales et les mesures de Radon. Notons que ces résultats, qui ont été publiés dans [4], sont nouveaux même dans le cas de la droite numérique. Pauc ([14], [15] [16]) et Krickeberg [13] ont obtenu des théorèmes analogues, mais dans des conditions différentes.

L'application à la théorie ergodique n'est donnée que dans le chapitre III après l'introduction des moyennes ergodiques. J'étudie d'ailleurs non seulement les moyennes ergodiques de fonctions de point mais aussi les moyennes de fonctions d'ensembles, essayant de combler, en partie tout au moins, une lacune signalée par M. Pauc : l'absence du point de vue dual en théorie ergodique. Ceci m'a conduit naturellement à envisager systématiquement les moyennes de fonctions caractéristiques qui procèdent des deux points de vue et à aborder d'une manière différente de Calderon [6], Tsurumi [18], ou Halmos [10] le problème de la mesure invariante. En particulier, à propos de la question d'invariance, je suis amené à introduire une notion de groupe ergodique plus générale que celle de Calderon [5]. Les résultats principaux de ce chapitre III ont été publiés dans [3].

La bibliographie placée en fin d'article ne concerne que les ouvrages cités dans ce mémoire. On trouvera dans [9], [11] et [12] en particulier une bibliographie assez complète sur la théorie ergodique.

En terminant cette introduction, je tiens à exprimer à M. Pauc, dont je n'ai pas mentionné le nom aussi souvent qu'il l'aurait fallu, toute mon affectueuse reconnaissance pour les conseils et les encouragements qu'il n'a cessé de me prodiguer pendant l'élaboration de cette thèse.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I

GROUPES TOPOLOGIQUES LOCALEMENT COMPACTS

Il s'agit essentiellement de groupes topologiques localement compacts au sens de Bourbaki, donc séparés.

Dans le § 1, nous fixons les notations et nous énonçons les définitions et propriétés qui serviront dans la suite, en particulier lorsque nous utiliserons un groupe topologique localement compact comme espace des indices en théorie ergodique. Dans le § 2, nous adaptons au cas général une transformation utilisée par Halmos seulement dans le cas d'un groupe mesurable; cela nous permet de démontrer deux propositions qui trouvent leur application dans le § 3, où nous étudions le problème de la dérivation dans un groupe topologique localement compact.

1. — Généralités.

La plupart des notations, définitions et propriétés que nous introduisons ici sont empruntées à Halmos ([8], chapitres x et xi principalement).

I, groupe topologique localement compact; e, élément unité de I; r, s, t, éléments quelconques de I.

Si A est une partie de I, on note :

$$sA = \{r : r = st,\ t \in A\} \qquad As = \{r : r = ts,\ t \in A\}$$

sA, resp. As, translaté à gauche, resp. à droite, de A par s. Si A et B sont deux parties de I,

$$AB = \bigcup_{t \in A} tB = \bigcup_{s \in B} As.$$

$\mathcal{C}$, classe des ensembles compacts de I; $\mathcal{B}$, σ-anneau booléen engendré par $\mathcal{C}$. Les éléments de $\mathcal{B}$ sont les ensembles boréliens

de I. Tout ensemble borélien est σ-borné. Tout ensemble ouvert σ-borné est borélien.

$\mathcal{U}$, famille des ensembles boréliens ouverts.

$\mathcal{C}_0$, classe des ensembles compacts de I qui sont des G_δ; $\mathcal{B}_0$, σ-anneau engendré par $\mathcal{C}_0$. Les éléments de $\mathcal{B}_0$ sont les ensembles de Baire de I.

$\mathcal{U}_0$, famille des ensembles de Baire ouverts.

$I^\times$, espace produit $I \times I$; $\mathcal{B}_0^\times$, σ-anneau engendré par la famille des ensembles $A_0 \times B_0$, A_0 et B_0 appartenant à $\mathcal{B}_0$; $\mathcal{B}_0^\times$ coïncide avec la famille des ensembles de Baire de $I^\times$ considéré comme groupe topologique localement compact.

$\mathcal{B}^\times$, σ-anneau engendré par la famille des ensembles $A \times B$, A et B appartenant à $\mathcal{B}$.

Mesures: Mesure de Borel: mesure définie sur $\mathcal{B}$ et finie pour tout ensemble compact. Toute mesure borélienne est σ-finie.

Mesure de Baire: mesure définie sur $\mathcal{B}_0$ et finie pour tout élément de $\mathcal{C}_0$. Toute mesure de Baire ρ_0 est régulière, c'est-à-dire que:

$$\forall A_0 \in \mathcal{B}_0, \qquad \begin{cases} \rho_0(A_0) = \inf . \rho_0(U_0 : A_0 \subset U_0, \; U_0 \in \mathcal{U}_0), \\ \rho_0(A_0) = \sup . \rho_0(C_0 : A_0 \supset C_0, \; C_0 \in \mathcal{C}_0). \end{cases}$$

Une mesure borélienne est régulière si, ρ désignant une telle mesure,

$$\forall A \in \mathcal{B}, \; \rho(A) = \inf . \rho(U : A \subset U, U \in \mathcal{U}) = \sup . \rho(C : A \supset C, C \in \mathcal{C}).$$

Elle est complètement régulière (en abrégé c. r.) si:

$$\rho(A) = \inf . \rho(U_0 : A \subset U_0, \; U_0 \in \mathcal{U}_0) = \sup . \rho(C_0 : A \supset C_0, \; C_0 \in \mathcal{C}_0).$$

Une mesure de Radon est une mesure de Borel régulière.

Une mesure de Haar λ est une mesure de Radon c. r., positive pour tout ensemble non vide de $\mathcal{U}$ et invariante par translation à gauche:

$$\forall \; A \in \mathcal{B} \quad \text{et} \quad r \in I, \qquad rA \in \mathcal{B} \quad \text{et} \quad \lambda(rA) = \lambda(A).$$

Une telle mesure n'est définie qu'a un facteur constant près et par conséquent le rapport des mesures de Haar de deux ensembles boréliens est déterminé de façon unique. Or dans la suite il n'interviendra que de tels rapports. Aussi

parlerons-nous de « la » mesure de Haar définie sur $\mathscr{B}$ et qui sera toujours désignée par λ.

Quel que soit l'ensemble borélien A et l'élément r de I,

$$Ar \in \mathscr{B} \qquad \text{et} \qquad \lambda(Ar) = \lambda(A).k(r)$$

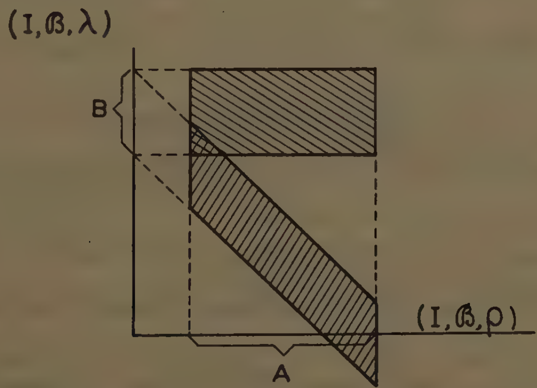
$k(r)$, qui ne dépend pas de A, est la fonction modulaire. Elle est positive et finie, et continue sur I. On a :

$$k(e) = 1 \qquad \text{et} \qquad k(rs) = k(r).k(s), \qquad \forall\, r \quad \text{et} \quad s \in \mathrm{I}.$$

Si $k(r) = 1$ quel que soit r, on dit que le groupe est unimodulaire.

2. — Utilisation dans le cas d'un groupe topologique localement compact d'une transformation intervenant dans la définition d'un groupe mesurable (4).

Transformation S^* : S^* est la transformation de $I^\times$ sur $I^\times$ qui, à (r, s) fait correspondre $(r, r^{-1}s)$. Elle est biunivoque et bicontinue. Elle transforme tout ensemble de $\mathscr{B}_0^\times$ en un ensemble de $\mathscr{B}_0^\times$.



Utilisant les notations de [8] pour les sections d'un ensemble dans un espace produit (5), si A et B sont deux parties de I, on a :

$$[S^*(A \times B)]_r = r^{-1}B \text{ si } r \in A \qquad \text{et} \qquad \emptyset \text{ si } r \notin A,$$

(4) Dans [8], § 59, p. 257, la transformation S utilisée est l'inverse de notre transformation S^*.

(5) Si E est un ensemble dans l'espace produit $X \times Y$ des deux espaces X et Y, $E_x = \{y : (x, y) \in E\}$ et $E^y = \{x : (x, y) \in E\}$.

$$\text{et}\quad [S^*(A \times B)]^s = \{r : r^{-1}t = s,\ r \in A,\ t \in B\}$$
$$= \{r : r = ts^{-1},\ r \in A,\ t \in B\} = A \cap Bs^{-1}$$

Soit $(I^\times, \mathcal{B}^\times, \rho^\times)$ l'espace mesuré produit des deux espaces mesurés $(I, \mathcal{B}, \rho)$ où ρ est une mesure de Radon c. r. quelconque et $(I, \mathcal{B}, \lambda)$. [Cf. note ([14])]. Si A_0 et B_0 sont deux ensembles de Baire, on obtient par application du théorème de Fubini au calcul de la mesure de $S^*(A_0 \times B_0)$:

$$\rho^\times[S^*(A_0 \times B_0)] = \int_{A_0} \lambda(r^{-1}B_0)d\rho(r) = \int_{A_0} \lambda(B_0)d\rho(r) = \rho(A_0).\lambda(B_0).$$

Donc dans $(I^\times, \mathcal{B}^\times, \rho^\times)$, S^* transforme un « rectangle » de Baire en un ensemble de Baire de même mesure.

Soient maintenant A et B deux ensembles boréliens bornés. $A \times B$ est un « rectangle » de $\mathcal{B}^\times$. Puisque les mesures ρ et λ sont complètement régulières, on a :

$$\rho(A) = \sup.\ \rho(C_0 : C_0 \subset A,\ C_0 \in \mathcal{C}_0) = \inf.\ \rho(U_0 : U_0 \supset A,\ U_0 \in \mathcal{U}_0)$$
$$\lambda(B) = \sup.\ \lambda(K_0 : K_0 \subset B,\ K_0 \in \mathcal{C}_0) = \inf.\ \lambda(V_0 : V_0 \supset B,\ V_0 \in \mathcal{U}_0)$$

Mais :

$$C_0 \subset A \subset U_0 \quad \text{et} \quad K_0 \subset B \subset V_0 \implies C_0 \times K_0 \subset A \times B \subset U_0 \times V_0$$

$$\text{donc :}\quad S^*(C_0 \times K_0) \subset S^*(A \times B) \subset S^*(U_0 \times V_0)$$

Or :

$$\sup.\ \rho^\times(C_0 \times K_0 : C_0 \subset A,\ K_0 \subset B)$$
$$= \sup.\ \rho(C_0 : C_0 \subset A).\sup.\ \lambda\ (K_0 : K_0 \subset B) = \rho(A).\lambda(B)$$

$$\inf.\ \rho^\times(U_0 \times V_0 : U_0 \supset A,\ V_0 \supset B)$$
$$= \inf.\ \rho\ (U_0 : U_0 \supset A).\inf.\ \lambda\ (V_0 : V_0 \supset B) = \rho(A).\lambda(B).$$

et puisque S^* conserve la mesure $\rho^\times$ pour les « rectangles » de Baire :

$$\sup.\ \rho^\times[S^*(C_0 \times K_0)] = \inf.\ \rho^\times\,[S^*(U_0 \times V_0)] = \rho(A).\lambda(B).$$

$S^*(A \times B)$ a donc des mesures intérieure et extérieure égales, et comme il appartient au σ-anneau héréditaire engendré par $\mathcal{B}^\times$, il est mesurable relativement à la complétion ([6]) $\bar{\rho}^\times$

([6]) La complétion $\bar{\mu}$ d'une mesure μ définie sur un espace de mesure $(X, \mathcal{S})$ est l'extension de la mesure μ à la classe de tous les ensembles $E \cup N$ où $E \in \mathcal{S}$ et N est un sous-ensemble d'un ensemble de mesure nulle, extension définie par :

$$\bar{\mu}(E \cup N) = \mu(E).$$

(Cf. [8], § 13.)

de la mesure $\rho^{\times}$ (cf. [8], § 14, th. F, p. 60) et sa mesure est $\rho(A).\lambda(B)$.

D'autre part le théorème de Fubini reste valable si on remplace $\rho^{\times}$ par sa complétion $\overline{\rho}^{\times}$.

Comme conséquences de ces remarques, nous obtenons les deux propositions suivantes :

Proposition 1 : *Quels que soient les ensembles boréliens bornés* A et B *tel que* $\lambda(B) > 0$, *quelle que soit la mesure de Radon complètement régulière* ρ, *si* $\bar{\lambda}$ *désigne la complétion de* λ, *on a* :

$$\rho(A) = \int \frac{\rho(A \cap Bt)}{\lambda(Bt)}\, d\bar{\lambda}(t) \text{ (}^7\text{)}$$

En effet, l'application du théorème de Fubini au calcul de la mesure de $S^*(A \times B)$ donne :

$$\rho(A).\lambda(B) = \int \rho(A \cap Bs^{-1})d\bar{\lambda}(s)$$

d'où, puisque $\lambda(B) > 0$:

$$\rho(A) = \int \frac{\rho(A \cap Bs^{-1})}{\lambda(B)}\, d\bar{\lambda}(s).$$

Posant $s = t^{-1}$, on obtient $d\bar{\lambda}(s) = \dfrac{d\bar{\lambda}(t)}{k(t)}$ et

$$\rho(A) = \int \frac{\rho(A \cap Bs^{-1})}{\lambda(B)}\, d\bar{\lambda}(s)$$

$$= \int \frac{\rho(A \cap Bt)}{\lambda(B)} \frac{d\bar{\lambda}(t)}{k(t)} = \int \frac{\rho(A \cap Bt)}{\lambda(Bt)}\, d\bar{\lambda}(t).$$

Proposition 2. — *Si* U *est un borélien ouvert et borné,* B *un borélien borné, si* f *est une fonction définie dans* I, *localement* $\mathcal{B}$*-mesurable et si* g *est la fonction définie dans* $I^{\times}$ *par* $g(r, s) = f(rs) - f(s)$, *alors la restriction de* g *au « rectangle »* $U \times B$ *est mesurable relativement à la complétion* $\bar{\lambda}^{\times}$ *de la mesure produit* $\lambda^{\times} = \lambda \times \lambda$.

c étant un nombre réel, posons : $A = \{s : f(s) \geq c\}$.

(7) Si dans l'expression d'une intégrale aucune mention n'est faite de l'ensemble sur lequel elle est prise, c'est que l'intégrale est étendue au support de la fonction ou à l'espace tout entier si celui-ci est mesurable.

A est localement borélien.

$$\{(r,s) : s \in A\} \cap (U \times B) = (I \times A) \cap (U \times B) = U \times (A \cap B) \in \mathcal{B}^{\times}$$

donc g_1 telle que $g_1(r, s) = f(s)$ est localement $\mathcal{B}^{\times}$ mesurable.

$$\begin{aligned}\{(r, s) : rs \in A\} \cap (U \times B) &= [S^*(I \times A)] \cap (U \times B) \\ &= [S^*[U \times (A \cap UB)]] \cap (U \times B).\end{aligned}$$

Or UB est ouvert et borné, donc borélien, par suite $A \cap UB$ est borélien borné et par conséquent $S^*[U \times (A \cap UB)]$ est mesurable relativement à $\overline{\lambda}^{\times}$. Il en résulte que la restriction de g_2 telle que $g_2(r, s) = f(rs)$ à $U \times B$ est $\overline{\lambda}^{\times}$-mesurable. Puisque g_1 l'est aussi, il en est de même de $g = g_1 - g_2$ [8].

3. — Théorèmes de dérivation globale dans les groupes topologiques localement compacts.

ρ étant une mesure de Radon, B un ensemble borélien borné de mesure positive, nous allons étudier le comportement de la fonction ρ'_B définie par $\rho'_B(t) = \dfrac{\rho(Bt)}{\lambda(Bt)}$ lorsque B tend vers e du point de vue de la convergence en moyenne ou de la convergence en mesure sur un ensemble borélien borné.

Nous décomposerons cette étude en plusieurs cas en nous appuyant sur les remarques suivantes :

a) Si ρ est une mesure de Radon de signe quelconque sur $(I, \mathcal{B})$ elle est différence de deux mesures positives (décomposition de Jordan) :

$$\rho = \rho^+ - \rho^-.$$

b) Si ρ est une mesure de Radon positive, elle peut s'écrire et cela d'une manière unique, sous la forme :

$$\rho = \varphi + \psi$$

où φ est une mesure de Radon positive absolument continue par rapport à λ et ψ une mesure de Radon positive étrangère à λ.

Il nous suffit donc de considérer deux cas : d'une part celui d'une mesure de Radon positive absolument continue par rapport à λ, d'autre part celui d'une mesure positive étrangère à λ.

(8) Remarquons que si I est métrisable, on peut remplacer U par un borélien borné A quelconque; il n'est pas nécessaire de le supposer ouvert.

Cas d'une mesure de Radon positive absolument continue par rapport à λ.

Soit donc φ une fonction d'ensemble définie sur $\mathcal{B}$, à valeurs réelles positives et finies sur les ensembles boréliens bornés, σ-additive et absolument continue par rapport à λ. Cette fonction possède alors un intégrant de Radon-Nikodym f, positif et localement $\mathcal{B}$-mesurable, défini seulement à un ensemble localement borélien et négligeable près.

THÉORÈME I. — *Lorsque* U, *ensemble borélien ouvert et borné tend vers e, la fonction* φ'_U *définie par* $\varphi'_U(t) = \dfrac{\varphi(Ut)}{\lambda(Ut)}$ *converge en moyenne vers f sur tout ensemble borélien borné* D. (9)

a) Posons $g(s, t) = f(st) - f(t)$.

Quels que soient l'ensemble borélien ouvert et borné U et l'ensemble borélien borné B, d'après la proposition 2 ci-dessus, nous pouvons appliquer le théorème de Fubini à la restriction de g à $U \times B$ relativement à la mesure $\bar{\lambda}^\times$, complétion de $\lambda^\times$. En remarquant qu'une s-section ou une t-section quelconque de g est $\mathcal{B}$-mesurable, nous pouvons écrire :

$$\int_{U\times B} g(s, t)\, d\bar{\lambda}^\times(s, t) = \int_B d\bar{\lambda}(t) \int_U g(s, t)\, d\lambda(s)$$
$$= \int_U d\bar{\lambda}(s) \int_B g(s, t) d\lambda(t).$$

Mais : $$\int_U g(s, t) d\lambda(s) = \int_U f(st) d\lambda(s) - \int_U f(t) d\lambda(s).$$

Posant $st = r$, on obtient :

$$\int_U f(st) d\lambda(s) = \int_{Ut} f(r) . k(t^{-1}) d\lambda(r) = \frac{1}{k(t)} \int_{Ut} f(r) d\lambda(r) = \frac{\varphi(Ut)}{k(t)}.$$

Comme $\int_U f(t)\, d\lambda(s) = f(t) . \lambda(U)$, il vient :

$$\int_{U\times B} g(s, t)\, d\bar{\lambda}^\times(s, t) = \left[\int_B \frac{\varphi(Ut)}{k(t)} - f(t) . \lambda(U)\right] d\bar{\lambda}(t)$$
$$= \lambda(U) \int_B \left[\frac{\varphi(Ut)}{\lambda(Ut)} - f(t)\right] d\bar{\lambda}(t).$$

(9) Modification à l'énoncé de ce théorème dans [4] : l'ensemble qui, dans cet énoncé était désigné par B doit être supposé ouvert, pour une question de mesurabilité (cf. la démonstration de la proposition 2) ; c'est pourquoi il est noté U ici. Si I est métrisable, il n'est pas besoin de considérer un ouvert (cf. note (8))].

Mais la fonction de t définie par $\varphi(\mathrm{U}t)$ est continue; cela résulte en effet de $|\varphi(\mathrm{U}s) - \varphi(\mathrm{U}t)| \leq \varphi(\mathrm{U}s - \mathrm{U}t)$ [10], de l'absolue continuité de φ par rapport à λ et de la continuité de la fonction de r définie par $\lambda(\mathrm{U} - \mathrm{U}r)$ [11]. C'est donc une fonction de Baire [12], donc une fonction localement borélienne, de sorte que l'on peut intégrer au moyen de λ et écrire :

$$\int_{\mathrm{B}} \left[\frac{\varphi(\mathrm{U}t)}{\lambda(\mathrm{U}t)} - f(t)\right] d\lambda(t) = \frac{1}{\lambda(\mathrm{U})} \int_{\mathrm{U}} d\bar{\lambda}(s) \int_{\mathrm{B}} g(s, t)\, d\lambda(t)$$

donc, en utilisant la notation φ'_{U} déjà définie :

$$(1) \qquad \left|\int_{\mathrm{B}} [\varphi'_{\mathrm{U}}(t) - f(t)]\, d\lambda(t)\right| \leq \frac{1}{\lambda(\mathrm{U})} \int_{\mathrm{U}} d\bar{\lambda}(s) \int_{\mathrm{B}} |g(s, t)|\, d\lambda(t).$$

Soit D un ensemble borélien borné quelconque. Désignons par B′ et B″ les sous-ensembles de D sur lesquels on a respectivement :

$$\varphi'_{\mathrm{U}}(t) - f(t) \geq 0 \quad \text{et} \quad \varphi'_{\mathrm{U}}(t) - f(t) < 0$$

B′ et B″ sont des boréliens bornés. On peut donc appliquer l'inégalité (1) en prenant pour B, B′ puis B″, ce qui donne :

$$\left|\int_{\mathrm{B}'} [\varphi'_{\mathrm{U}}(t) - f(t)]\, d\lambda(t)\right| = \int_{\mathrm{B}'} |\varphi'_{\mathrm{U}}(t) - f(t)|\, d\lambda(t) \leq \frac{1}{\lambda(\mathrm{U})} \int_{\mathrm{U}} d\bar{\lambda}(s) \int_{\mathrm{B}'} |g(s, t)|\, d\lambda(t),$$

$$\left|\int_{\mathrm{B}''} [\varphi'_{\mathrm{U}}(t) - f(t)]\, d\lambda(t)\right| = \int_{\mathrm{B}''} |\varphi'_{\mathrm{U}}(t) - f(t)|\, d\lambda(t) \leq \frac{1}{\lambda(\mathrm{U})} \int_{\mathrm{U}} d\bar{\lambda}(s) \int_{\mathrm{B}''} |g(s, t)|\, d\lambda(t)$$

d'où, en ajoutant :

$$(2) \qquad \int_{\mathrm{D}} |\varphi'_{\mathrm{U}}(t) - f(t)|\, d\lambda(t) \leq \frac{1}{\lambda(\mathrm{U})} \int_{\mathrm{U}} d\bar{\lambda}(s) \int_{\mathrm{D}} |g(s, t)|\, d\lambda(t).$$

b) Soient ε un nombre positif et V un voisinage de e ouvert et borné fixés arbitrairement. Alors VD est ouvert et borné,

[10] Le signe — désigne ici la différence symétrique de deux ensembles, notée Δ dans [8]. Rappelons que A — B est l'ensemble des éléments qui appartiennent seulement à l'un des deux ensembles A ou B. Si $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$, on retrouve la différence ordinaire.

[11] [8], th. A, § 61, p. 266.

[12] [8], p. 223.

et de l'absolue continuité de φ par rapport à λ résulte l'existence d'un nombre δ positif tel que :

$$(3) \quad A \in \mathcal{B}, \quad A \subset VD \quad \text{et} \quad \lambda(A) < \delta \implies \varphi(A) < \varepsilon$$

δ dépend de V et de ε.

D'après le théorème de Lusin, il existe un compact C inclus dans D, sur lequel f est continue et tel que :

$$(4) \qquad \lambda(D - C) < \frac{\delta}{2}.$$

La fonction f étant continue sur le compact C est donc uniformément continue sur C et par conséquent il existe un voisinage V′ de e tel que :

$$(5) \quad s \in V' \text{ et } t \in (s^{-1}C \cap C) \implies |f(st) - f(t)| = |g(s, t)| < \frac{\varepsilon}{\lambda(D)}$$

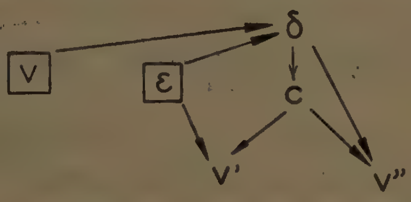
V′ dépend de C et de ε.

C étant fixé, il existe un voisinage V″ de e tel que :

$$(6) \qquad s \in V'' \implies \lambda(s^{-1}C - C) < \frac{\delta}{2}$$

V″ dépend de C et de δ.

La suite des implications qui déterminent V′ et V″ est résumée dans le schéma suivant :



c) Écrivant $D' = D - (s^{-1}C \cap C)$, on a $D = D' \cup (s^{-1}C \cap C)$ puisque C est inclus dans D, $D' \cap (s^{-1}C \cap C) = \emptyset$ et par suite :

$$(7) \quad \int_D |g(s, t)|\, d\lambda(t) = \int_{s^{-1}C\cap C} |g(s, t)|\, d\lambda(t) + \int_{D'} |g(s, t)|\, d\lambda(t).$$

D'après (5) :

$$(8) \quad s \in V' \implies \int_{s^{-1}C\cap C} |g(s, t)|\, d\lambda(t) < \frac{\varepsilon}{\lambda(D)}\, \lambda(s^{-1}C \cap C) < \varepsilon.$$

D'autre part :

$$\int_{D'} |g(s,t)|\,d\lambda(t) = \int_{D'} |f(st) - f(t)|\,d\lambda(t)$$
$$< \int_{D'} f(st)\,d\lambda(t) + \int_{D'} f(t)\,d\lambda(t)$$

puisque f est positive.

Mais :

$$\int_{D'} f(t)\,d\lambda(t) = \varphi(D') \text{ et } \int_{D'} f(st)\,d\lambda(t) = \int_{sD'} f(r)\,d\lambda(r) = \varphi(sD').$$

Comme D' est inclus dans $(D - C) \cup (s^{-1}C - C)$, si s appartient à V'', d'après (4) et (6), $\lambda(D')$ est inférieur à δ, et par conséquent aussi $\lambda(sD')$. Par suite, en tenant compte du fait que D' est inclus dans D et de (3) :

$$s \in V'' \Longrightarrow \varphi(D') < \varepsilon \quad \text{et} \quad s \in V \cap V'' \Longrightarrow \varphi(sD') < \varepsilon$$

donc :

$$(9) \qquad s \in V \cap V'' \Longrightarrow \int_{D'} |g(s, t)|\,d\lambda(t) < 2\varepsilon.$$

Finalement (7), (8) et (9) montrent que :

$$s \in V \cap V' \cap V'' \Longrightarrow \int_{D} |g(s, t)|\,d\lambda(t) < 3\varepsilon$$

d'où

$$U \subset V \cap V' \cap V'' \Longrightarrow \frac{1}{\lambda(U)} \int_U d\bar{\lambda}(s) \int_D |g(s,t)|\,d\lambda(t)$$
$$< \frac{1}{\lambda(U)} \int_U 3\varepsilon\, d\bar{\lambda}(s) = 3\varepsilon$$

donc :

$$U \subset V \cap V' \cap V'' \Longrightarrow \int_D |\varphi'_U(t) - f(t)|\,d\lambda(t) < 3\varepsilon$$

autrement dit φ'_U converge en moyenne vers f sur l'ensemble borélien borné quelconque D.

Cas particulier : Si A est un ensemble borélien fixé, prenons pour φ la fonction définie sur $\mathcal{B}$ par $\varphi(B) = \lambda(B \cap A)$, $B \in \mathcal{B}$, Alors $f(t) = \chi(t;\ A)$ [13].

[13] χ désigne la fonction caractéristique d'un ensemble.

Si l'on désigne par $\lambda'_U(A)$ la fonction définie par $\lambda'_U(t; A) = \frac{\lambda(A \cap Ut)}{\lambda(Ut)}$ l'application du théorème précédent nous donne alors le résultat suivant : $\lambda'_U(A)$ converge en moyenne vers $\chi(A)$ sur tout ensemble borélien borné. C'est le théorème de la densité pour un groupe topologique localement compact ([8], Ex. 5, § 61, p. 261) (mais ici nous ne supposons pas que l'ensemble A est borné).

Cas d'une mesure de Radon positive étrangère à λ et c. r.

Soit ψ une fonction d'ensemble définie sur $\mathcal{B}$, à valeurs réelles positives et finies sur les ensembles boréliens bornés, σ-additive, singulière par rapport à λ et complètement régulière.

Il existe alors un ensemble localement borélien N tel que $\psi(A) = \psi(A \cap N)$ pour tout $A \in \mathcal{B}$ et $\lambda(A' \cap N) = 0$ pour tout ensemble borélien borné A'.

Théorème II. — *Lorsque* B, *ensemble borélien symétrique borné et de mesure positive tend vers e, la fonction* ψ'_B *définie par* $\psi'_B(t) = \frac{\psi(Bt)}{\lambda(Bt)}$ *converge en mesure relativement à* $\bar{\lambda}$ *vers zéro sur tout ensemble borélien borné* D.

a) Soit D un ensemble borélien borné quelconque. Soient ε un nombre positif et V un voisinage de *e* ouvert et borné fixés arbitrairement.

Alors VD est ouvert et borné, donc borélien, $\lambda(VD \cap N)$ est nulle et puisque λ est régulière, il existe un ouvert de Baire borné U_0 tel que :

$$VD \cap N \subset U_0 \qquad \text{et} \qquad \lambda(U_0) < \varepsilon.$$

Soit ε' un nombre positif fixé arbitrairement. Puisque toute mesure de Baire est régulière, il existe un compact de Baire C_0 inclus dans U_0 et tel que :

$$(1) \qquad \psi(U_0) - \psi(C_0) < \varepsilon'$$

A tout borélien borné B, associons l'intérieur U_B de

$$\{t : Bt \subset U_0\}.$$

U_B est ouvert et borné, donc il est borélien. En outre : $BU_B \subset U_0$. Il est évident que : $B \subset B' \Longrightarrow U_B \supset U_{B'}$; si $U_{B'}$ n'est pas vide, a fortiori U_B n'est pas vide non plus.

C_0 étant fixé, il existe un voisinage ouvert et borné V' de e tel que :

$$V'C_0V' \subset U_0$$

C_0V' est ouvert et inclus dans U_0, donc $C_0V' \subset U_{V'}$. Par conséquent $U_{V'}$, n'est pas vide et il contient C_0.

On a donc le résultat suivant :

$$B \subset V' \implies U_0 \supset U_B \supset U_{V'} \supset C_0.$$

Par suite, si l'on tient compte de (1) :

$$(2) \qquad B \subset V' \implies \psi(U_0) - \psi(U_B) < \varepsilon'.$$

Enfin, si B est symétrique,

$$(3) \qquad Bt \cap U_B \neq \emptyset \implies t \in U_0.$$

En effet, si $Bt \cap U_B \neq \emptyset$, il existe $s \in B$ tel que $st \in U_B$, donc $t \in s^{-1}U_B$, et par conséquent $t \in B^{-1}U_B$ et puisque B est symétrique $t \in BU_B \subset U_0$.

b) Nous avons vu (proposition 1 ch. I, § 2) que, quels que soient la mesure de Radon c. r. ρ et les ensembles boréliens bornés A et B tel que $\lambda(B) < 0$:

$$\rho(A) = \int \frac{\rho(A \cap Bt)}{\lambda(Bt)}\, d\bar{\lambda}(t).$$

Appliquons ce résultat à la mesure ψ, on obtient pour tout borélien borné B de λ-mesure positive :

$$\psi(U_0) = \int \frac{\psi(U_0 \cap Bt)}{\lambda(Bt)}\, d\bar{\lambda}(t)$$
$$\geq \int_{U_0} \frac{\psi(U_0 \cap Bt)}{\lambda(Bt)}\, d\bar{\lambda}(t) \geq \int_{U_0} \frac{\psi(U_B \cap Bt)}{\lambda(Bt)}\, d\bar{\lambda}(t).$$

Si en outre B est symétrique, on a, en tenant compte de (3) :

$$\int_{U_0} \frac{\psi(U_B \cap Bt)}{\lambda(Bt)}\, d\bar{\lambda}(t) = \int \frac{\psi(U_B \cap Bt)}{\lambda(Bt)}\, d\bar{\lambda}(t) = \psi(U_B)$$

donc : $$\int \frac{\psi(U_0 \cap Bt)}{\lambda(Bt)}\, d\bar{\lambda}(t) - \int_{U_0} \frac{\psi(U_0 \cap Bt)}{\lambda(Bt)}\, d\bar{\lambda}(t) \leq \psi(U_0) - \psi(U_B)$$

et par suite :

$$\int_{D - D \cap U_0} \frac{\psi(U_0 \cap Bt)}{\lambda(Bt)}\, d\bar{\lambda}(t) \leq \psi(U_0) - \psi(U_B)$$

Donc si B est inclus dans V′, on a, d'après (2) :

$$\int_{D - D \cap U_0} \frac{\psi(U_0 \cap Bt)}{\lambda(Bt)}\, d\bar{\lambda}(t) \leq \varepsilon'$$

Enfin, si B est inclus dans V et si t appartient à D, $Bt \cap N$ est inclus dans $Bt \cap U_0$, et par suite $\psi(Bt \cap U_0) = \psi(Bt)$. Donc :

$$B \subset V \cap V' \implies \int_{D - D \cap U_0} \frac{\psi(Bt)}{\lambda(Bt)}\, d\bar{\lambda}(t) \leq \varepsilon'$$

autrement dit, puisque ε' est arbitraire, ψ'_B converge en moyenne et par suite en mesure relativement à $\bar{\lambda}$ vers zéro sur $D - D \cap U_0$ quand B tend vers e.

Mais U_0 est de λ-mesure aussi petite que l'on veut, donc ψ'_B converge en mesure relativement à $\bar{\lambda}$ vers zéro sur l'ensemble D quand B tend vers e.

Cas d'une mesure de Radon complètement régulière quelconque. Soit ρ une mesure de Radon c. r. définie sur $\mathcal{B}$,

$$\rho = \rho^+ - \rho^-$$

sa décomposition de Jordan. ρ^+ et ρ^- sont c. r.

Soient $\rho^+ = \varphi^+ + \psi^+$, $\rho^- = \varphi^- + \psi^-$, $\rho = \varphi + \psi$ les décompositions de Lebesgue respectives de ρ^+, ρ^- et ρ par rapport à λ. On a alors $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ et $\psi = \psi^+ - \psi^-$. ψ^+, ψ^- et ψ sont, c. r.

Si f^+, f^-, f sont des intégrants de Radon-Nikodym par rapport à λ de φ^+, φ^-, φ respectivement, on a $f = f^+ - f^-$ localement presque partout.

Lorsque l'ensemble borélien ouvert et borné U tend vers e, $(\varphi^+)'_U$ et $(\varphi^-)'_U$ convergent en moyenne, donc en mesure relativement à λ sur tout borélien borné D vers f^+ et f^- respectivement, donc φ'_U converge dans les mêmes conditions vers f.

Lorsque l'ensemble borélien borné symétrique B tend vers e, $(\psi^+)'_B$ et $(\psi^-)'_B$ convergent en mesure relativement à $\bar{\lambda}$ sur tout borélien borné D vers zéro, donc ψ'_B converge aussi dans les mêmes conditions vers zéro. On peut donc énoncer le résultat suivant :

Théorème III. — *Si ρ est une mesure de Radon c. r. quelconque qui admet par rapport à λ une décomposition de Lebesgue*

$\rho = \varphi + \psi$ où φ est absolument continue par rapport à λ et ψ étrangère à λ, si f est un intégrant de Radon-Nikodym de φ par rapport à λ, lorsque l'ensemble borélien ouvert symétrique et borné W tend vers e, la fonction ρ'_W définie par $\rho'_W(t) = \dfrac{\rho(Wt)}{\lambda(Wt)}$, converge en mesure relativement à $\overline{\lambda}$ vers f sur tout ensemble borélien borné.

ADDENDUM AU CHAPITRE PREMIER

Les résultats obtenus dans ce premier chapitre ne sont valables que pour des mesures de Radon complètement régulières; mais, tandis que cette condition n'intervient pas explicitement dans les énoncés de la proposition 2 et du théorème 1 parce que d'une part la mesure de Haar λ est complètement régulière et que d'autre part l'absolue continuité de la mesure φ par rapport à λ implique la complète régularité de φ, nous avons dû l'expliciter dans les énoncés de la proposition 1 et des théorèmes 2 et 3. Cette restriction est due essentiellement à la définition du produit de mesures que nous avons utilisée (cf. p. 8, définition de $\mathcal{B}^\times$ et p. 10, introduction de $(I^\times, \mathcal{B}^\times, \rho^\times)$ et qui est empruntée à Halmos ([8], ch. VII, § 33, Th. F, p. 140 et § 34, Th. B, p. 144).

Si nous définissons le produit de deux mesures de Radon comme une mesure de Radon (cf. Bourbaki, Intégration, Ch. IV, § 4, N° 10) alors la restriction de complète régularité n'a plus de raison d'être et la proposition 1 et le théorème 3 en particulier sont vrais quelle que soit la mesure de Radon ρ: en effet :

a) La transformation S^*, qui est un homéomorphisme de $I^\times$ sur lui-même, transforme un borélien en un borélien;

b) Si $\rho^\times$ désigne cette fois la mesure de Radon produit, S^* conserve la mesure pour un rectangle $A \times B$ quels que soient les boréliens bornés A et B :

$$\rho^\times[S^*(A \times B)] = \rho^\times(A \times B) = \rho(A).\lambda(B)$$

comme cela se voit en appliquant le théorème de Fubini (cf. p. 10) à la *mesure de Radon produit.*

CHAPITRE II

CADRE DE LA THÉORIE ERGODIQUE

Dans l'introduction, nous avons exposé comment, en théorie ergodique, interviennent un espace des phases et un groupe de transformations de cet espace en lui-même, chaque transformation dépendant d'un indice, élément de l'espace des indices. Nous avons tenté d'expliquer pourquoi nous prenons pour espace des phases simplement un espace mesuré [14], sans topologie et pour espace des indices un groupe topologique localement compact. Nous avons également esquissé les hypothèses que l'on doit faire sur le groupe de transformations. Il nous faut maintenant fixer les notations et préciser ces hypothèses : ce sera l'objet du § 1. Dans le § 2, nous utiliserons les notions introduites dans le § précédent pour donner de nouvelles définitions dont nous déduirons quelques propriétés immédiates. Enfin dans le § 3, nous démontrerons des théorèmes généraux sur la liaison entre convergence dans l'espace des phases et convergence dans l'espace des indices.

1. — Notations. Définition d'un groupe mesurable de transformations.

Notations. — *a*) Dans l'espace des indices I, qui est un groupe topologique localement compact, les notations sont celles qui ont été introduites au ch. I, § 1.

b) Dans l'espace des phases P, x, y, z, désignent des éléments de P, X, Y, Z, des parties de P.

(P, $\mathcal{M}$) est un espace de mesure [14] dont les ensembles

[14] Un espace de mesure, appelé aussi espace mesurable ou espace borélien, est un espace dans lequel on a fixé le σ-anneau booléen des ensembles mesurables. Un espace de mesure muni d'une mesure est un espace mesuré.

mesurables sont les éléments de $\mathcal{M}$, σ-anneau booléen de parties de P comprenant P comme élément unité.

ν, mesure positive définie sur $\mathcal{M}$, totalement finie et normalisée ([15]). On désignera aussi par espace des phases l'espace mesuré $(P, \mathcal{M}, \nu)$.

c) Nous avons fait intervenir deux espaces : l'espace des indices I et l'espace des phases P. Introduisons maintenant l'espace produit : $P^\times = I \times P$. Le σ-anneau booléen $\mathcal{M}^\times$ engendré par les ensembles $B \times X$, où B appartient à $\mathcal{B}$ et X à $\mathcal{M}$, est alors le support de la mesure produit $\nu^\times = \lambda \times \nu$, telle que $\nu^\times(B \times X) = \lambda(B) . \nu(X)$.

La mesure de Haar λ étant σ-finie et la mesure ν totalement finie, le théorème de Fubini pourra s'appliquer dans l'espace mesuré $(P^\times, \mathcal{M}^\times, \nu^\times)$.

Si Q est un ensemble de $P^\times$, s, un élément de I, nous conviendrons de noter :

$$sQ = \{(r, x) : r = st, \ (t, x) \in Q\}$$

c'est-à-dire l'ensemble déduit de Q par une translation à gauche définie par s, « parallèlement » à I. On définirait de même Qs. Si Q^x est la section de Q déterminée par x, l'x-section de sQ sera sQ^x (cf. ch. I, § 1).

Groupe mesurable de transformations. — A tout élément t de I, nous associons une transformation T_t biunivoque de P sur lui-même, l'ensemble $\mathcal{T}$ des transformations T_t étant caractérisé par :

1) une structure de groupe,
2) une propriété de conservation de mesurabilité,
3) une propriété de conservation de mesure.

a) Structure de groupe :

$$T_r T_s = T_{rs}, \qquad \forall\, r, \ s \in I$$

T_e est la transformation identique, c'est l'élément unité du groupe de transformations $\mathcal{T}$.

Ces transformations étant biunivoques, quel que soit t, T_t a une inverse :

$$(T_t)^{-1} = T_{t^{-1}}$$

b) Propriété de conservation de mesurabilité :

A $\mathcal{T}$ nous faisons correspondre dans $P^\times$ la transformation T^*

([15]) $\nu(P) = 1$.

qui applique (t, x) sur $(t, T_{t^{-1}}x)$. Soit X^* l'image de $I \times X$ par T^*, X étant une partie de P; X^* est donc l'ensemble des (t, x) tels que $T_t x$ appartienne à X et une t-section de X^* est $T_{t^{-1}}X$.

Nous supposons que, quel que soit l'ensemble mesurable X dans $(P, \mathcal{M})$, X^* est localement mesurable dans $(P^\times, \mathcal{M}^\times)$:

$$\forall \ X \in \mathcal{M} \quad \text{et} \quad Q \in \mathcal{M}^\times, \quad X^* \cap Q \in \mathcal{M}^\times$$

En fait nous nous servirons de cette propriété seulement sous la forme suivante :

$$\forall \ X \in \mathcal{M} \quad \text{et} \quad A \in \mathcal{B}, \quad X^* \cap (A \times P) \in \mathcal{M}^\times.$$

Par conséquent, si X est mesurable, $T_{t^{-1}}X$ est également mesurable quel que soit t : donc toute transformation T_t est une transformation mesurable au sens de [8], § 39.

Nous avons déjà remarqué l'analogie qui existe entre les transformations S^* et T^* (cf. p. 3). Nous la soulignons encore en qualifiant $\mathcal{T}$ de groupe mesurable de transformations [16].

c) Propriété de conservation de mesure.

Nous supposons qu'il existe une mesure ν invariante par $\mathcal{T}$. Pour bien distinguer cette mesure invariante, nous lui affectons une notation particulière et nous la désignons par μ. Donc, par hypothèse :

$$\forall \ t \in I \quad \text{et} \quad X \in \mathcal{M}, \quad \mu(X) = \mu(T_{t^{-1}}X).$$

On a aussi évidemment : $\mu(T_r X) = \mu(X)$ quels que soient $r \in I$ et $X \in \mathcal{M}$.

2. — Définitions et propriétés découlant de l'introduction du groupe de transformations.

Nous envisageons successivement le cas des ensembles, des fonctions de point, des mesures et enfin des fonctions caractéristiques qui peuvent être considérées soit comme fonctions de point soit comme mesures.

(16) A $t \in I$, associons la transformation de I sur I qui à s fait correspondre ts (translation à gauche de t). L'ensemble de ces transformations constitue un groupe $\mathcal{G}$. La transformation analogue à T^* associée à un tel groupe n'est autre que S^* et $\mathcal{G}$ est un groupe mesurable de transformations si I est lui-même un groupe mesurable au sens de [8].

1) *Ensembles.* — *a*) Dans l'espace produit P^X, nous avons déjà associé à toute partie X de P l'ensemble :

$$X^* = T^*(I \times X) = \{(t, x) : T_t x \in X\}$$

Rappelons que : $(X^*)_t = T_{t^{-1}}X$.

$(X^*)_e = X$ est la trace de X^*.

Si X appartient à $\mathcal{M}$, X^* est localement $\mathcal{M}^X$-mesurable et toutes les t-sections de X^* d'après *b*), § 1 sont mesurables dans $(P, \mathcal{M})$ et d'après *c*) § 1 ont même μ-mesure.

Si A est une partie de I, posons : $X_A^* = X^* \cap (A \times P)$. Alors $\forall X \in \mathcal{M}$ et $A \in \mathcal{B}$, $X_A^* \in \mathcal{M}^X$ et $\mu^X(X_A^*) = \lambda(A).\mu(X)$.

Dans le cas d'un ensemble réduit à un seul point x, on écrit x^* au lieu de $\{x\}^*$.

Par un élément (y, r) de P^X passe un x^* et un seul dont la trace est $x = T_r y$

On a : $$X^* = \bigcup_{x \in X} x^*$$

et toute opération sur des ensembles X de P ou toute relation entre ces ensembles se traduit par la même opération sur les ensembles correspondants X^* ou la même relation entre ces ensembles ; ainsi :

$$(X \cup Y)^* = X^* \cup Y^*, \qquad (X \cap Y)^* = X^* \cap Y^*,$$
$$(X - Y)^* = X^* - Y^*$$
$$X \cap Y = \emptyset \Longrightarrow X^* \cap Y^* = \emptyset, \qquad X \subset Y \Longrightarrow X^* \subset Y^*.$$

Notons pour finir que $(T_t X)^* = tX^*$.

b) Considérons dans l'espace des indices l'x-section de X^*, que nous désignons par E (x, X). Nous faisons ainsi correspondre au couple $(x; X)$ un ensemble de I. De la définition ou des propriétés de X^* nous déduisons immédiatement les résultats suivants :

$$E(x; X) = \{r : T_r x \in X\} = \{r : x \in T_{r^{-1}}X\}$$

Si on prend pour X un élément de $\mathcal{M}$, $E(x; X)$ est localement $\mathcal{B}$-mesurable, quel que soit x, et, si A est un borélien borné, la fonction numérique définie sur P qui en x a pour valeur :

$$\lambda[E(x, X) \cap \dot{A}]$$

est mesurable dans $(P, \mathcal{M})$ et :

$$\mu^X(X_A^*) = \int \lambda[E(x; X) \cap A]d\mu(x) = \lambda(A).\mu(X).$$

Si maintenant on considère x comme fixé, $E(x; X)$ dépend de X et toute opération sur des ensembles X de P ou toute relation entre ces ensembles se traduit par la même opération ou la même relation pour les ensembles correspondants $E(x; X)$; ainsi :

$$E(x;\ X \cup Y) = E(x;\ X) \cup E(x;\ Y),$$
$$E(x;\ X \cap Y) = E(x;\ X) \cap E(x;\ Y),$$
$$E(x;\ X - Y) = E(x;\ Y) - E(x;\ X),$$
$$X \cap Y = \emptyset \Longrightarrow E(x;\ X) \cap E(x;\ Y) = \emptyset,$$
$$X \subset Y \Longrightarrow E(x;\ X) \subset E(x;\ Y),$$

Enfin :

$$E(x;\ T_t X) = tE(x;\ X),$$
$$E(T_t x;\ X) = E(x;\ X)t^{-1}.$$

c) Dans l'espace des phases, l'orbite d'un élément x de P est l'ensemble de tous les transformés de x par les transformations T_t :

$$O(x) = \{y :\ y = T_t x,\quad t \in I\}$$

O (x) est la projection de x^* sur P.

L'appartenance à une même orbite définit dans P une relation d'équivalence.

Une partie X de P est un ensemble invariant si :

$$T_t X = X, \qquad \forall\, t \in I.$$

Une orbite est un ensemble invariant. Tout ensemble invariant est une réunion d'orbites. L'union et l'intersection d'ensembles invariants est encore un ensemble invariant : la propriété d'invariance est conservée par les opérations sur les ensembles. La famille des ensembles invariants forme un sous-σ-anneau de $\mathcal{M}$ avec P comme élément unité, l'ensemble vide étant aussi invariant.

Remarquons qu'il revient au même de dire qu'un ensemble X est invariant ou de dire que $X^* = I \times X$.

Un ensemble mesurable X est presqu'invariant (du point de vue métrique) si :

$$\mu(T_t X - X) = 0$$

pour localement presque tout t dans I ([17]).

([17]) En fait cette propriété de quasi-invariance ne dépend pas de la mesure invariante μ, mais du σ-idéal des ensembles de mesure nulle; elle peut se traduire au moyen d'une mesure quelconque équivalente à μ.

Nous montrerons (nº 4 de ce §) que dans ce cas, si $\bar{\mu}$ est la complétion de μ (⁶) il existe un ensemble Z, invariant, $\bar{\mu}$-mesurable et tel que :

$$\bar{\mu}(T_t X - Z) = 0 \qquad \forall t \in I.$$

Alors : $\bar{\mu}^{\times}(X_A^* - Z_A^*) = 0$ quel que soit l'ensemble borélien borné A.

Remarque. — On peut considérer un ensemble mesurable invariant et de mesure non nulle comme un espace des phases.

2) *Fonctions de point à valeurs réelles.* — *a*) Soit f une fonction numérique à valeurs réelles définie dans P. On lui associe dans $P^{\times}$ la fonction f^* définie par :

$$f^*(t, x) = f(T_t x).$$

On a évidemment :

$$f^*(tr, x) = f(T_{tr} x) = f^*(t, T_r x).$$

Conformément aux notations de [8], § 34, pour une t-section, resp. une x-section, de f^*, nous écrivons : f_t^*, resp. f^{*x}.

Si g est une fonction définie dans $P^{\times}$, nous appelons g_e la trace de g(¹⁸). f est la trace f_e^* de sa fonction associée.

f^* est constante sur tout ensemble x^*. Réciproquement, si une fonction g définie dans $P^{\times}$ est constante sur tout ensemble x^*, g est la fonction associée de sa trace : $g = (g_e)^*$.

Soit c un nombre réel quelconque, alors :

$$\{(t, x) : f^*(t, x) \geq c\} = \{(t, x) : f(T_t x) \geq c\}$$
$$= \{(t, x) : T_t x = y, f(y) \geq c\}$$

donc :

$$\{(t, x) : f^*(t, x) \geq c\} = \{y : f(y) \geq c\}^*. \tag{1}$$

b) De cette égalité, il résulte immédiatement que :

$$\{x : f_t^*(x) \geq c\} = [\{y : f(y) \geq c\}^*]_t = T_{t^{-1}}\{y : f(y) \geq c\}.$$

et :

$$\mu\{x : f_t^*(x) \geq c\} = \mu\{y : f(y) \geq c\} \qquad \forall t \in I.$$

Donc si f est $\mathcal{B}$-mesurable, f_t^* l'est aussi quel que soit t; en outre ces deux fonctions ont la même répartition spectrale

(¹⁸) Cf. [19], § 18, p. 55.

relativement à μ, de sorte que si f est μ-intégrable, f_t^* l'est également et

$$(2) \qquad \int f(x)\,d\mu(x) = \int f_t^*(x)\,d\mu(x) \qquad \forall\, t \in \mathrm{I}.$$

Notons en passant que si Z est un ensemble mesurable invariant :

$$\int_Z f(x)\,d\mu(x) = \int_Z f_t^*(x)\,d\mu(x)$$

et si Y est un ensemble mesurable presqu'invariant;

$$\int_{T_rY} f(x)\,d\mu(x) = \int_Z f(x)\,d\bar{\mu}(x) = \int_Z f_t^*(x)\,d\bar{\mu}(x) = \int_{T_rY} f_t^*(x)\,d\mu(x)$$

quels que soient r et t, Z étant l'ensemble invariant $\bar{\mu}$-mesurable tel que $\bar{\mu}(T_sY - Z) = 0$ quel que soit s.

c) De l'inégalité (1) on déduit encore que si f est $\mathcal{M}$-mesurable, f^* est localement $\mathcal{M}^\times$-mesurable. En particulier si B est un borélien borné, la mesurabilité de f dans $(P, \mathcal{M})$ entraîne celle de la restriction de f^* à $B \times P$ dans $(P^\times, \mathcal{M}^\times)$.

Si f est mesurable et positive, l'application du théorème de Fubini dans $(P^\times, \mathcal{M}^\times, \mu^\times)$ nous donne :

$$(3) \quad \int_{B\times P} f^*(t, x)\,d\mu^\times(t, x) = \int_B d\lambda(t) \int f_t^*(x)\,d\mu(x)$$
$$= \lambda(B) . \int f(x)\,d\mu(x).$$

Ce résultat est encore valable pour une fonction de signe quelconque comme on peut le voir en utilisant sa décomposition en f^+ et f^-. Donc si f est μ-intégrable, f^* est $\mu^\times$-intégrable.

d) De l'inégalité (1) résulte encore ceci :

$$\{t : f^{*x}(t) \geq c\} = E(x; \{y : f(y) \geq c\})$$

quel que soit le nombre réel c.

Donc si f est mesurable dans $(P, \mathcal{M})$, f^{*x} est localement $\mathcal{B}$-mesurable, quel que soit x.

Si f est μ-intégrable, en appliquant de nouveau le théorème de Fubini, on constate que f^{*x} est aussi λ-intégrable sur tout borélien borné B, pour presque tout x, que la fonction définie sur P qui en x a pour valeur $\int_B f^{*x}(t)d\lambda(t)$ est μ-intégrable et, en tenant compte de (3), que :

$$(4) \qquad \int d\mu(x) \int_B f^{*x}(t)d\lambda(t) = \lambda(B) . \int f(x)d\mu(x).$$

Nous pouvons constater également que si Y est un ensemble mesurable invariant ou presqu'invariant :

$$\int_Y d\mu(x) \int_B f^*(t, x) d\lambda(t) = \lambda(B) . \int_Y f(x) d\mu(x).$$

e) Une fonction f est invariante si $f(T_t x)) = f(x)$ quels que soient t et x. Une telle fonction est constante sur une orbite quelconque. Sa fonction associée f^* est constante sur tout ensemble $I \times \{x\}$. Réciproquement si la fonction associée f^* d'une fonction f est constante sur tout ensemble $I \times \{x\}$, f est invariante.

Une fonction f est presqu'invariante (du point de vue métrique) si, pour t fixé quelconque, $f(T_t x) = f(x)$ pour presque tout x (relativement à μ). [Cf. note ([17]).]

Proposition 1. — *Toute fonction mesurable et presqu'invariante est presque partout (relativement à $\bar{\mu}$) égale à une fonction invariante $\bar{\mu}$-mesurable* ([19]).

Soit f une fonction définie dans P, $\mathcal{M}$-mesurable et presqu'invariante. Posons :

$$g(t, x) = f(T_t x) - f(x) \qquad \text{et} \qquad Q = \{(t, x) : g(t, x) \neq 0\}$$

Si A est un ensemble borélien borné quelconque, la restriction de g à $A \times P$ est $\mathcal{M}^{\times}$-mesurable, donc $Q \cap (A \times P)$ est $\mathcal{M}^{\times}$-mesurable. Toutes ses t-sections sont de μ-mesure nulle; il est donc de $\mu^{\times}$-mesure nulle, et par suite presque toutes ses x-sections sont de mesure nulle, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble N dans P de μ-mesure nulle, tel que :

$$x \notin N \Longrightarrow \lambda\,\{t : g(t, x) \neq 0,\ t \in A\} = 0 \text{ i.e. : } \lambda(Q^x \cap A) = 0$$

Soient r et s, éléments distincts de I, et x, élément de P, fixés tels que $T_r x$ et $T_s x$ n'appartiennent pas à N. On peut alors trouver un borélien borné B tel que $\lambda(B \cap Bsr^{-1}) \neq 0$.

Puisque $T_r x \notin N$, si $t \in B - B \cap Q^{T_r x}$, $f(T_{tr} x) - f(T_r x) = 0$.

Puisque $T_s x \notin N$, si $t' \in B - B \cap Q^{T_s x}$, $f(T_{t's} x) - f(T_s x) = 0$.

Prenons alors pour t un élément quelconque de $B \cap Bsr^{-1}$ qui n'appartienne pas à $Q^{T_r x} \cup Q^{T_s x} sr^{-1}$, ce qui est possible puisque ce dernier ensemble est localement de mesure nulle, alors que le premier ne l'est pas, et prenons $t' = trs^{-1}$, alors

([19]) Cf. [11], § 9.

$T_{tr}x = T_{t's}x$ et $f(T_r x) = f(T_s x)$. Donc si $T_r x$ et $T_s x$ n'appartiennent pas à N, $f(T_r x) = f(T_s x)$, autrement dit : (r, x) et $(s, x) \notin N^* \Longrightarrow f^*(r, x) = f^*(s, x)$. Pour un x fixé, $f^*(t, x)$ est donc une constante sauf sur l'x-section de N^*. Considérons alors dans P^X la fonction h définie par :

$$\begin{array}{lll} h(t, x) = f^*(t, x) & \text{si} & (t, x) \notin N^* \\ h(t, x) = f^*(s, x) & \text{si} & (t, x) \in N^*, \quad (s, x) \notin N^* \\ h(t, x) = 0 & \text{si} & (t, x) \in N^* \quad \text{quel que soit } t. \end{array}$$

h est constante le long de tout ensemble x^*; c'est donc la fonction associée de sa trace h_e. h est constante sur tout ensemble $I \times \{x\}$, donc h_e est invariante. Or h_e ne diffère de f que sur un sous-ensemble de N qui est de μ-mesure nulle, c'est donc la fonction cherchée.

Exemple : P est le cercle (ouvert) de rayon 1 ; μ, la restriction à P de la mesure de Lebesgue dans le plan. I est la droite numérique ; T_t, la rotation d'angle t (orienté) autour du centre de P. Soit X_0 un rayon (segment ouvert) de P. Posons : $f(x) = 2$ si $x \in X_0$, $= 1$ si $x \notin X_0$. Alors h_e est la fonction constante égale à 1. Cet exemple me semble contredire le résultat énoncé dans [1], p. 167.

3) *Mesures.* — Si ν est une mesure définie sur $\mathcal{M}$, nous pouvons lui associer une famille de mesures en posant : $\nu^*(t, X) = \nu(T_{t^{-1}}X)$; à chaque t fixé correspond une mesure $\nu^*(t)$. Mais pour X fixé, nous obtenons une fonction définie sur I : $\nu^*(X)$.

Le cas de la mesure invariante introduite précédemment correspond à ν^* indépendante de t quel que soit X fixé.

On serait tenté de définir une quasi-invariance pour une mesure de la façon suivante : ν est une mesure presqu'invariante si pour tout $X \in \mathcal{M}$, $\nu^*(X) = \nu(X)$ localement presque partout sur I. Mais une telle quasi-invariance se ramène à une invariance stricte. Soit en effet un r tel que $\nu(T_r X) \neq \nu(X)$. Mais $\nu(T_s X) = \nu(X)$ localement presque partout. Donc $\nu(T_r X) \neq \nu(T_s X)$ localement presque partout (r fixe, s variable). Posons : $T_r X = Y$ et $t = sr^{-1}$, alors $T_s X = T_{sr^{-1}} Y = T_t Y$ et $\nu(T_t Y) \neq \nu(Y)$ localement presque partout, ce qui est contraire à l'hypothèse.

4) *Cas particulier des fonctions caractéristiques d'ensembles.* Nous envisageons ce cas particulier parce que l'on peut considérer une fonction caractéristique χ soit comme une fonction

de point, soit comme une fonction d'ensemble qui est même une mesure.

Pour $X \subset P$ et $x \in P$, on a : $\chi(x;\ X) = 1$ si $x \in X$, 0 si $x \notin X$. Si on se fixe X, on a une fonction de point $\chi(X)$ dont la fonction associée $\chi^*(X)$ est définie par :

$$\chi^*(t,\ x;\ X) = \chi(T_t x;\ X)$$

Si on se fixe x, on a une mesure $\chi(x)$ à laquelle on associe la fonction $\chi^*(x)$ définie par :

$$\chi^*(x;\ t,\ X) = \chi(x;\ T_{t-1}X)$$

Mais : $$\chi(T_t x;\ X) = \chi(x;\ T_{t-1}X)$$

car : $$T_t x \in X \Longleftrightarrow x \in T_{t-1}X.$$

Par conséquent, si on considère χ comme fonction de x et de X, on peut parler d'une façon générale de la fonction associée χ^* de la fonction caractéristique χ; elle dépend du triplet : $(t,\ x,\ X)$.

Si l'on adopte le même symbole χ pour les fonctions caractéristiques dans P^X et dans I (cf. ([13])), et si l'on tient compte de ce que :

$$T_t x \in X \Longleftrightarrow (t,\ x) \in X^*$$

on a : $$\chi^*(X) = \chi(X^*)$$

$$\chi^*(x;\ X) = \chi[X^{*x}] = \chi[E(x;\ X)].$$

Si X est un ensemble mesurable presqu'invariant, sa fonction caractéristique est aussi mesurable et presqu'invariante au sens défini au n° 2; elle coïncide donc sauf sur un sous-ensemble d'un ensemble de mesure nulle avec une fonction invariante qui est la fonction caractéristique d'un ensemble invariant : on obtient ainsi le résultat annoncé pour les ensembles presqu'invariants au n° 1.

3. — Liaison entre convergence dans l'espace des phases et convergence dans l'espace des indices.

Au § précédent nous avons montré comment à toute fonction f définie dans P on peut associer une fonction définie dans I, en considérant l'x-section de f^*. Donc à toute famille de fonctions f_j correspond ainsi pour chaque x une famille

de fonctions dans I. Dans ce §, nous allons établir certaines liaisons entre la convergence suivant un certain mode des f_j dans P et la convergence suivant le même mode pour presque tout x des fonctions correspondantes dans I.

Soit J un ensemble ordonné par une relation $\ll$, filtrant pour cette relation et dont le filtre des sections admet une base dénombrable. Soit f_j, $j \in J$, une famille de fonctions définies et mesurables dans P quel que soit j; soit g une fonction définie et mesurable dans P.

THÉORÈME 1. — *Si pour presque tout x, f_j^{*x} converge en mesure suivant* J *vers g^{*x} sur tout ensemble borélien borné* A *de mesure non nulle, alors f_j converge en mesure vers g sur* P.

Soit ε un nombre positif arbitrairement fixé.

Posons :

$$X_j = \{x : |f_j(x) - g(x)| > \varepsilon\}.$$

Alors : $\{(t, x) : |f_j^*(t, x) - g^*(t, x)| > \varepsilon\} = X_j^*.$

Traduisons l'hypothèse avec ces notations : quel que soit l'ensemble borélien borné A de mesure non nulle,

$$\lambda[(X_j^*)^x \cap A] = \lambda[E(x; X_j) \cap A]$$

tend suivant J vers zéro pour presque tout x.

Mais :

$$\mu(X_j) = \int \frac{\lambda[E(x;\ X_j) \cap A]}{\lambda(A)} d\mu(x).$$

Or $\dfrac{\lambda[E(x;\ X_j) \cap A]}{\lambda(A)}$ est inférieur ou égal à 1, qui est intégrable sur P puisque μ est totalement finie. J étant à base dénombrable, le théorème de convergence bornée de Lebesgue s'applique et la convergence presque partout entraîne la convergence en moyenne, c'est-à-dire, puisque l'intégrant est positif, que :

$$\mu(X_j) = \int \frac{\lambda[E(x,\ X_j) \cap A]}{\lambda(A)} d\mu(x) \to 0 \quad \text{suivant} \quad J.$$

$\mu(X_j)$ tendant vers zéro suivant J, f_j converge en mesure vers g sur P.

Remarquons que $\mu^\times[(X_j)_A^*]$ tend aussi vers zéro suivant J, c'est-à-dire que l'on a aussi la convergence en mesure de f_j^* vers g^* dans $P^\times$ sur $A \times P$.

THÉORÈME 2. — *Si f_j converge presque partout suivant* J *vers* g *sur* P, *alors, pour presque tout* x, $(f_j^*)^x$ *converge presque partout suivant* J *vers* g^{*x} *sur tout ensemble borélien* A *de* I, *borné et de mesure non nulle.*

Dire que f_j converge presque partout suivant J vers g dans P, c'est affirmer l'existence d'un ensemble N dans P de μ-mesure nulle et tel que, ε étant un nombre positif fixé arbitrairement, pour tout y, élément de P, n'appartenant pas à N, on peut trouver $j(y, \varepsilon)$ tel que :

$$j \geqslant j(y, \varepsilon) \Longrightarrow (1) \begin{cases} |f_j(y) - g(y)| < \varepsilon & \text{si} \quad g(y) \quad \text{est fini,} \\ |f_j(y)| > \dfrac{1}{\varepsilon} & \text{si} \quad |g(y)| = \infty. \end{cases}$$

Mais $f_j^*(t, x) - g^*(t, x)$ est constante le long de tout ensemble y^* ; donc si les inégalités (1) sont satisfaites en y elles le sont aussi le long de y^*. Par conséquent en tout point (t, x) n'appartenant pas à N^*, $f_j^*(t, x)$ converge vers $g^*(t, x)$. Donc pour x fixé, en tout point t de I n'appartenant pas à $(N^*)^x = E(x; N)$, $f_j^*(t, x)$ converge vers $g^*(t, x)$.

Or, quel que soit l'ensemble borélien borné A, $\mu^\times(N_A^*) = 0$ et pour presque tout x, $\lambda[(N_A^*)^x] = \lambda[E(x; N) \cap A] = 0$. Par conséquent pour presque tout x, $(f_j^*)^x$ converge presque partout suivant J vers g^{*x} sur tout borélien borné A.

Remarquons que nous avons montré en passant la convergence presque partout de f_j^* vers g^* sur A $\times$ P.

Tenant compte du fait que sur un ensemble de mesure finie la convergence presque partout entraîne la convergence en mesure, nous pouvons dresser le tableau suivant, les convergences dans l'espace des indices étant des convergences sur un borélien borné quelconque :

$$\begin{array}{lccc} \text{Esp. des indices I :} & \text{Conv. } p.p. & & \text{Conv. en mesure} \\ & \uparrow \text{Th.2} & & \text{Th.1} \downarrow \\ \text{Esp. des phases P :} & \text{Conv. } p.p. & \longrightarrow & \text{Conv. en mesure.} \end{array}$$

De ce tableau il ressort en particulier que pour dissocier convergence presque partout et convergence en mesure dans P, il suffit de le faire dans I.

On appliquera ces résultats à la dérivation dans le cadre ergodique. Pour compléter ces questions relatives à la conver-

gence, on va démontrer le théorème suivant qui ne concerne que l'espace des phases.

THÉORÈME 3. — *Si g est une fonction définie dans* P *non-négative et intégrable, si f_j, $j \in$ J, est une famille de fonctions définies dans* P *non-négatives et intégrables et telles que*

$$\int f_j(x)\, d\mu(x) = \int g(x)\, d\mu(x)$$

quel que soit j, alors la convergencee en mesure suivant J *de f_j vers g entraîne la convergence en moyenne de f_j vers g dans* P [20].

Soit $h_j = f_j - g$ et $h_j = h_j^+ - h_j^-$ la décomposition de Jordan de h_j.

On a :

$h_j^+ = f_j - g$ lorsque $f_j > g$ et $= 0$ dans le cas contraire;
$h_j^- = g - f_j$ lorsque $f_j < g$ et $= 0$ dans le cas contraire.

Donc :

$$0 \leq h_j^- \leq g \quad \text{quel que soit } j.$$

D'autre part de la convergence en mesure de f_j vers g on déduit la convergence en mesure de h_j^+ et de h_j^- vers zéro. On peut donc appliquer pour h_j^- le théorème de convergence bornée de Lebesgue qui donne :

$$\int h_j^-(x) d\mu(x) \to 0 \quad \text{suivant J.}$$

Mais $\int h_j(x) d\mu(x) = 0$ et $h_j^+ = h_j + h_j^-$, donc $\int h_j^+(x) d\mu(x) \to 0$ et par suite :

$$\int |h_j(x)|\, d\mu(x) = \int h_j^+(x) d\mu(x) + \int h_j^-(x) d\mu(x)$$

tend vers zéro suivant J.

Pour des fonctions satisfaisant aux conditions du théorème 3, on peut alors compléter le tableau des convergences et on obtient :

$$\begin{tikzcd}
\text{Esp. des indices I :} & \text{Conv. } p.\,p. & \text{Conv. en mesure} \arrow[d, "Th.\,1"'] & \text{Conv. en moyenne} \arrow[l] \\
\text{Esp. des phases P :} & \text{Conv. } p.\,p. \arrow[u, "Th.\,2"] \arrow[r] & \text{Conv. en mesure} \arrow[r, shift left] & \text{Conv. en moyenne} \arrow[l, shift left, "Th.\,3"]
\end{tikzcd}$$

(20) Cf. [8], § 26, Ex. 7, p. 112.

CHAPITRE III

MOYENNES ERGODIQUES

Dans le § 1, abordant le point de vue dual en théorie ergodique, nous définissons les moyennes ergodiques pour les fonctions de point et pour les mesures dans le cadre élargi de la théorie où nous nous sommes placés et nous établissons une relation entre ces deux types de moyennes. Dans le § 2, après avoir établi un théorème qui lie convergence des moyennes de mesure et convergence des moyennes de fonctions caractéristiques et qui complète dans un certain sens pour les moyennes ergodiques les théorèmes du § 3, ch. II, nous considérons le problème de la dérivation dans le cadre ergodique. A partir de formules simples obtenues dans le § 1 pour les moyennes de fonctions caractéristiques, nous déduisons dans le § 3 des inégalités qui nous conduisent à une notion de groupe ergodique plus générale que celle de A.P. Calderon, puis à un théorème sur l'existence d'une mesure invariante dans l'espace des phases.

1. — Définition des moyennes ergodiques. Point de vue dual en théorie ergodique.

1) *Moyennes ergodiques pour une fonction de point.* — *a*) Soit f une fonction définie sur P et $\mathcal{M}$-mesurable, et B un ensemble borélien borné et de mesure non nulle.

Nous savons que f^{*x} est mesurable sur B (cf. ch. II, § 2, n° 2 *d*). Nous pouvons donc définir la moyenne ergodique $\tilde{f}_B$ de f par :

$$\tilde{f}_B(x) = \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f^{*x}(t)\, d\lambda\,(t). \tag{1}$$

Remarquons que dans le cas où f est bornée, cette moyenne existe certainement.

b) Il importe de remarquer que la définition de la moyenne ergodique ne fait pas intervenir la mesure invariante μ, ni même une mesure dans l'espace des phases, mais simplement une propriété de mesurabilité pour f, qui ne dépend que de $\mathfrak{M}$.

Il est évident que si f est non-négative, sa moyenne $\tilde{f}_B$ est parfaitement définie quel que soit B et est non-négative également.

Si f est μ-intégrable, $\tilde{f}_B$ l'est aussi (cf. ch. II, § 2, nº 2 *d*).

D'après la définition des fonctions associées :

$$\tilde{f}_B^*(t, x) = \tilde{f}_B(T_t x) = \frac{1}{\lambda(B)}\int_B f^*(r, T_t x)d\lambda(r) = \frac{1}{\lambda(B)}\int_B f^*(rt, x)d\lambda(r).$$

Mais le changement de variables $rt = s$, ou $r = st^{-1}$ donne :

$$\int_B f^*(rt, x)d\lambda(r) = \int_{Bt} f^*(s, x).k(t^{-1})\, d\lambda(s) = \frac{1}{k(t)}\int_{Bt} f^*(s, x)\, d\lambda(s).$$

donc :

$$\tilde{f}_B^*(t, x) = \frac{1}{\lambda(B)}\cdot\frac{1}{k(t)}\int_{Bt} f^*(s, x)d\lambda(s) = \frac{1}{\lambda(Bt)}\int_{Bt} f^*(s, x)\, d\lambda(s).$$

c'est-à-dire :

$$\tilde{f}_B(T_t x) = \tilde{f}_B^*(t, x) = \tilde{f}_{Bt}(x). \tag{2}$$

Si f est invariante; $\tilde{f}_B = f$ quel que soit B.

Si f est presqu'invariante et si g est la fonction invariante telle que $f = g$ sauf sur un sous-ensemble d'un ensemble de mesure nulle, alors $\tilde{f}_B = g$ sauf sur un sous-ensemble d'un ensemble de mesure nulle.

2) *Moyennes ergodiques pour une mesure.* — *a*) Soit ν une mesure quelconque définie sur $\mathfrak{M}$. $\nu^\times$ est une mesure définie sur $\mathfrak{M}^\times$; et si X est un ensemble $\mathfrak{M}$-mesurable, X^* a une intersection avec tout rectangle $B \times P$, où B est un ensemble borélien borné de mesure non nulle, qui est $\mathfrak{M}^\times$-mesurable, de

sorte que la restriction à B de la fonction de t définie par $\nu(X^*_t) = \nu(T_{t^{-1}}X) = \nu^*(t, X)$ est $\mathcal{B}$-mesurable. Nous pouvons donc définir la moyenne ergodique $\tilde{\nu}_B$ de ν sur B par :

$$(4) \qquad \tilde{\nu}_B(X) = \frac{1}{\lambda(B)}\int_B \nu^*(t, X)d\lambda(t).$$

$$b) \quad \tilde{\nu}_B(T_tX) = \frac{1}{\lambda(B)}\int_B \nu^*(r, T_tX)\,d\lambda(r) = \frac{1}{\lambda(B)}\int_B \nu^*(t^{-1}r, X)\,d\lambda(r)$$

Effectuons le changement de variables $t^{-1}\,r = s$ ou $r = ts$, alors :

$$\frac{1}{\lambda(B)}\int_B \nu^*(t^{-1}r, X)\,d\lambda(r) = \frac{1}{\lambda(B)}\int_{t^{-1}B} \nu^*(s, X)\,d\lambda(s)$$

c'est-à-dire :

$$(5) \qquad \tilde{\nu}_B(T_tX) = \tilde{\nu}_{t^{-1}B}(X).$$

On aurait pu définir la moyenne ergodique par :

$$(6) \qquad \tilde{\nu}_B(X) = \frac{\nu^\times(X^*_B)}{\lambda(B)}.$$

Or $\nu^\times$ est une mesure sur $\mathcal{M}^\times$, et d'autre part si $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ est une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{M}$, $(\cup X_n)^*_B = \cup\,[(X_n)^*_B]$, de sorte que la σ-additivité de $\nu^\times$ entraîne celle de $\tilde{\nu}_B$. Pour B fixé, $\tilde{\nu}_B$ est encore une mesure définie sur $\mathcal{M}$.

Si pour un X fixé, $\nu(T_rX) = \nu(X)$ localement presque partout, $\tilde{\nu}_B(X) = \nu(X)$ quel que soit B. En particulier : $\tilde{\nu}_B(P) = \nu(P) = 1 \;\forall B \in \mathcal{B}$. Dans le cas de la mesure invariante μ, alors $\tilde{\mu}_B(X) = \mu(X)$ quels que soient B et X.

3) *Relation entre moyennes de mesure et moyennes de fonction de point.* — Soit f une fonction définie sur P, non-négative et $\mathcal{M}$-mesurable. Soit ν une mesure positive, totalement finie définie sur $\mathcal{M}$. On a :

$$(7) \qquad \int f(x)\,d\nu_B(x) = \int \tilde{f}_B(x)\,d\nu(x).$$

Soit R la droite numérique, $\mathcal{A}$, la famille des ensembles boréliens de R et β la mesure de Lebesgue sur R. c étant un nombre réel non-négatif, l'ensemble de P $\times$ R qui a pour c-section $\{x : f(x) \geq c\}$ est mesurable dans (P $\times$ R, $\mathcal{M} \times \mathcal{A}$) et le

théorème de Fubini s'applique à la mesure de cet ensemble, de sorte que si R^+ est la demi-droite positive :

$$\begin{aligned}\int f(x)\,d\tilde{\nu}_B(x) &= \int_{R^+} \nu_B\{x : f(x) \geq c\}\,d\beta(c),\\ &= \int_{R^+} d\beta(c) \frac{1}{\lambda(B)} \int_B \nu[T_{r-1}\{x : f(x) \geq c\}]\,d\lambda(r),\\ &= \frac{1}{\lambda(B)} \int_B d\lambda(r) \int_{R^+} \nu[T_{r-1}\{x : f(x) \geq c\}]\,d\beta(c),\\ &= \frac{1}{\lambda(B)} \int_B d\lambda(r) \int_{R^+} \nu\{x : f^*(r, x) \geq c\}\,d\beta(c),\\ &= \frac{1}{\lambda(B)} \int_B d\lambda(r) \int f^*(r, x)\,d\nu(x).\end{aligned}$$

Par application du théorème de Fubini dans $P^\times$, on obtient (7).

Si f est une fonction de signe quelconque, on décompose f en $f^+ - f^-$, et en s'appuyant sur la propriété de linéarité de l'intégrale, on montre que (7) est encore vrai.

(On pourrait également introduire sur $\mathcal{M}$ une mesure ν de signe quelconque et utilisant sa décomposition de Jordan montrer que (7) est valable pour une fonction et une mesure de signe quelconque).

Si Z est un ensemble mesurable invariant :

$$\int_Z \tilde{f}_B(x)\,d\nu(x) = \int_Z f(x)\,d\tilde{\nu}_B(x). \tag{8}$$

Si A est un ensemble borélien borné :

$$\int_{A\times P} \tilde{f}^*_B(t, x)\,d\nu^\times(t, x) = \lambda(A) . \int \tilde{f}_A(x)\,d\tilde{\nu}_B(x). \tag{9}$$

En effet :

$$\begin{aligned}\int_A d\lambda(t) \int \tilde{f}^*_B(t, x)\,d\nu(x) &= \int_A d\lambda(t) \int f^*(t, x)\,d\tilde{\nu}_B(x)\\ &= \int d\tilde{\nu}_B(x) \int_A f^*(t, x)\,d\lambda(t).\end{aligned}$$

Dans le cas de la mesure invariante μ, les formules (7), (8) et (9) deviennent respectivement :

$$\int f(x)\,d\mu(x) = \int \tilde{f}_B(x)\,d\mu(x), \tag{7'}$$

$$\int_Z f(x)\,d\mu(x) = \int_Z \tilde{f}_B(x)\,d\mu(x), \tag{8'}$$

$$\int_{A\times P} \tilde{f}^*_B(t, x)\,d\mu^\times(t, x) = \lambda(A) . \int f(x)\,d\mu(x). \tag{9'}$$

4) *Cas particulier des fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables.* — Nous avons déjà signalé le fait qu'étant donnée une fonction caractéristique $\chi(x;\, \mathrm{X})$, si on fixe X, on définit une fonction de point; si on fixe x, on définit une fonction d'ensemble qui est en particulier une mesure sur $\mathcal{M}$. Mais la moyenne ergodique sur un ensemble B est la même que l'on considère la fonction caractéristique comme mesure ou comme fonction de point : cela provient du fait que la fonction induite dans I qui est utilisée dans le calcul de la moyenne est la même dans les deux cas (cf. ch. II, § 2, n° 4), c'est la fonction caractéristique de $\mathrm{E}(x,\, \mathrm{X})$; de ceci on déduit d'ailleurs une expression simple pour cette moyenne [qui résulte aussi de (6)] :

$$(10) \qquad \tilde{\chi}_{\mathrm{B}}(x;\, \mathrm{X}) = \frac{\lambda[\mathrm{E}(x;\, \mathrm{X}) \cap \mathrm{B})}{\lambda(\mathrm{B})}.$$

Les formules (2) et (5) deviennent dans ce cas particulier :

$$(11) \qquad \tilde{\chi}_{\mathrm{B}}(\mathrm{T}_t\, x; \mathrm{X}) = \tilde{\chi}_{\mathrm{B}t}(x;\, \mathrm{X}) = \frac{\lambda[\mathrm{E}(x;\, \mathrm{X}) \cap \mathrm{B}t]}{\lambda(\mathrm{B}t)},$$

$$(12) \qquad \tilde{\chi}_{\mathrm{B}}(x;\, \mathrm{T}_t\mathrm{X}) = \tilde{\chi}_{t^{-1}\mathrm{B}}(x;\, \mathrm{X}) = \frac{\lambda[\mathrm{E}(x;\, \mathrm{X}) \cap t^{-1}\mathrm{B}]}{\lambda(\mathrm{B})}.$$

Nous aurions pu prendre (10) comme définition de la moyenne ergodique pour une fonction caractéristique et partant de là obtenir les moyennes pour une fonction de point ou une mesure. En effet la formule (7) appliquée avec

$$\nu(\mathrm{X}) = \chi(x;\, \mathrm{X}),$$

x étant fixé, donne :,

$$\int f(x)\, d\tilde{\chi}_{\mathrm{B}}\,(x) = \int \tilde{f}_{\mathrm{B}}(x)\, d\chi\,(x) = \tilde{f}_{\mathrm{B}}(x)$$

$\tilde{f}_{\mathrm{B}}(x)$ n'est donc autre que l'intégrale de f relative à la mesure $\tilde{\chi}_{\mathrm{B}}(x;\, \mathrm{X})$, x et B étant fixés.

Appliquée avec $f = \chi_{\mathrm{X}}$, c'est-à-dire X étant fixé, (7) donne :

$$\tilde{\nu}_{\mathrm{B}}(\mathrm{X}) = \int \tilde{\chi}_{\mathrm{B}}(x;\, \mathrm{X}) d\nu(x).$$

Si Z est un ensemble mesurable invariant, on a :

$$\tilde{\nu}_{\mathrm{B}}(\mathrm{X} \cap \mathrm{Z}) = \int_{\mathrm{Z}} \tilde{\chi}_{\mathrm{B}}(x;\, \mathrm{X}) d\nu(x).$$

Dans le cas de la mesure invariante μ, on a :

$$\mu(X) = \int \tilde{\chi}_B(x; X) d\mu(x) \qquad \text{et} \qquad \mu(X \cap Z) = \int_Z \chi_B(x; X) d\mu(x)$$

2. — Familles de moyennes ergodiques. Liaison entre convergence des moyennes de mesure et des moyennes de fonction caractéristique. Dérivation dans le cadre ergodique.

Soit J un ensemble ordonné par une relation $\leqslant$ et filtrant pour cette relation. A tout $j \in J$, faisons correspondre un ensemble borélien borné de mesure non nulle de I : B_j. Alors, à toute fonction f définie dans P et $\mathcal{M}$-mesurable, resp. à toute mesure ν définie sur $\mathcal{M}$, nous associons une famille de fonctions, les moyennes $\tilde{f}_{B_j}$, resp. une famille de mesures, les moyennes $\tilde{\nu}_{B_j}$, que nous notons pour simplifier $\tilde{f}_j$, resp. $\tilde{\nu}_j$.

En particulier si nous considérons la fonction caractéristique d'un ensemble X, élément de $\mathcal{M}$, nous avons une famille de moyennes : $\tilde{\chi}_j(x; X)$.

Quel que soit j, $0 \leq \tilde{\chi}_j(x; X) \leq 1$ qui est ν-intégrable sur P puisque ν est totalement finie. Par conséquent si nous supposons que le filtre des sections de J est à base dénombrable, d'après le théorème de convergence bornée de Lebesgue la convergence suivant J presque partout ou en mesure relativement à ν de $\tilde{\chi}_j(X)$ vers une fonction h entraîne la ν-intégrabilité de h et la convergence en moyenne de $\tilde{\chi}_j(X)$ vers h, donc la convergence de $\int \tilde{\chi}_j(x; X) d\nu(x)$ vers $\int h(x) d\nu(x)$. Mais :

$$\int \tilde{\chi}_j(x; X)\, d\nu(x) = \tilde{\nu}_j(X).$$

Nous avons donc le résultat suivant :

THÉORÈME 1. — *Si le filtre des sections de J est à base dénombrable, si ν est une mesure définie sur $\mathcal{M}$, la convergence presque partout ou en mesure relativement à ν et suivant J des moyennes $\tilde{\chi}_j(x; X)$ pour tout $X \in \mathcal{M}$, entraîne la convergence suivant J des moyennes $\tilde{\nu}_j(X)$ pour tout $X \in \mathcal{M}$.*

Remarquons que si $\nu(T_r X) \leq a.\nu(X)$ localement pour presque tout r, $\tilde{\nu}_j(X)$ est inférieure ou égale à $a.\nu(X)$, a étant

une constante. Si cette constante a existe pour tout $X \in \mathcal{M}$ et est indépendante de X, alors la convergence de $\tilde{\nu}_j(X)$ vers une limite $\nu'(X)$ pour tout X entraîne la σ-additivité de cette limite, donc le fait que ν' est une mesure.

Exemple de famille de moyennes ergodiques. Dérivation dans le cadre de la théorie ergodique.

Nous prenons pour J l'ensemble des voisinages boréliens bornés ouverts de e et pour relation $\ll$ la relation d'inclusion, et nous établissons la correspondance $U_j = j$ [21]. La famille $\{U_j\}$ converge vers e suivant J.

Soit f une fonction définie sur P et μ-intégrable. On a alors la famille de moyennes :

$$\tilde{f}_j(x) = \frac{1}{\lambda(U_j)} \int_{U_j} f^*(t, x)\, d\lambda(t).$$

D'autre part, si nous posons :

$$\varphi(B; x) = \int_B f^*(t, x)\, d\lambda(t)$$

$\varphi(B; x)$ est définie pour tout ensemble borélien borné, et ceci pour presque tout x. Donc il existe un ensemble N dans P de μ-mesure nulle tel que pour x fixé n'appartenant pas à N, $\varphi(B; x)$ est une fonction d'ensemble définie sur $\mathcal{B}$, absolument continue par rapport à λ et σ-additive : c'est une mesure de Radon. f^{*x} est un intégrant de Radon-Nikodym pour cette mesure. Donc, pour presque tout x, d'après le théorème 1, § 1, ch. I, $\dfrac{\varphi(U_j t;\, x)}{\lambda(U_j t)}$ converge en mesure suivant J vers f^{*x} sur tout ensemble borélien borné D.

Mais :

$$\frac{\varphi(U_j t; x)}{\lambda(U_j t)} = \tilde{f}_{U_j t}(x) = \tilde{f}^*_{U_j}(t, x) = \tilde{f}^*_j(t, x).$$

Donc, pour presque tout x, on a convergence en mesure suivant J de $(\tilde{f}^*_j)^x$ vers f^{*x} sur tout borélien borné D.

Supposons que dans I, e admette un système fondamental de voisinages à base dénombrable, c'est-à-dire que I satisfasse au premier axiome de dénombrabilité, alors le théorème 1,

[21] On note ici U au lieu de B, pour marquer le fait qu'il s'agit de boréliens ouverts.

§ 3, ch. II s'applique et $\tilde{f}_j$ converge en mesure suivant J vers f sur P.

Comme d'autre part, $\int \tilde{f}_j(x)\,d\mu(x) = \int f(x)\,d\mu(x)$ quel que soit j, il résulte du théorème 3, § 3, ch. II que si en outre f est non-négative, $\tilde{f}_j$ converge en moyenne suivant J vers f sur P.

De la convergence en mesure de $\tilde{\chi}_j(x;\,X)$ vers $\chi(x;\,X)$ pour tout X (ce que l'on pourrait déduire directement du théorème de la densité) résulte la convergence de $\nu_j(X)$ vers $\nu(X)$ quel que soit X, pour toute mesure ν équivalente à μ, par application du théorème 1 de ce paragraphe.

3. — Groupe ergodique. Invariance.

1) *Inégalités concernant les moyennes ergodiques de fonctions caractéristiques. Groupe ergodique.* — Soit X un élément de $\mathcal{M}$. Soient B et B′ deux ensembles de $\mathcal{B}$ bornés et tels que $\lambda(B) = \lambda(B') \neq 0$. De (10), nous tirons :

$$\tilde{\chi}_B(x;\,X) - \tilde{\chi}_{B'}(x;\,X) = \frac{\lambda[E(x;\,X) \cap B] - \lambda[E(x;\,X) \cap B']}{\lambda(B)}$$

donc :

$$|\tilde{\chi}_B(x;\,X) - \tilde{\chi}_{B'}(x;\,X)| \leq \frac{\lambda[E(x;\,X) \cap (B - B')]}{\lambda(B)} \leq \frac{\lambda(B - B')}{\lambda(B)}.$$

Conséquences : Puisque $\tilde{\chi}_B(x;\,T_tX) = \tilde{\chi}_{t^{-1}B}(x;\,X)$ et que $\lambda(t^{-1}B) = \lambda(B)$ quel que soit t :

(13)
$$|\tilde{\chi}_B(x;\,T_rX) - \tilde{\chi}_B(x;\,T_sX)| \leq \frac{\lambda(r^{-1}B - s^{-1}B)}{\lambda(B)} = \frac{\lambda(B - rs^{-1}B)}{\lambda(B)}.$$

Si le groupe est unimodulaire, c'est-à-dire si $\lambda(Bt) = \lambda(B)$ quel que soit t, puisque d'autre part on a $\tilde{\chi}_B(T_tx;\,X) = \tilde{\chi}_{Bt}(x;\,X)$,

$$(14)\qquad |\tilde{\chi}_B(T_rx;X) - \tilde{\chi}_B(T_sx;X)| \leq \frac{\lambda(Br - Bs)}{\lambda(B)} = \frac{\lambda(Brs^{-1} - B)}{\lambda(B)}.$$

Ces inégalités où interviennent les expressions $\dfrac{\lambda(B - tB)}{\lambda(B)}$ et $\dfrac{\lambda(B - Bt)}{\lambda(B)}$ nous amènent à introduire la notion de groupe ergodique.

a) Soit B_j, $j \in J$, une famille d'ensembles boréliens bornés, de mesure non nulle. Pour une telle famille les conditions :

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & \dfrac{\lambda(B_j - B_j \cap B_j t)}{\lambda(B_j)} \to 0 \\ 2) & \dfrac{\lambda(B_j t - B_j \cap B_j t)}{\lambda(B_j)} \to 0 \\ 3) & \dfrac{\lambda(B_j - B_j t)}{\lambda(B_j)} \to 0 \\ 4) & \dfrac{\lambda(B_j \cap B_j t)}{\lambda(B_j)} \to 1 \\ 5) & \dfrac{\lambda(B_j \cup B_j t)}{\lambda(B_j)} \to 1 \end{array}\right\} \text{ suivant J quel que soit } t,$$

sont équivalentes.

En effet : $\dfrac{\lambda(B_j - B_j \cap B_j t)}{\lambda(B_j)} = \dfrac{\lambda(B_j t^{-1} - B_j t^{-1} \cap B_j)}{\lambda(B_j)} . k(t)$, or $k(t)$ est fini quel que soit t, donc 1) et 2) sont équivalentes.

D'autre part :

$$\frac{\lambda(B_j - B_j t)}{\lambda(B_j)} = \frac{\lambda(B_j - B_j \cap B_j t)}{\lambda(B_j)} + \frac{\lambda(B_j t - B_j \cap B_j t)}{\lambda(B_j)}.$$

Donc 3) entraîne 1) et 2). Comme 1) implique 2) et que 1) et 2) entraînent 3), on obtient l'équivalence.

Enfin il suffit de remarquer pour les deux dernières que :

$$\frac{\lambda(B_j \cap B_j t)}{\lambda(B_j)} = 1 - \frac{\lambda(B_j - B_j \cap B_j t)}{\lambda(B_j)}, \quad \frac{\lambda(B_j \cup B_j t)}{\lambda(B_j)} = 1 + \frac{\lambda(B_j - B_j \cap B_j t)}{\lambda(B_j)}.$$

b) Pour qu'il existe une famille B_j satisfaisant à ces conditions, il est nécessaire que le groupe soit unimodulaire.

En effet :

$$k(t) = \frac{\lambda(B_j t)}{\lambda(B_j)} \leq 1 + \frac{\lambda(B_j t - B_j \cap B_j t)}{\lambda(B_j)}.$$

ceci ayant lieu quel que soit j et quel que soit t, on en déduit que $k(t) \leq 1$ quel que soit t. Or $k(t^{-1}) = \dfrac{1}{k(t)}\cdot$ Donc $k(t) = 1$ quel que soit t.

c) Pour une famille $\{B_j\}$ les conditions que l'on déduit des conditions 1) à 5) en remplaçant $B_j t$ par $t B_j$ sont aussi équi-

valentes. Remarquons que si le groupe est abélien ou si les B_j sont symétriques quel que soit j, ces nouvelles conditions ne sont pas distinctes des précédentes.

Définitions : 1) J étant un ensemble ordonné par une relation $\ll$ et filtrant pour cette relation, $\{B_j\}$, $j \in J$, une famille d'ensembles boréliens bornés de mesure non nulle, nous disons que cette famille est *ergodique* si $\dfrac{\lambda(B_j - B_j t)}{\lambda(B_j)}$ et $\dfrac{\lambda(B_j - tB_j)}{\lambda(B_j)}$ tendent vers zéro (22) suivant J quel que soit t.

2) Un groupe topologique localement compact est dit *ergodique* s'il admet au moins une famille ergodique d'ensembles (23). Un tel groupe est nécessairement unimodulaire.

Remarque. — Si $\{B_j\}$, $j \in J$, est une famille ergodique et si J′ est un sous-ensemble cofinal (24) de J, $\{B_{j'}\}$, $j' \in J'$, est encore une famille ergodique.

2) *Invariance.* — Soit $\{B_j\}$, $j \in J$, une famille ergodique d'ensembles. Considérons les familles correspondantes de moyennes de fonctions caractéristiques. Des inégalités (13) et (14) et de la définition d'une famille ergodique, il résulte que :

$$|\tilde{\chi}_j(T_r x;\, X) - \tilde{\chi}_j(T_s x;\, X)| \to 0 \text{ suivant J}$$

et que
$$|\tilde{\chi}_j(x;\, T_r X) - \tilde{\chi}_j(x;\, T_s X)| \to 0 \text{ suivant J.}$$

Par conséquent :

$$\limsup_{j \in J} \tilde{\chi}_j(T_t x;\, X) = \limsup_{j \in J} \tilde{\chi}_j(x;\, X) = \limsup_{j \in J} \tilde{\chi}_j(x;\, T_t X)$$

c'est-à-dire que $\limsup\limits_{j \in J} \tilde{\chi}_j(x;\, X)$ est doublement invariante par les transformations T_t. Il en est de même pour la limite inférieure.

Dire que $\tilde{\chi}_j(x;\, X)$ converge presque partout relativement à une mesure ν définie sur $\mathcal{M}$, quel que soit X, cela revient à dire

(22) Remarquons que pour la famille $\{U_j\}$ contractant vers e considérée dans le cas de la dérivation, ces rapports rendent vers 2 : O et 2 sont les valeurs extrêmes qu'ils peuvent prendre.

(23) Nous avons été amenés à donner ces définitions sans connaître le travail de Calderon. Elles sont d'ailleurs en un sens plus générales que celles de [5] qui sont adaptées au cas où l'ensemble J est la droite numérique, alors qu'ici J est quelconque.

(24) Un sous-ensemble J′ de J est dit *terminal* s'il existe un $j_0 \in J$ tel $j_0 \ll j$ implique $j \in J'$, et *cofinal* si son complément dans J n'est pas terminal. (Cf. Krickeberg).

qu'il existe un ensemble N(X) de ν-mesure nulle et une fonction $h(x; \mathrm{X})$ tels que :

$$h(x; \mathrm{X}) = \limsup_{j \in \mathrm{J}} \tilde{\chi}_j(x; \mathrm{X}) = \liminf_{j \in \mathrm{J}} \tilde{\chi}_j(x; \mathrm{X}) \quad \text{sauf si } x \in \mathrm{N}(\mathrm{X}).$$

De la double invariance des limites supérieure et inférieure, on déduit que, quel que soit X, d'une part N(X) est un ensemble invariant :

$$\mathrm{N}(\mathrm{T}_t\mathrm{X}) = \mathrm{N}(\mathrm{X})$$

et d'autre part : $h(\mathrm{T}_t x; \mathrm{X}) = h(x; \mathrm{X}) = h(x; \mathrm{T}_t\mathrm{X})$ sauf peut-être si $x \in \mathrm{N}(\mathrm{X})$. Mais d'après le théorème 1 du § précédent, si J est à base dénombrable $\tilde{\nu}_j(\mathrm{X})$ converge pour tout X vers $\nu'(\mathrm{X}) = \int h(x; \mathrm{X})\, d\nu(x)$ qui est donc invariante.

Réunissant les divers résultats obtenus, nous pouvons énoncer la conclusion suivante :

Soit ν *une mesure définie sur* $\mathcal{M}$, *positive et totalement finie et telle que :* $\nu(\mathrm{T}_t\mathrm{X}) \leq a.\nu(\mathrm{X})$ *quels que soient t et* X, *a étant une constante indépendante de t et* X; *soit* J *un ensemble filtrant à base dénombrable et* $\{\mathrm{B}_j\}$, $j \in \mathrm{J}$, *une famille ergodique d'ensembles, si les moyennes de fonctions caractéristiques* $\tilde{\chi}_j(x; \mathrm{X})$ *convergent presque partout relativement à* ν *sur* P *pour tout* X, *alors les moyennes* $\tilde{\nu}_j(\mathrm{X})$ *convergent suivant* J *pour tout* X *vers une mesure invariante* $\mu(\mathrm{X})$.

Remarquons que ce résultat implique l'équivalence de ν et de μ.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Blanc-Lapierre, P. Casal et A. Tortrat. *Méthodes Mathématiques de la Mécanique Statistique*, Masson et Cie, Paris (1958).

[2] J. Boclé. Théorèmes de convergence en théorie ergodique. Application au cas de la différentiation. *C.R. Ac. Sc.*, Paris, **245**, pp. 1770-1772 (1957).

[3] J. Boclé. Sur l'existence d'une mesure invariante par un groupe de transformations. *C.R. Ac. Sc.*, Paris, **247**, pp. 798-800 (1958).

[4] J. Boclé. Théorèmes de dérivation globale dans les groupes topologiques localement compacts. *C.R. Ac. Sc.*, Paris, **248**, pp. 2063-2065 (1959).

[5] A. P. Calderon. A general ergodic theroem. *Annals of Math.*, **58**, 1 (1953).

[6] A. P. CALDERON. Sur les mesures invariantes. *C.R. Ac. Sc.*, Paris, **240**, pp. 1960-1962 (1955).
[7] M. COTLAR. Sobre los Fundamentos de la Teoria Ergodica. *Symposium sobre Problemos Matematicos. U.N.E.S.C.O.*, Punta del Este (1951).
[8] P. R. HALMOS. Measure Theory. *Van Nostrand Cy*, New-York (1950).
[9] P. R. HALMOS. Measurable Transformations. *Bul. of the A.M.S.*, **55**, pp. 1015-1034 (1949).
[10] P. R. HALMOS. Lectures on Ergodic Theory. *Publication of the Mathematical Society of Japan* (1956).
[11] E. HOPF. Ergodentheorie. *Chelsea Publ. Cy*, New-York (1948).
[12] S. KAKUTANI. Ergodic Theory. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, vol. II (1950).
[13] K. KRICKEBERG. Stochastische Derivierte. *Math. Nachr.*, **18**, pp. 203-217 (1958).
[14] C. Y. PAUC. Contributions à une théorie de la différentiation des fonctions d'intervalle sans hypothèse de Vitali. *C.R. Ac. Sc.*, Paris, **236**, pp. 1937-1939 (1953).
[15] C. Y. PAUC. Dérivés et Intégrants-Fonctions de cellules. Conférences faites au Centre Mathématique International de Varenna du 15 au 25 août 1954. *Pub. Math. Institute*, Rome.
[16] C. Y. PAUC et D. RUTOVITZ. Theory of Ward for Cell Functions. *Annali di Matematica pura ed applicata* (IV), **47**, pp. 1-58 (1959).
[17] F. RIESZ. Sur la théorie ergodique. *Comment. Math. Helv.* **17**, pp. 221-239 (1945).
[18] S. TSURUMI. On the ergodic theorem. *Tôhoku Mathematical Journal*, II, Ser. 6, pp. 264-273 (1954).
[19] A. WEIL. L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications. *Act. Sc. et Ind.*, **1145** (2e éd.), Hermann, Paris (1951).
[20] N. WIENER. The ergodic theorem. *Duke Math. Journ.*, **5**, pp. 1-18 (1939) *Thèse*, Fac. Sciences, Rennes, 1959.

(*Thèse*, *Fac. Sciences*, Paris, 1959.)

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
10 (1960), 47-60.

QUELQUES REMARQUES SUR LES APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES D'UNE SURFACE DANS LE PLAN

par André HAEFLIGER
(Institute for Advanced Study, Princeton.)

I. — INTRODUCTION.

Soit f une application différentiable d'une surface V dans une surface W; par surface (ou variété) nous entendrons toujours une surface (ou variété) munie d'une structure différentiable, et différentiable signifiera toujours de classe C^∞. On dit qu'un point z de V est un point *régulier* de f si le rang de f en z est deux, et un point *singulier* si ce rang est plus petit que deux. Au voisinage d'un point régulier, f est un homéomorphisme différentiable de rang deux (difféomorphisme).

H. Whitney a montré dans [2] que toute application de V dans W pouvait être approchée par une application différentiable f, dite *excellente*, qui présente comme seuls points singuliers z ceux des deux types suivants : après choix de coordonnées locales convenables (x, y) dans V et (u, v) dans W, les coordonnées de z étant $(0, 0)$, f s'exprime localement sous la forme

$$1) \qquad u = x, \qquad v = y^2$$

ou

$$2) \qquad u = x, \qquad v = xy - y^3.$$

Les points singuliers de type 1) et 2) forment une courbe C dans V appelée le *pli* de f (défini localement dans les équations 1) par $y = 0$) où le rang de f est un. Les points du type 2) sont les *cusps* de f; ce sont les points isolés sur le pli C où le rang de la restriction de f à C est zéro; les images par f des cusps sont les points de rebroussement de f(C); dans les équations 2), le pli C est défini par $x = 3y^2$ et $f(C)$ par $4u^3 = 27v^2$. Sur la figure 1, on a représenté en trait gras le

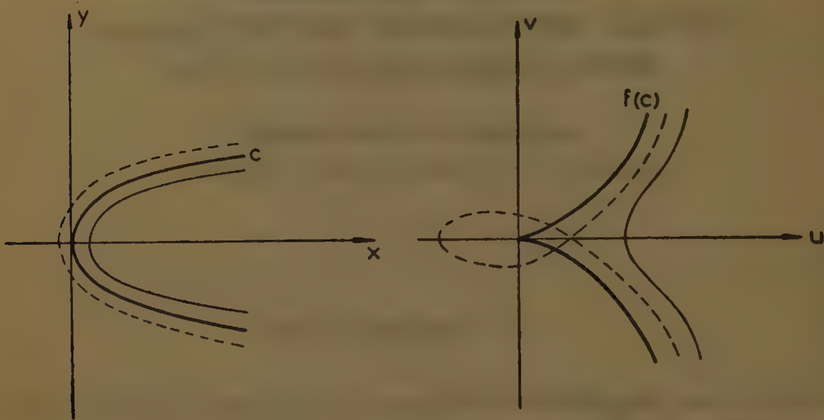


Fig. 1.

pli C et son image au voisinage d'un cusp, en trait fin ou pointillé deux courbes parallèles à C et leurs images par f.

Nous donnons d'abord au § 2 un critère (Théorème 1) permettant de décider si une application excellente d'une surface dans le plan peut être obtenue en considérant d'abord la surface immergée dans l'espace à 3 dimensions, et en la projetant ensuite dans un plan parallèlement à une direction.

Dans le § 3 nous considérons une application excellente d'une surface compacte V orientable dans le plan. D'après Thom (cf. [1]) la classe d'homologie modulo 2 du pli C de f est nulle et le nombre des cusps est pair. Dans le théorème 2 nous établissons, dans un cas particulier, une relation entre le nombre des cusps de f et la position de C dans V.

Étant donnée une courbe C d'une surface compacte V et une application différentiable f_0 de C dans le plan telle que $f_0(C)$ présente un nombre fini de points de rebroussement,

on peut se demander à quelles conditions f_0 peut se prolonger suivant une application différentiable f de V dans le plan telle que C soit le pli de f. Cette question se ramène essentiellement au problème suivant : donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une immersion f_0 dans le plan du bord C d'une surface compacte orientée V puisse se prolonger suivant une immersion de V. Ce problème semble très difficile, déjà dans le cas où V est un disque (problème posé par Hopf). Une première condition nécessaire bien connue est que l'indice de la courbe $f_0(C)$ par rapport à tout point du plan doit être positif ou nul; une deuxième condition est que le degré normal de $f_0(C)$ doit être égal à la caractéristique d'Euler-Poincaré de V (cf. § 4, Th. 3). Ces conditions ne sont pas suffisantes.

A la fin de chaque paragraphe, nous indiquons brièvement comment les propriétés démontrées dans le cas des surfaces peuvent se généraliser à des variétés de plus grande dimension.

Dans les figures représentant une application excellente f d'une surface V dans le plan, la courbe grasse représente l'image du pli C de f (*contour apparent*) et les traits fins continus et pointillés représentent les images de deux courbes sur V parallèles à C et de chaque côté de C.

II. — FACTORISATION PAR UNE IMMERSION

Nous dirons qu'une application d'une surface V dans le plan R^2 de coordonnées (u, v) peut se factoriser par une immersion dans l'espace numérique à 3 dimensions R^3 de coordonnées (u, v, w) s'il existe une immersion g de V dans R^3 telle que $f = pg$, où p est la projection naturelle $(u, v, w) \to (u, v)$ de R^3 sur R^2.

Théorème 1. — *Une application excellente f d'une surface* V *compacte dans le plan* R^2 *peut se factoriser par une immersion g dans* R^3 *si et seulement si sur chaque composante connexe* C_i *du pli* C *de f le nombre des cusps est pair ou impair suivant que* C_i *admet un voisinage orientable ou non.*

Ainsi dans le cas d'une surface orientable, il faut et il suffit que le nombre des cusps soit pair sur chaque composante connexe de C.

La figure 2 montre un exemple d'une application d'une sphère dans le plan qui ne peut se factoriser par une immersion. Le pli est formé de deux parallèles C' et C'' contenant chacun un cusp; l'image d'une bande bordée par deux parallèles entre C' et C'' est un ruban en forme de huit bordé par les

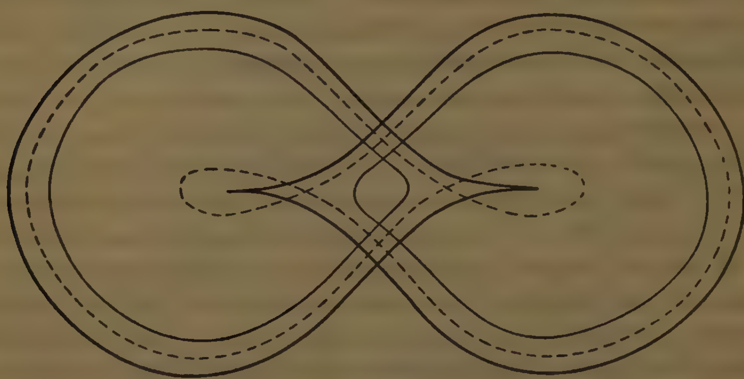


Fig. 2.

deux courbes pointillées; les courbes représentées par un trait fin continu sont les images de parallèles bordant des calottes polaires.

Désignons par $\dot{f}$ le prolongement de f aux vecteurs tangents à V. La restriction de $\dot{f}$ à l'espace des vecteurs tangents à V en un point z de C est une application linéaire dont le noyau $N(z)$ est un sous-espace vectoriel de dimension un; on a donc le long de C un champ N de directions (non orientées) : le champ des noyaux de $\dot{f}$.

Le théorème 1 est une conséquence des deux lemmes suivants :

Lemme 1. — *Le nombre des cusps sur une composante* C_0 *du pli de* f *est pair si un voisinage suffisamment petit de* C_0 *et le champ des noyaux* N_0 *de* $\dot{f}$ *le long de* C_0 *sont tous deux orientables ou non orientables, impair si l'un est orientable et l'autre pas.*

Lemme 2. — *L'application excellente* f *de* V *dans* R^2 *peut se factoriser par une immersion* g *dans* R^3 *si et seulement si le champ* N *des noyaux de* $\dot{f}$ *le long de* C *est orientable.*

Démonstration du lemme 1. — On peut choisir un voisinage U de C_0 difféomorphe au quotient du plan $R^2(x, y)$ par la relation d'équivalence associée à l'action du groupe G engendré par la transformation $x' = x + 1$, $y' = y$ ou $y' = -y$ suivant que U est orientable ou non, le quotient de la droite $d : y = 0$ étant difféomorphe à C_0. Le champ N_0 le long de C_0 se relève suivant un champ D de directions dans R^2 le long de d invariant par G.

Choisissons une orientation de la direction du champ D à l'origine et prolongeons-la par continuité à D; nous obtenons ainsi un champ $\hat{D}$ de directions orientées le long de d. Soit $n_2(x)$ la projection sur l'axe $x = 0$ du vecteur unitaire définissant la direction orientée du champ $\hat{D}$ au point $(x, 0)$. Les points $(x, 0)$ de d où D est tangent à d, c'est-à-dire où $n_2(x) = 0$, correspondent aux cusps sur C_0; on vérifie qu'en ces points, en revenant aux équations locales d'un cusp, on a $dn_2(x)/dx \neq 0$. Si U et N_0 sont tous deux orientables ou non, alors $n_2(1) = n_2(0)$; si U est orientable et N_0 ne l'est pas ou inversement, alors $n_2(1) = -n_2(0)$. Ainsi le nombre de cusps sur C_0, c'est-à-dire le nombre de zéros de $n_2(x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$, est pair dans le premier cas et impair dans le second.

Démonstration du lemme 2. — Si l'immersion g existe, alors la fonction coordonnée w sur V (c'est-à-dire la fonction wg) est telle que, pour tout point z de V, l'intersection des noyaux de $\dot{f}$ et $\dot{w}$ en tout point z de V est le vecteur zéro, et réciproquement. Ceci équivaut à dire que la fonction w est régulière en tout point z de C et que la tangente à la ligne de niveau de w en z est transverse au noyau $N(z)$ de f.

Considérons une métrique riemannienne sur V. Si une telle fonction w existe sur V, alors le gradient de w en tout point z de C n'est jamais orthogonal au noyau $N(z)$ de f; sa projection orthogonale sur $N(z)$ n'est donc jamais nulle et définit une orientation de $N(z)$.

Réciproquement supposons le champ N orientable. Reprenon la représentation et les notations de la démonstration du lemme 1. Soit $n_1(x)$ la projection sur l'axe $y = 0$ du vecteur unitaire définissant la direction orientée du champ $\hat{D}$ au point $(x, 0)$. Comme N est orientable, $n_1(x)$ est une fonction de

période 1. On peut l'approcher par une fonction différentiable $n'(x)$ de période 1 ayant un nombre fini de zéros sur l'intervalle $[0, 1[$ et une dérivée non nulle en ces points; il en résulte que $n'(x)$ s'annule un nombre pair de fois sur cet intervalle; on peut supposer ce nombre positif, $n'(x)$ devant être assez proche de $n_1(x)$ pour que les vecteurs $(n_1(x), n_2(x))$ et $(n'(x), n_2(x))$ ne soient jamais orthogonaux. On peut construire une fonction différentiable $r(x)$ de période 1 telle que

$$dr(x)/dx = a(x)n'(x),$$

où $a(x)$ est une fonction différentiable non nulle. Alors le gradient de la fonction $h(x, y) = a(x)n_2(x)y + r(x)$ n'est jamais orthogonal au champ D; comme cette fonction est invariante par le groupe G, elle définit par passage au quotient une fonction différentiable w_0 dans le voisinage U de C_0 dont les lignes de niveau sont transverses au champ N_0 en tout point de C_0. Répétant cette construction pour chaque composante connexe C_i de C, et utilisant le théorème d'extension de Whitney, on construira une fonction différentiable w sur V qui coïncide avec les fonctions construites w_i dans un voisinage des C_i.

Corollaire. — *Soit f une application excellente d'une surface* V *dans le plan telle que le pli* C *de f soit connexe. Alors f peut toujours se factoriser par une immersion dans* R^3.

Démonstration. — Considérons un voisinage tubulaire U de C. Suivant que U est orientable ou non, U est un ruban simple ou un ruban de Möbius et la frontière de U se compose de deux cercles dans le premier cas et d'un seul dans le second. La caractéristique d'Euler-Poincaré χ (U) de U est toujours zéro. Le complémentaire S de U est immergé dans le plan; c'est donc une surface orientable dont la caractéristique χ (S) sera pair ou impair suivant que son bord se compose de deux cercles ou d'un seul. Donc $\chi(V) = \chi(U) + \chi(S)$ sera pair ou impair suivant que U est orientable ou non; mais d'après Thom [1], le nombre de cusps est de même parité que $\chi(V)$ et le théorème 1 implique donc bien le corollaire.

Généralisation. — Toute application d'une variété V de dimension $n > 2$ dans l'espace euclidien R^{2n-2} peut être approchée par une application différentiable f, qui peut être aussi

appelée *excellente*, dont les points singuliers forment une courbe C : en chaque point z de C, le rang du prolongement de f aux vecteurs tangents à V en z est $n - 1$ et le noyau N(z) de cette application est un sous-espace vectoriel de dimension un qui n'est pas tangent à C en z. (Cf. [3]).

Comme précédemment (lemme 2), on montre qu'une application excellente f d'une variété V de dimension n dans R^{2n-2} peut se factoriser par une immersion dans R^{2n-1} si et seulement si le champ des noyaux N de f le long de C est orientable. En général, si V est compacte, on peut orienter N sauf en un nombre fini de points qui représentent un cycle homologue à zéro dans V, car il est dual à la n-ème classe de Stiefel-Whitney normale de V qui est toujours nulle. Donc si C est connexe, on peut orienter B et la généralisation du lemme 2 donne le

Corollaire bis. — *Soit f une application excellente d'une variété de dimension n dans l'espace euclidien R^{2n-2} telle que la courbe des points singuliers de f soit connexe. Alors f peut toujours se factoriser par une immersion dans R^{2n-1}.*

Remarques 1. — Une construction analogue à celle du lemme 2 montre qu'on pourra factoriser toute application excellente f de V dans R^{2n-2} par une application dans R^{2n-1} qui présente autant de points cuspidaux qu'il y a de composantes connexes de C le long desquelles le champ N est non orientable.

2. — Si l'on considère R^{2n-2} comme un sous-espace linéaire de R^{2n-1}, les mêmes critères s'appliquent pour décider si l'application f de V dans R^{2n-2} peut être approchée, avec approximation sur les dérivées d'ordre $\leqslant 2$, par une immersion dans R^{2n-1}.

III. — SUR LE NOMBRE DES CUSPS

Théorème 2. — *Soit f une application excellente d'une surface compacte orientable V dans le plan. Supposons que le pli C de f partage V en deux parties V_1 et V_2 dont C est la frontière commune. Alors le nombre des cusps de f est au moins égal à la différence des caractéristiques d'Euler-Poincaré de V_1 et V_2.*

Démonstration. — Rappelons tout d'abord que, d'après Morse, on peut évaluer la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(S)$ d'une surface S à bord B en comptant convenablement les points singuliers d'une fonction différentiable h sur S. Soient (x, y) des coordonnées locales au voisinage d'un point z de B telles que S soit défini par $y \geqslant 0$ et B par $y = 0$; exprimée dans ces coordonnées, h est la restriction au demi-plan $y \geqslant 0$ d'une fonction différentiable h'. Si une ligne de niveau de h' est tangente à B en z avec un contact du premier ordre, la contribution de z pour le calcul de $\chi(S)$ sera non nulle seulement si le gradient de h' en z est dirigé vers l'intérieur de S et elle sera $+1$ ou -1 suivant que la restriction de f à B a un minimum ou un maximum en z.

Soit alors h une fonction linéaire dans le plan telle que $f(C)$ ne soit tangent aux lignes de niveau de h qu'en des points isolés distincts des images des cusps. Soit $h_i (i = 1,2)$ la restriction de hf à V_i. Un point z de V_i sera un point singulier de h_i seulement si $z \in C$ et si $a)$ $f(C)$ est tangent en $f(z)$ à une ligne de niveau de h, ou $b)$ z est un cusp, car en un tel point le rang de la restriction à C de f (et par suite de hf) est zéro.

Dans le cas $a)$, la contribution de z sera la même par symétrie pour le calcul de $\chi(V_1)$ et $\chi(V_2)$. Dans le cas $b)$, le gradient de hf en z est dirigé vers l'intérieur de l'une des surfaces V_1 et V_2 et vers l'extérieur de l'autre; la contribution de z sera donc ± 1 pour l'une des surfaces et zéro pour l'autre, d'où l'inégalité.

Remarque. — Si l'on a orienté la surface V et le pli C au voisinage d'un cusp z, on peut donner un signe à ce cusp par la convention suivante : z sera positif si l'orientation de V est définie par la tangente orientée de C en z et la normale à C en z dirigée vers l'intérieur de C (c'est-à-dire dans le sens de l'axe des x positifs dans la représentation locale 2) du § 1).

Orientons alors la surface à bord V_1 et la courbe C comme le bord de V_1; soit n_1 le nombre des cusps positifs, n_2 celui des cusps négatifs (un cusp z est positif si, au voisinage de z, V_1 est à l'intérieur de C). On a alors la formule : $\chi(V_1) - \chi(V_2) = n_1 - n_2$.

Exemples. — 1) *Si la surface* V *est un tore et si le pli* C *de* f *est connexe,* alors C borde un disque sur V et

$|\chi(V_1) - \chi(V_2)| = 2$; donc f *présente au moins deux cusps.* Les figures 3 et 4 montrent une telle situation avec le minimum

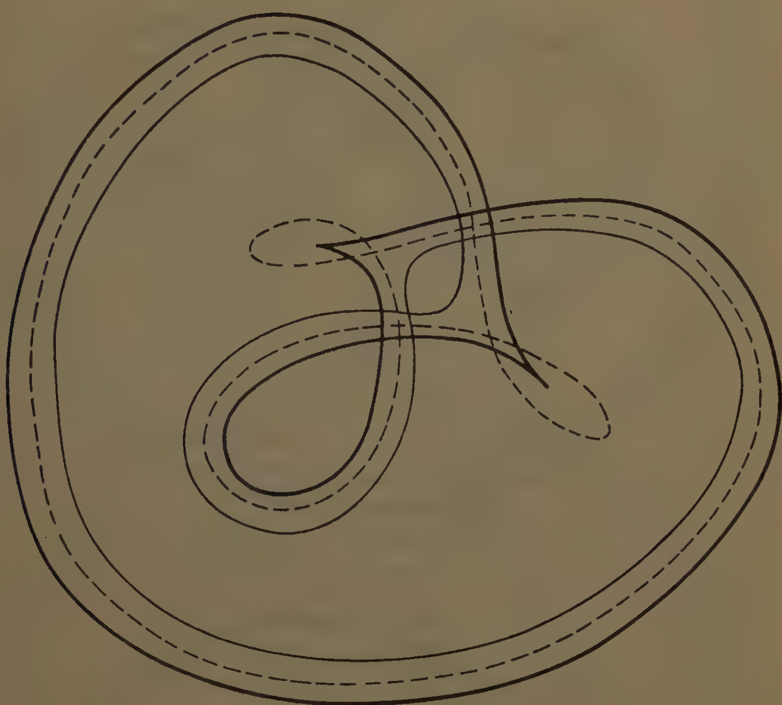


FIG. 3.

de cusps : le trait fin continu borde un disque et le trait pointillé borde le complémentaire d'un disque dans le tore (c'est-à-dire un disque avec deux anses entrecroisées, comme dans la figure 5).

2) V est une surface de genre deux (sphère à deux anses). En généralisant les figures 3 et 4, on peut construire une application de V dans le plan dont le pli borde un disque avec le minimum de 4 cusps.

Dans la figure 5, le pli est à la « taille » de V et partage ainsi la surface en deux tores troués symétriques.

Enfin la figure 6 montre un exemple où le pli C est formé de deux courbes qui bordent d'une part un morceau d'anse (cylindrique) et d'autre par un tore percé de deux trous.

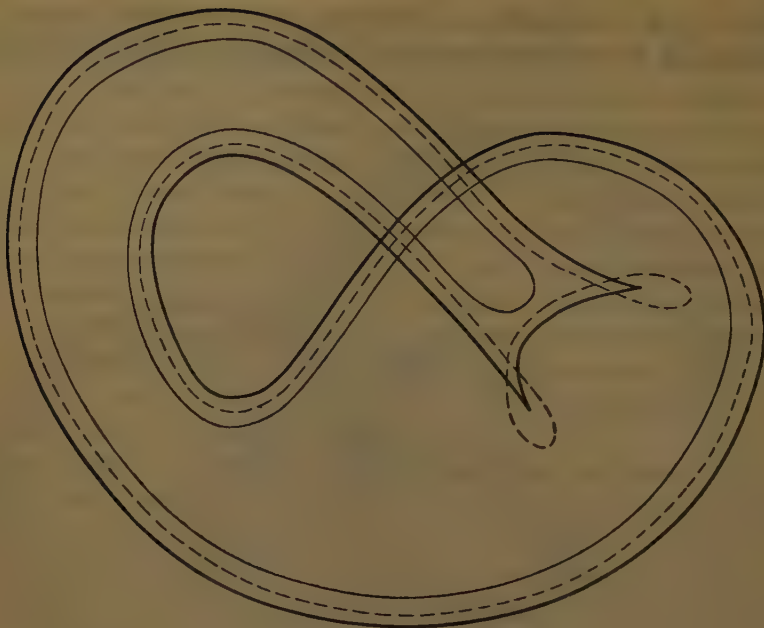


FIG. 4.

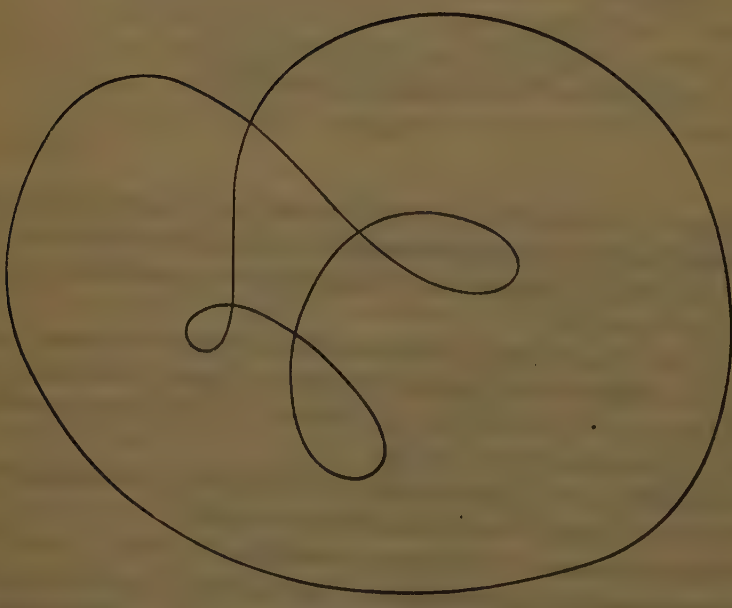


FIG. 5.

Dans tous ces exemples, l'application peut se factoriser par une immersion dans R^3.

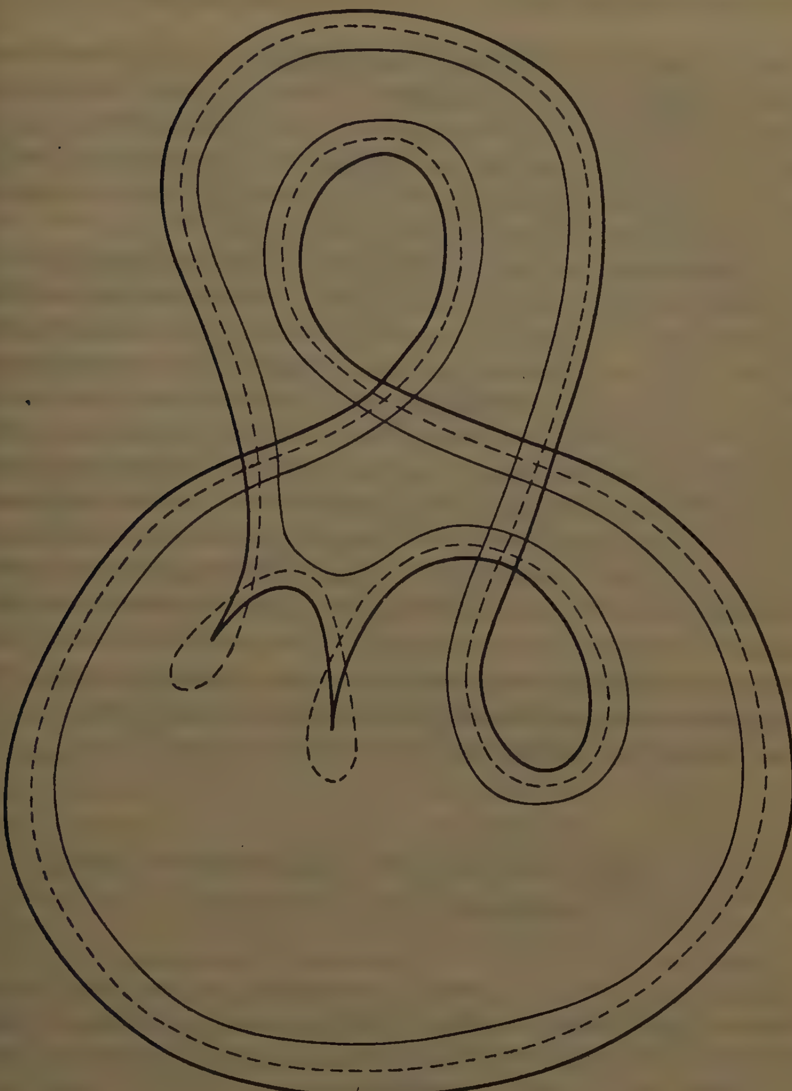


Fig. 6.

Généralisation. — On sait, d'après Thom (cf. [1]) et Whitney (cf. [3]), que toute application dans R^3 d'une variété V de dimension 3 peut être approchée par une application

différentiable f, dite *excellente*, dont les points singuliers sont de types S_1, $S_1^{(2)}$ et $S_1^{(3)}$ et où f est défini localement par les équations données dans [3], § 19 (au moins à l'ordre 4).

THÉORÈME 2 bis. — *Soit f une application excellente d'une variété compacte V de dimension 3 dans le plan. Supposons que la surface des points singuliers de f partage V en deux parties V_1 et V_2 dont elle est la frontière commune. Alors le nombre des points singuliers de f de type $S_1^{(3)}$ est au moins égal à la valeur absolue de $\chi(V_1)-\chi(V_2)$.*

La démonstration est semblable à celle du théorème 2. On choisit dans R^3 une fonction linéaire h telle que les variétés de niveau de h coupent « génériquement » $f(V)$ et on évalue $\chi(V_1)$ et $\chi(V_2)$ en comptant les points singuliers des restrictions de hf à V_1 et V_2. La différence des contributions d'un point $z \in V_1 \cap V_2$ dans le calcul de $\chi(V_1)$ et $\chi(V_2)$ sera non nulle seulement si z appartient à la courbe C des points singuliers de type $S_1^{(2)}$ de f et si la restriction de hf à C a un minimum ou un maximum en z; dans le premier cas cette différence est -1, et dans le second $+1$. Ainsi la différence des caractéristiques de V_1 et V_2 sera au moins égale à la somme des différences du nombre des maximas et des minimas de hf sur chaque composante connexe de C; cette somme est elle-même au moins égale au nombre des points de rebroussement de $f(C)$, c'est-à-dire au nombre des points de type $S_1^{(3)}$ de f.

IV. — DEGRÉ NORMAL DU BORD D'UNE SURFACE IMMERGÉE DANS LE PLAN.

Soit V une surface à bord C immergée par une application différentiable f dans le plan. L'orientation naturelle du plan induit une orientation sur V; orientons alors C comme le bord de V.

C est une réunion de cercles orientés $C_1, \ldots, C_k$. Soit n_i le nombre de tours que fait la normale (ou la tangente) à C_i lorsqu'on fait une fois le tour de C_i dans le sens de son orientation. L'entier somme des $n_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ sera appelé le *degré normal* de C immergé par f.

THÉORÈME 3. — *Le degré normal du bord d'une surface* V *compacte immergée dans le plan est égal à la caractéristique d'Euler-Poincaré de* V.

Démonstration. — On considère une fonction linéaire h dans le plan telle que $f(C)$ soit tangent aux lignes de niveau de h en un nombre fini de points et avec un contact d'ordre 1. Pour tout point z de C, soit $\nu(z)$ la normale unité à $f(C)$ en $f(z)$ orientée de manière à ce que la tangente orientée à $f(C)$ en z et $\nu(z)$ définissent l'orientation positive du plan (autrement dit $\nu(z)$ est dirigé vers l'intérieur de $f(V)$). L'application ν de C dans le cercle unité S^1 est différentiable et le point η correspondant à la direction du gradient de h est une valeur régulière de ν (c'est-à-dire que le rang de ν en tout point z où $\nu(z) = \eta$ est un). Donc le degré normal, qui n'est autre que le degré de ν, est égal à la somme algébrique des points z de C tels que $\nu(z) = \eta$, le point z étant compté positivement ou négativement suivant que ν en z applique l'orientation de C sur l'orientation de S^1 ou sur son opposée; ceci équivaut à dire que la restriction de hf à C a un minimum ou un maximum en z. Cette somme est donc aussi égale à la caractéristique de V (cf. démonstration du théorème 2).

Généralisation. — Soit V une variété compacte de dimension n à bord C immergée par f dans l'espace numérique R^n. Comme précédemment V est munie de l'orientation induite par celle de R^n et C est orienté comme le bord de V. Si à chaque point z de C on fait correspondre la normale unité à $f(C)$ en $f(z)$ orientée du côté de $f(V)$, on obtient une application ν de C dans la sphère unité S^{n-1}; le *degré normal* de C immergé par f sera la somme des degrés des restrictions de ν à chaque composante connexe de C. La même démonstration donne le même résultat :

THÉORÈME 3 bis. — *Le degré normal du bord d'une variété compacte* V *de dimension n immergée dans* R^n *est égal à* $\chi(V)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Thom, *les singularités des applications différentiables*, Annales de l'Institut Fourier, VI (1956), pp. 43-87.

[2] H. Whitney, *on singularities of mappings of Euclidean spaces*, I, *Mappings of the plane into the plane*, Ann. of Math., 62 (1955), pp. 374-410.

[3] H. Whitney, *Singularities of mappings of euclidean spaces*, Symposium Internacional de Topologia Algebraica, 1958, Mexico.

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
10 (1960), 61-151.

PHÉNOMÈNES DE PERTURBATION SINGULIÈRE DANS LES PROBLÈMES AUX LIMITES

par **Denise HUET** (Dijon).

INTRODUCTION

Initialement, notre but était l'étude des deux problèmes suivants, où Ω désigne un ouvert de R^n, et ε un paramètre réel strictement positif.

Problème 1. — Étant donnés deux opérateurs différentiels A et B, avec ordre de A supérieur à ordre de B, que fait, quand $\varepsilon \to 0$, la solution d'un problème aux limites sur Ω, relatif à $(\varepsilon A + B)u_\varepsilon = f$, où f est donnée. En particulier, u_ε converge-t-elle vers la solution u d'un problème aux limites relatif à $Bu = f$.

Problème 2. — Désignant par t une variable réelle $\geqslant 0$, par D l'opérateur $(\partial/\partial t)$, par $A(t)$ et $B(t)$ deux opérateurs différentiels en x, $(x \in R^n)$, dépendants du temps, avec ordre de $A(t)$ supérieur à ordre de $B(t)$ pour chaque t, que fait, lorsque $\varepsilon \to 0$, la solution u_ε d'un problème de type mixte relatif à $(\varepsilon A(t) + B(t))u_\varepsilon + Du_\varepsilon$ (resp. $D^2u_\varepsilon) = f$, où f est donnée. En particulier, u_ε converge-t-elle vers la solution u d'un problème de type mixte, relatif à $B(t)u + Du$ (resp. $D^2u) = f$.

Pour étudier ces deux problèmes qui entrent dans un nombre important de problèmes de physique mathématique et de mécanique, (cf. Friedrichs [2]) nous avons utilisé systématiquement la méthode de résolution des problèmes aux limites de M. Lions (voir la bibliographie). Ceci nous a amenés à faire entrer les problèm es 1 et 2dans des problèmes plus généraux :

Problème 1 *bis.* — Étant donnés une famille d'opérateurs B_ε et un opérateur B, à quelles conditions la solution d'un problème aux limites relatif à $B_\varepsilon u_\varepsilon = f$, converge-t-elle, vers la solution d'un problème aux limites relatif à $Bu = f$.

Problème 2 *bis.* — Étant donnés un opérateur dépendant du temps $B(t)$ et une famille d'opérateurs dépendants du temps $B_\varepsilon(t)$, à quelles conditions la solution d'un problème mixte relatif à $B_\varepsilon(t)u_\varepsilon + Du_\varepsilon$ (resp. D^2u_ε) $= f$ converge-t-elle vers la solution d'un problème mixte relatif à $Bu + Du$ (resp. $D^2u) = f$.

Le chapitre I étudie le problème 1 *bis* et le chapitre II le problème 2 *bis.*

Chapitre 1.

Après avoir rappelé au n° 1, la méthode de résolution des problèmes aux limites de M. Lions, nous établissons au n° 2, les théorèmes de convergences. On se donne trois espaces de Hilbert, V, W, et H, avec $V \subset W \subset H$, et V dense dans H. On désigne par $\overline{V}_{(W)}$ l'adhérence de V dans W, muni de la topologie induite par W. On prend sur V (resp. W) une famille de formes sesquilinéaires continues $b(\varepsilon; u, v)$ (resp. une forme sesquilinéaire continue $b(u, v)$), qui définit une famille d'opérateurs B_ε (resp. un opérateur B), soit N_ε (resp. N_B) l'espace attaché à $b(\varepsilon; u, v)$ sur V (resp. à $b(u, v)$ sur $\overline{V}_{(W)}$). Le théorème 1. 2, (resp. 1. 3) établit la convergence dans W faible (resp. W fort) de u_ε solution de $B_\varepsilon u_\varepsilon = f$, $u_\varepsilon \in N_\varepsilon$, f donné dans H, vers la solution u de $Bu = f$, $u \in N_B$. Dans le cas particulier du problème 1, on obtient un résultat très simple : si $a(u, v)$ est une forme sesquilinéaire continue sur V, et si $b(\varepsilon; u, v) = \varepsilon a(u, v) + b(u, v)$, alors, si $b(u, v)$ est elliptique

sur $\overline{V}_{(W)}$, et si $\varepsilon a(u, v) + b(u, v)$ est elliptique sur V, pour ε assez petit, la solution u_ε de $B_\varepsilon u_\varepsilon = f$, $u_\varepsilon \in N_\varepsilon$, converge dans W fort vers la solution u de $Bu = f$, $u \in N_B$, c'est l'objet du théorème 1. 4.

Le n° 3 donne des exemples d'application de ces résultats aux équations aux dérivées partielles et aux systèmes différentiels.

Dans les n° 4 et 5, nous avons essayé d'améliorer (dans le cas du problème 1) les résultats du théorème 1. 4, en faisant des hypothèses de régularité supplémentaires sur Ω, A, B et f, et en utilisant les résultats de Friedrichs [1] Nirenberg [1], et Browder [1]. Les résultats du n° 5, étudiant la convergence à la frontière sont quelque peu négatifs.

Dans le n° 6, nous étudions, dans le cas général, la convergence des valeurs propres et des fonctions propres de B_ε.

CHAPITRE 2.

Reprenant les notations du chapitre 1, et désignant par $\mathcal{D}'_+(t; E)$, l'espace des distributions en t, à valeurs dans un espace de Banach E, à support limité à gauche, on établit dans le n° 1, la convergence dans $\mathcal{D}'_+(t; W)$ de la solution u_ε du problème mixte $B_\varepsilon u_\varepsilon + Du_\varepsilon$ (resp. $D^2 u_\varepsilon$) $= T$, $u_\varepsilon \in \mathcal{D}'_+(t; N_\varepsilon)$, où T est donnée dans $\mathcal{D}'_+(t; H)$, vers la solution u de $Bu + Du$ (resp. $D^2 u$) $= T$, $u \in \mathcal{D}'_+(t; N_B)$.

Les numéros suivants concernent des opérateurs et des conditions aux limites dépendant du temps. On obtient l'opérateur $B_\varepsilon(t)$ (resp. $B(t)$) et l'espace $N_\varepsilon(t)$ (resp. $N_B(t)$) à partir de la famille de formes sesquilinéaire $b(\varepsilon; t; u, v)$ (resp. $b(t; u, v)$). Le n° 3 établit des théorèmes de convergence fine pour chaque $t \geqslant 0$, dans W, et dans $L^2((0, s); W)$ de la solution $u_\varepsilon(t) \in N_\varepsilon(t)$ de $B_\varepsilon(t)u_\varepsilon(t) + Du_\varepsilon(t)$ (resp. $D^2 u_\varepsilon(t)) = h(t)$, avec les conditions initiales $u_\varepsilon(0) = 0$ (resp. $u_\varepsilon(0) = u'_\varepsilon(0) = 0$) vers la solution $u(t) \in N_B(t)$, de

$$B(t)u(t) + Du(t) \quad (\text{resp. } D^2 u(t)) = h(t),$$

avec les conditions initiales $u(0) = 0$ (resp. $u(0) = u'(0) = 0$), où $h(t)$ est une fonction donnée à valeurs dans H. C'est l'objet des théorèmes 2. 8, 2. 9, 2. 10 et 2. 11. Le n° 4 donne des applications et des exemples.

L'essentiel de ce travail a été résumé dans D. Huet [1] et [2].

Je suis heureuse de pouvoir remercier très vivement M. Lions de m'avoir suggéré ces problèmes et de m'avoir apporté une aide constante tout au long de ce travail. Ses nombreuses remarques m'ont permis des améliorations très sensibles.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER

PERTURBATION SINGULIÈRE D'OPÉRATEURS ELLIPTIQUES

1. — Préliminaires.

Nous rappelons dans ce numéro les éléments essentiels de la méthode de résolution des problèmes aux limites de M. Lions [1] que nous utilisons constamment dans la suite.

On se donne un espace de Hilbert H dont on note la norme par $|u|$ et le produit scalaire par (u, v). Soit V un espace de Hilbert avec [2]

$$(1, 1) \qquad V \subset H \quad \text{et } V \text{ dense dans } H.$$

Soit $a(u, v)$ une forme sesquilinéaire continue sur V.

Espace N et opérateur A associés à $a(v, u)$ sur V.

On appelle espace N associé à $a(u, v)$ sur V, l'espace des $u \in V$ tels que l'application $v \rightarrow a(u, v)$ soit continue sur V muni de la topologie induite par H. Comme V est dense dans H, pour $u \in N$, il existe $Au \in H$ tel que

$$(1, 2) \qquad a(u, v) = (Au, v) \qquad \text{pour tout} \quad v \in V$$

ce qui définit l'opérateur A application linéaire de N dans H. On munit N de la topologie la moins fine rendant continues les applications $u \rightarrow u$ de N dans V et $u \rightarrow Au$ de N dans H.

[1] Voir Lions [1] chapitre I.

[2] E et F étant deux espaces vectoriels topologiques, $E \subset F$ signifie que E est contenu dans F et possède une topologie plus fine que celle induite par F.

Formes $a(u, v)$ V-elliptiques.

DÉFINITION 1. 1. — *Nous dirons que la forme $a(u, v)$ est V-elliptique, s'il existe un nombre $\alpha > 0$, tel que*

$$\text{Re}[a(u,u)] \geqslant \alpha\|u\|_V^2 \qquad \textit{pour tout} \qquad u \in V \text{ (3)} \tag{1, 3}$$

Posons

$$a_1(u, v) = \frac{1}{2}\left(a(u, v) + \overline{a(v, u)}\right) \tag{1, 4}$$

et

$$a_2(u, v) = \frac{1}{2i}\left(a(u, v) - \overline{a(v, u)}\right). \tag{1, 5}$$

Alors $a(u, v) = a_1(u, v) + ia_2(u, v)$. De plus $a_1(u, v)$ et $a_2(u,v)$ sont hermitiennes. Dire que $a(u, v)$ est elliptique sur V, revient à dire que $a_1(u, v)$ définit sur V un produit scalaire équivalent à $(u, v)_V$.

Théorème d'isomorphisme.

On peut se poser les problèmes suivants :

PROBLÈME 1. 1. — *f étant donnée dans* H, *existe-t-il u dans* N *tel que* $Au = f$?

et

PROBLÈME 1. 2. — *f étant donnée dans* H, *existe-t-il u dans* V *tel que*

$$a(u, v) = (f, v) \qquad \text{pour tout} \qquad v \in V \tag{1, 6}$$

On a alors les résultats suivants (4) :

PROPOSITION 1. 1. — *Les problèmes* 1. 1 *et* 1. 2 *sont équivalents.*

et

THÉORÈME 1. 1. — *Si $a(u, v)$ est* V-*elliptique,* A *est un isomorphisme topologique de* N *sur* H.

Par suite, si $a(u, v)$ est V-elliptique, le problème 1. 1 admet une solution et une seule.

(3) Re désigne la partie réelle. Pour tout espace de Hilbert V, $(u, v)_V$ désigne le produit scalaire, et $\|u\|_V$ la norme dans V.

(4) Voir Lions [3], p. 22.

Problèmes non homogènes.

On suppose qu'il existe une espace vectoriel topologique E, et un opérateur $\tilde{A}$, application linéaire continue V dans E, tel que $\tilde{A}\ h = Ah$ pour tout $h \in N$.

Soit f donnée dans H, et h donnée dans V tel que $\tilde{A}h \in H$. Soit le

PROBLÈME 1. 3. — *Trouver u dans* V *tel que*

$$\tilde{A}u = f; \qquad u - h \in N.$$

On pose $U = u - h$; on alors $\tilde{A}U = AU = f - \tilde{A}h \in H$. On est alors ramené au problème 1. 1 Par suite, si $a(u, v)$ est V-elliptique, le problème 1. 3 admet une solution et une seule

Opérateur de Green.

Dans le cas où $a(u, v)$ est V-elliptique, A est un isomorphisme de N sur H. L'opérateur G, inverse de A, isomorphisme de H sur N est appelé *opérateur de Green de la forme* $a(u, v)$.

Cas particuliers.

Soit Ω un ouvert quelconque de R^n; $\mathfrak{D}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact, sur Ω, muni de la topologie limite inductive habituelle (5); $\mathfrak{D}'(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω.

Un cas important pour les équations aux dérivées partielles est celui où V et H sont tels que

$$(1, 7) \qquad \mathfrak{D}(\Omega) \subset V \subset H \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{D}(\Omega) \text{ dense dans H.}$$

On peut donner alors une autre caractérisation de N et de A. Pour u fixé dans V, $\varphi \rightarrow a(u, \varphi)$ est une forme semi-linéaire continue sur $\mathfrak{D}(\Omega)$, donc définit $\mathcal{A}u \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ tel que

$$(1, 8) \qquad a(u, \varphi) = \langle \mathcal{A}u, \bar{\varphi} \rangle$$

(le crochet désignant la dualité entre $\mathfrak{D}(\Omega)$ et $\mathfrak{D}'(\Omega)$) ce qui définit $\mathcal{A}$ comme application de V dans $\mathfrak{D}'(\Omega)$. Soit $\mathcal{N}$ l'espace des $u \in V$ avec $\mathcal{A}u \in H$ et

$$(1, 9) \qquad a(u, v) = (\mathcal{A}u, v) \qquad \text{pour tout} \qquad v \in V.$$

(5) Voir Schwartz [1].

On munit $\mathcal{N}$ de la topologie la moins fine rendant continues les applications $u \to u$ de $\mathcal{N}$ dans V et $u \to \mathcal{A}u$ de $\mathcal{N}$ dans H. On a alors la (6)

Proposition 1. 2. — $N = \mathcal{N}$ *et* $A = \mathcal{A}$.

Sous l'hypothèse (1, 7), si $a(u, v)$ est V-elliptique, la restriction de l'opérateur de Green à $\mathcal{D}(\Omega)$ est une application linéaire continue de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et réciproquement la restriction de G à $\mathcal{D}(\Omega)$ définit complètement G puisque $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans H. Mais d'après le théorème des noyaux (7), G définit un élément $G_{x,y}$ de $\mathcal{D}'(\Omega_x \times \Omega_y)$: *On appelle* $G_{x,y}$ *le noyau de Green de la forme* $a(u, v)$ *sur* V.

Un autre cas important pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles est celui où (8) :

$$(1, 10) \qquad (\mathcal{D}(\Omega))^N \subset V \subset H \subset (\mathcal{D}'(\Omega))^N$$

avec $(\mathcal{D}(\Omega))^N$ dense dans H (9).

Le théorème 1. 1 permet de résoudre de très nombreux problèmes aux limites elliptiques (10). La résolution de ces problèmes nécessite l'introduction d'un certain nombre d'espaces fonctionnels dont nous allons parler brièvement maintenant..

Espaces $H^k(\Omega)$, pour k entier $\geqslant 0$.

Pour $k = 0$, H^0 (Ω) est l'espace, en général noté $L^2(\Omega)$, des classes de fonctions de carré sommable sur Ω, espace Hilbertien dont on désignera le produit scalaire par $(u, v)_0$ et la norme par $|u|_0$. Pour k entier > 0, $H^k(\Omega)$ désigne l'espace des $u \in L^2(\Omega)$, tels que $D^p u \in L^2(\Omega)$, pour tout $|p| \leqslant k$, (11) muni du produit scalaire $(u, v)_k = \sum\limits_{|p| \leqslant k} (D^p u, D^p v)_0$ qui en fait un espace de Hilbert. On désigne par $H_0^k(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^k(\Omega)$, muni de la topologie induite. Soit $K^m(\Omega)$ l'orthogonal de $H_0^m(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$.

(6) Voir Lions [3] p. 29.
(7) Voir Schwartz [4].
(8) De façon générale E étant un espace vectoriel topologique, E^N désigne le produit $E \times \ldots \times E$: N facteurs.
(9) Voir Lions [1], p. 36.
(10) Voir Lions [1], [2], [3], [4], Lions-Schwartz [1]; Schwartz [2] et [3].
(11) On utilise la notation condensée : $p = (p_1, \ldots, p_n)$; $|p| = p_1 + \cdots + p_n$ et $D^p = \dfrac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_n^{p_n}}$.

On désigne par Γ la frontière de Ω. Dans tout ce qui suit, on suppose que Γ est une variété indéfiniment différentiable, de dimension $n - 1$. Soit $L^2(\Gamma)$ l'espace des classes de fonctions de carré sommable sur Γ pour la mesure superficielle ds.

Espaces $H^m(\Gamma)$ et $H^m_k(\Gamma)$ [12].

Opérateur γ_k.

On sait qu'il existe une application linéaire continue et une seule $u \to \gamma_0 u$ de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$, telle que $\gamma_0 u$ coïncide avec u sur Γ lorsque $u \in C(\overline{\Omega})$, espace des fonctions qui sont restriction à Ω de fonctions de $\mathcal{D}(R^n)$. Si maintenant $u \in H^m(\Omega)$, et si on désigne par $\partial u/\partial \nu$ la dérivée normale de u par rapport à Γ, on pose $\gamma_k u = \gamma_0\ (\partial^k u/\partial \nu^k)$, $0 \leqslant k \leqslant m - 1$, ce qui définit une application linéaire continue de $H^m(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$. On définit encore pour $u \in H^m(\Omega)$

$$\gamma(u) = (\gamma_0 u,\ \gamma_1 u,\ \ldots,\ \gamma_{m-1} u) \in (L^2(\Gamma))^m.$$

Espace $H^m(\Gamma)$.

Il est facile de voir, en utilisant une partition de l'unité, puis un système de coordonnées locales, que, pour toute fonction $f \in (\mathcal{D}(\Gamma))^m$, il existe une fonction $P(f) \in H^m(\Omega)$ telle que

$$\gamma(P(f)) = f.$$

Soit $h\ (f)$ la projection de $P(f)$ sur $K^m(\Omega)$. Alors $h(f)$ est l'unique élément de $K^m(\Omega)$ tel que

$$\gamma(h(f)) = f.$$

On peut donc définir intrinsèquement, sur $(\mathcal{D}(\Gamma))^m$, une structure préhilbertienne en posant :

$$(f,\ g)_{H^m(\Gamma)} = (h(f),\ h(g))_m \tag{1, 11}$$

$H_m(\Gamma)$ est l'espace de Hilbert, complété de $(\mathcal{D}(\Gamma))^m$ pour la structure (1, 11). C'est un espace de fonctions.

On a la

Proposition 1. 3. — *L'application $u \to \gamma u$ de $C(\overline{\Omega})$ dans $(\mathcal{D}(\Gamma))^m$ se prolonge par continuité en une application linéaire continue $u \to \gamma\ u$ de $H^m\ (\Omega)$ dans $H^m(\Gamma)$.*

[12] Voir Lions [2].

Espace $H_k^m(\Gamma)$, $k \leqslant m-1$.

Soit $f \in D(\Gamma)$. On pose $f_k = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1}, f, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m-k})$ et $P_k(f) = P(f_k)$. Alors on a $\gamma_k(P_k(f)) = f$. Soit V_k le sous-espace orthogonal dans $H^m(\Omega)$ du sous-espace des u tels que $\gamma_k u = 0$. Si on désigne par $h_k(f)$ la projection sur V_k de $P_k(f)$, $h_k(f)$ est uniquement déterminé et est l'élément de V_k vérifiant $\gamma_k(h_k(f)) = f$.

On désigne par $H_k^m(\Gamma)$ l'espace de Hilbert complété de $\mathfrak{D}(\Gamma)$ pour la structure

(1, 12) $$(f, g)_{H_k^m(\Gamma)} = (h_k(f), h_k(g))_m.$$

On a la

Proposition 1. 4. — *L'application $u \to \gamma_k u$ de $C(\overline{\Omega})$ dans $\mathfrak{D}(\Gamma)$ se prolonge en une application linéaire continue, encore notée $u \to \gamma_k u$ de $H^m(\Omega)$ dans $H_k^m(\Gamma)$.*

Donnons enfin quelques définitions sur les opérateurs de dérivation transversaux, utiles dans les problèmes de dérivées obliques.

Soit un opérateur différentiel

$$B = \sum_p b_p(x) D^p$$

dont les coefficients $b_p(x)$ sont indéfiniment différentiables, bornés dans R^n ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leqslant m$. Dans le cas où Ω est l'ouvert $x_n > 0$ de frontière $x_n = 0$, *l'ordre de transversalité de* B *par rapport à* Γ est le plus grand p_n possible pour lequel $b_p(x_1, \ldots x_{n-1}, 0)$ ne soit pas identiquement nul. Si l'ouvert Ω a pour frontière une variété indéfiniment différentiable de dimensions $n-1$, quelconque, on définit l'ordre de transversalité de B en un point $a \in \Gamma$, $\mu(a)$, de façon évidente, à l'aide d'une carte locale, déterminée par $x \to \varphi(x) = \xi$ en prenant pour ξ_n la distance de x à Γ. L'ordre de transversalité de B par rapport à Γ est le plus grand des nombres $\mu(a)$ quand on parcourt Γ.

Opérateurs B^Γ.

On définit une application $u \to B^\Gamma u$ de $C(\overline{\Omega})$ dans $\mathfrak{D}(\Gamma)$, par $B^\Gamma u = \gamma_0(Bu)$. En imposant certaines conditions à B et à Γ, on peut prolonger cette application en application linéaire continue de $H^m(\Omega)$ dans $H'^m_k(\Gamma)$ dual de $H_k^m(\Gamma)$.

2. — Position du problème. Théorèmes de convergence.

Soit V et W deux espaces de Hilbert, avec

(1, 13) $\quad V \subset W \subset H, \quad V$ dense dans H.

On désignera par $\overline{V}_{(W)}$, l'adhérence de V dans W, muni de la topologie induite par W.

On prend sur V (resp. W) une famille de formes sesquilinéaires continues $b(\varepsilon; u, v)$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ [13], (resp. une forme sesquilinéaire continue $b(u, v)$). On dira que l'hypothèse (1, 14) (resp. (1, 15), (1, 16), (1, 17)) est vérifiée si on a

(1, 14) $\varepsilon \to b(\varepsilon; u, v)$ est continue sur $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, pour tout $u, v \in V$

(resp.

(1, 15) $b(\varepsilon; u, v) \to b(u, v)$ pour tout $u, v \in V$ quand $\varepsilon \to 0$

(1, 16) (condition d'ellipticité) il existe $\alpha(\varepsilon) > 0$, $\alpha(\varepsilon) \to 0$ avec ε et $\beta > 0$, tels que :

$$\mathrm{R}e\, b(\varepsilon; u, u) \geqslant \alpha(\varepsilon)\|u\|_V^2 + \beta\|u\|_W^2 \quad \text{pour tout} \quad u \in V \text{ et } \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$$

(1, 17) condition d'ellipticité sur $b(u, v)$: il existe $\gamma > 0$ tel que

$$\mathrm{R}e\, b(u, u) \geqslant \gamma\|u\|_W^2 \qquad \text{pour tout} \qquad (u \in \overline{V}_{(W)})$$

Soit f donné dans H, et une famille f_ε, de H, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Nous dirons que f_ε vérifie (1, 18) (resp. (1, 18′) (1, 18″)) si on a

(1, 18) $\qquad f_\varepsilon \to f$ dans H quand $\varepsilon \to 0$

(resp.

(1, 18′) $\quad f_\varepsilon \to f$ faiblement dans H quand $\varepsilon \to 0$

(1, 18″) $\qquad f_\varepsilon$ est bornée dans H).

Soit N_ε et B_ε (resp. N_B et B) l'espace et l'opérateur attachés à $b(\varepsilon; u, v)$ (resp. à $b(u, v)$) sur V (resp. $\overline{V}_{(W)}$).

Sous l'hypothèse (1, 16), soit u_ε la solution dans V de

(1, 19) $\quad b(\varepsilon; u, v) = (f_\varepsilon, v) \quad$ pour tout $\quad v \in V ; \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

[13] Dans tout ce travail, ε désigne un nombre réel > 0. On le ne répètera plus.

(ou ce qui est équivalent, d'après la proposition 1. 1, la solution de

(1, 19′) $B_\varepsilon u_\varepsilon = f_\varepsilon; \quad u_\varepsilon \in N_\varepsilon).$

Nous nous proposons d'étudier le comportement de u_ε quand $\varepsilon \to 0$ [14].

Nous avons le premier résultat suivant :

Proposition 1. 5. — *Sous les hypothèses* (1, 13), (1, 16) *et* (1, 18″), u_ε *solution de* (1, 19) *est borné dans* W, *et* $|b(\varepsilon; u_\varepsilon, u_\varepsilon)|$ *est borné. De plus* $(\alpha(\varepsilon))^{1/2}$ u_ε *est borné dans* V.

Démonstration. — Écrivons (1, 19) pour $v = u_\varepsilon$:

$$b(\varepsilon; u_\varepsilon, u_\varepsilon) = (f_\varepsilon, u_\varepsilon).$$

On en déduit

$$|b(\varepsilon; u_\varepsilon, u_\varepsilon)| \leqslant |f_\varepsilon| |u_\varepsilon| \leqslant K_1 |f_\varepsilon| \, \|u_\varepsilon\|_W.$$

où K_1 est indépendante de ε. Donc, en particulier :

$$\mathrm{Re}\, b(\varepsilon; u_\varepsilon, u_\varepsilon) \leqslant K_1 |f_\varepsilon| \, \|u_\varepsilon\|_W$$

On en déduit facilement la proposition, en utilisant (1, 16) pour minorer le premier membre, et (1, 18″) pour majorer le second.

Notons que l'on a :

(1, 20) $\|u_\varepsilon\|_W \leqslant K_2 |f_\varepsilon|.$

Où K_2 est indépendante de ε.

Soit, maintenant, sous l'hypothèse (1, 17), u la solution dans $\overline{V}_{(W)}$ de

(1, 21) $b(u, v) = (f, v)$ pour tout $v \in \overline{V}_{(W)}$

ou, ce qui est équivalent de

(1, 21′) $Bu = f; \; u \in N_B.$

Nous avons alors le premier théorème de convergence :

Théorème 1. 2. — *Sous les hypothèses* (1, 13), (1, 16), (1, 17) (1, 18′), et

(1, 22) $\left\{\begin{array}{l}\textit{Pour toute famille } w_\varepsilon \textit{ de } V, \textit{ pour laquelle } |b(\varepsilon; w_\varepsilon, w_\varepsilon)| \\ \quad \textit{est borné, } b(\varepsilon; w_\varepsilon, v) - b(w_\varepsilon, v) \to 0, \textit{ pour tout} \\ \quad v \in V, \textit{ quand } \varepsilon \to 0\end{array}\right.$

[14] Certains aspects de ce problème sont étudiés dans Visik-Liousternik [1] dans le cas du problème de Dirichlet.

u_ε solution de (1, 19) *converge, dans* W *faible vers u solution de* (1, 21).

Démonstration. — D'après la proposition 1. 5, u_ε est borné dans W. De toute suite u_{ε_i}, on peut donc extraire une sous-suite u_{ε_j}, convergent, dans W faible, vers w; mais on a

$$b(\varepsilon_j;\, u_{\varepsilon_j},\, v) = (f_{\varepsilon_j},\, v) \qquad \text{pour tout} \qquad v \in \mathrm{V}.$$

Le second membre, d'après (1, 18') converge vers (f, v). Le premier membre peut s'écrire :

$$\{ b(\varepsilon_j;\, u_{\varepsilon_j},\, v) - b(u_{\varepsilon_j},\, v) \} + b(u_{\varepsilon_j},\, v).$$

D'après la proposition 1. 5, on peut appliquer (1, 22) à u_ε. Par suite le terme entre accolade tend vers 0. D'autre part, comme $u_{\varepsilon_j} \to w$ dans W faible, $b(u_{\varepsilon_j},\, v) \to b(w,\, v)$.

On a donc

$$b(w,\, v) = (f,\, v) \quad \text{pour tout} \quad v \in \mathrm{V} \quad \text{donc pour tout} \quad v \in \overline{\mathrm{V}}_{(\mathrm{W})}.$$

Par suite $w = u$, ce qui démontre le théorème.

Nous avons enfin le théorème de convergence forte :

Théorème 1. 3. — *Sous les hypothèses* (1, 13), (1, 16), (1, 17), (1, 18), (1, 22) *et*

(1, 23) (*resp.* (1, 23')) : *il existe* $\delta(\varepsilon)$, $\delta(\varepsilon) \to 0$ *avec* ε, (*resp.* $\delta(\varepsilon)$, $\delta(\varepsilon) \to 0$ *avec* ε, *et* $\lambda > 0$) *tel que*

$$\mathrm{Re}\{ b(\varepsilon;\, v,\, v) - b(v,\, v) \} + \delta(\varepsilon)\, \mathrm{Re} b(v,\, v) \geqslant 0$$

$$(\textit{resp. } \mathrm{Re}\{ b(\varepsilon;\, v,\, v) - b(v,\, v) \} + \delta(\varepsilon) \mathrm{Re} b(v,\, v) \geqslant \lambda\alpha(\varepsilon) \|v\|_{\mathrm{V}}^2)$$

pour tout $v \in \mathrm{V}$.

Alors $u_\varepsilon \to u$ *dans* W *fort* (*resp.* $u_\varepsilon \to u$ *dans* W *fort et* $(\alpha(\varepsilon))^{1/2}\, u_\varepsilon \to 0$ *dans* V).

Démonstration. — On a

$$(1,\ 24) \quad \mathrm{Re}\{ b(\varepsilon;\, u_\varepsilon,\, u_\varepsilon) - b(u_\varepsilon,\, u_\varepsilon) + b(u_\varepsilon - u,\, u_\varepsilon - u) \} = \mathrm{Re}\{ (f_\varepsilon,\, u_\varepsilon) - (f,\, u_\varepsilon) + b(u - u_\varepsilon,\, u) \}.$$

D'après (1, 18) et le théorème 1. 2, le second membre de cette égalité tend vers 0. Quant au premier membre, il est minoré, d'après (1, 17) et (1,23) (resp. (1, 23')) par

$$-\delta(\varepsilon) \mathrm{Re} b(u_\varepsilon,\, u_\varepsilon) + \gamma \|u_\varepsilon - u\|_{\mathrm{W}}^2$$
$$(\text{resp. } \lambda\alpha(\varepsilon) \|u_\varepsilon\|_{\mathrm{V}}^2 - \delta(\varepsilon)\, \mathrm{Re} b\,(u_\varepsilon,\, u_\varepsilon) + \gamma \|u_\varepsilon - u\|_{\mathrm{W}}^2).$$

D'où le théorème, puisque, u_ε étant borné dans W, et $\delta(\varepsilon)$ convergent vers 0, $\delta(\varepsilon)\mathrm{Re}\, b(u_\varepsilon, u_\varepsilon)$ converge vers 0.

Cas particuliers.

1° *Cas où* $b(\varepsilon; u, v)$ *est linéaire en* ε. — On prend V et W avec (1, 13), puis sur V (resp. W) une forme sesquilinéaire continue $a(u, v)$ (resp. $b(u, v)$) et on fait les hypothèses d'ellipticité suivantes :

(1, 25) $b(\varepsilon; u, v) = \varepsilon a(u, v) + b(u, v)$ est elliptique sur V pour $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

(1, 26) $b(u, v)$ est elliptique sur $\overline{V}_{(W)}$.

Nous avons dans ce cas le théorème de convergence très simple suivant :

THÉORÈME 1. 4. — *Sous les hypothèses* (1, 13), (1, 18), (1, 25) *et* (1, 26) *la solution* u_ε *de* (1, 19) *converge, quand* $\varepsilon \to 0$, *dans* W, *vers la solution* u *de* (1, 21). *De plus* $\varepsilon^{1/2}u_\varepsilon \to 0$, *dans* V.

DÉMONSTRATION. — Nous pouvons, sans nuire à la généralité, supposer que $\varepsilon_0 = 1$. L'hypothèse (1, 25), écrite pour $\varepsilon = 1$, signifie qu'il existe $\mu > 0$ tel que

(1, 27) $\mathrm{Re}(a(v, v) + b(v, v)) \geqslant \mu\|v\|_V^2$ pour tout $v \in V$.

Comme pour tout $v \in V$, $\mathrm{Re}\, b(v, v) \geqslant 0$, on aura :

(1, 28) $$\mathrm{Re}(\varepsilon a(v, v) + b(v, v)) \geqslant \mu\varepsilon\|v\|_V^2$$

pour tout $v \in V$ et tout $\varepsilon \leqslant 1$.

Cependant, si $\mathrm{Re}\, a(v, v) \leqslant 0$, pour $\varepsilon \leqslant 1$, on a

$$\varepsilon \mathrm{Re}\, a(v, v) \geqslant \mathrm{Re}\, a(v, v),$$

donc

(1, 29) $\mathrm{Re}(\varepsilon a(v, v) + b(v, v)) \geqslant \mu\|v\|_W^2$ pour $\varepsilon \leqslant 1$,

et tout $v \in V$ vérifiant $\mathrm{Re}\, a(v, v) \leqslant 0$).

L'hypothèse (1, 26) signifie qu'il existe $\gamma > 0$ tel que

$$\mathrm{Re}\, b(v, v) \geqslant \gamma\|v\|_W^2$$

pour tout $v \in \overline{V}_{(W)}$. On a donc aussi :

(1, 30) $\mathrm{Re}(\varepsilon a(v, v) + b(v, v)) \geqslant \gamma\|v\|_W^2$ pour $\varepsilon \leqslant 1$

et tout $v \in V$ vérifiant $\mathrm{Re}\, a(v, v) > 0$.

Réunissant (1, 29) et (1, 30) on voit qu'il existe $\nu > 0$, tel que

$$(1,\ 31) \qquad \mathrm{Re}(\varepsilon a(v, v) + b(v, v)) \geqslant \nu \|v\|_W^2$$

pour tout $v \in V$ et $\varepsilon \leqslant 1$

Réunissant (1, 28) et (1, 31) on déduit :

$$(1,\ 32) \qquad \begin{cases} \mathrm{Re}(\varepsilon a(v, v) + b(v, v)) \geqslant \dfrac{\mu}{2} \varepsilon \|v\|_V^2 + \dfrac{\nu}{2} \|v\|_W^2. \\ \text{pour tout } v \in V \text{ et tout } \varepsilon \leqslant 1. \end{cases}$$

Par suite l'hypothèse (1, 16) du théorème 1. 3 est vérifiée. D'autre part, si $\mathrm{Re}(\varepsilon a(w_\varepsilon, w_\varepsilon) + b(w_\varepsilon, w_\varepsilon))$ est borné, alors, d'après (1, 32) $\varepsilon^{1/2} w_\varepsilon$ est borné dans V, donc $\varepsilon a(w_\varepsilon, v) \to 0$ pour tout $v \in V$, ce qui n'est autre que (1, 22).

Enfin, d'après (1, 27) on a :

$$(1,\ 33) \qquad \mathrm{Re}\{\varepsilon a(v, v)\} + \varepsilon \mathrm{Re}\, b(v, v) \geqslant \mu\varepsilon \|v\|_v^2 \text{ pour tout } v \in V \text{ et } \varepsilon \leqslant 1.$$

ce qui n'est autre que (1, 23'). Le théorème 1. 4 résulte donc du théorème 1. 3.

Remarque. — Posons $u_\varepsilon - u = \varepsilon^{1/2} v_\varepsilon$. On a, pour tout $v \in V$

$$\varepsilon a(u_\varepsilon, v) + \varepsilon^{1/2} b(v_\varepsilon, v) = 0.$$

Donc, après division par $\varepsilon^{1/2}$, puisque $\varepsilon^{1/2}\, u_\varepsilon \to 0$ dans V, on obtient $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} b\,(v_\varepsilon, v) = 0$ pour tout $v \in V$.

2° *Cas où* $b(\varepsilon; u, v) - b(u, v)$ *est elliptique sur* V. — Explicitons encore le théorème, dans ce cas :

Théorème 1. 5. — *Sous les hypothèses* (1, 13), (1, 15), (1, 17), (1, 18) *et*

(1, 16') : *il existe* $\alpha(\varepsilon) > 0$, $\alpha(\varepsilon) \to 0$ *avec* ε *tel que*

$$\mathrm{Re}\{b(\varepsilon; v, v) - b(v, v)\} \geqslant \alpha(\varepsilon)\, \|v\|_V^2 \quad \textit{pour tout} \quad v \in V.$$

Alors u_ε *solution de* (1, 19) *converge dans* W *vers* u *solution de* (1, 21) *et* $(\alpha(\varepsilon))^{1/2} u_\varepsilon \to 0$ *dans* V.

Démonstration. — Il nous suffit de montrer que (1, 15) et (1, 16') entraînent (1, 22). Posons

$$a(\varepsilon; u, v) = b(\varepsilon; u, v) - b(u, v) \quad \text{pour} \quad u, v \in V.$$

D'après (1, 16′) Re $a(\varepsilon, v, v)$ définit sur V, une norme (dépendant de ε) équivalente à $\|v\|_V$. D'autre part, d'après (1, 15), la norme de l'application $u, v \to a(\varepsilon; u, v)$, dans l'espace des formes sesquilinéaires continues sur $V \times V$, est bornée. Par suite

$$|a(\varepsilon; w_\varepsilon, v)| \leqslant K \quad (\mathrm{Re}\, a(\varepsilon; w_\varepsilon, w_\varepsilon))^{1/2} \quad (\mathrm{Re}\, a(\varepsilon; v, v))^{1/2}$$

où K est indépendante de ε.

Or, dans ce cas, d'après (1, 16′), si $w_\varepsilon \in V$ vérifie $|b(\varepsilon; w_\varepsilon, w_\varepsilon)|$ borné, alors, on a $\mathrm{Re}\, a(\varepsilon; w_\varepsilon, w_\varepsilon)$ borné. D'autre part, $a(\varepsilon; v, v)$ converge vers 0, d'après (1, 15). D'où le résultat.

3° *Cas où $b(\varepsilon; u, v)$ et $b(u, v)$ sont hermitiennes.* — Nous nous bornons ici au

Lemme 1. 1. — *Si $b(\varepsilon; u, v)$ et $b(u, v)$ sont hermitiennes, les hypothèses,* (1, 15), (1, 16) et (1, 23) *entraînent* (1, 22).

Démonstration. — D'après (1, 23),

$$c(\varepsilon; u, v) = (b(\varepsilon; u, v) - b(u, v)) + \delta(\varepsilon)\, b(u, v)$$

est alors une forme hermitienne positive. On a donc d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|c(\varepsilon; w_\varepsilon, v| \leqslant (c(\varepsilon; w_\varepsilon, w_\varepsilon))^{1/2} (c(\varepsilon; v, v))^{1/2}.$$

Or, si w_ε vérifie $|b(\varepsilon; w_\varepsilon, w_\varepsilon)|$ borné, alors $c(\varepsilon; w_\varepsilon, w_\varepsilon)$ est aussi borné, d'après (1, 16), et $c(\varepsilon; v, v) \to 0$ avec ε d'après (1, 15). Par suite $c(\varepsilon; w_\varepsilon, v) \to 0$ pour tout $v \in V$, d'où le résultat.

Cas particulier des équations aux dérivées partielles.

Soit Ω un ouvert de R^n. Prenons V, W et H tels que

$$(1,33) \qquad \mathcal{D}(\Omega) \subset V \subset W \subset H; \qquad \mathcal{D}(\Omega) \text{ dense dans } H.$$

Nous reprenons ensuite les hypothèses du théorème 1. 3. Soit G_ε (resp. G) l'opérateur de Green attaché à $b(\varepsilon; u, v)$ sur V (resp. à $b(u, v)$ sur W). Désignons par $\tilde{G}_\varepsilon$ (resp. $\tilde{G}$) la restriction de G_ε (resp. G) à $\mathcal{D}(\Omega_x)$, et par $G^\varepsilon_{x,y}$ (resp. $G_{x,y}$) le noyau de Green défini par G_ε (resp. G).

Il résulte de (1, 20) que les G_ε forment un ensemble équicontinu de $\mathfrak{L}(H; W)$ [15]. D'autre part, d'après le théorème 1. 3, $G_\varepsilon \to G$ dans $\mathfrak{L}_s(H; W)$. Par suite, les $\tilde{G}_\varepsilon$ forment un ensemble équicontinu de $\mathfrak{L}(\mathfrak{D}(\Omega_x); \mathfrak{D}'(\Omega_y))$ et $\tilde{G}_\varepsilon \to \tilde{G}$ dans $\mathfrak{L}_s(\mathfrak{D}(\Omega_x); \mathfrak{D}'(\Omega_y))$. Mais, sur un ensemble équicontinu de $\mathfrak{L}(\mathfrak{D}(\Omega_x); \mathfrak{D}'(\Omega_y))$ la topologie de la convergence simple et la topologie de la convergence uniforme sur les parties précompactes de $\mathfrak{D}(\Omega_x)$ sont identiques [16]. D'autre part, sur $\mathfrak{D}(\Omega_x)$, les ensembles bornés et les ensembles relativement compacts sont aussi identiques [17]. Par suite, $\tilde{G}_\varepsilon \to \tilde{G}$ dans $\mathfrak{L}_b(\mathfrak{D}(\Omega_x); \mathfrak{D}'(\Omega_y))$. Comme d'autre part les espaces $\mathfrak{L}_b(\mathfrak{D}(\Omega_x); \mathfrak{D}'(\Omega_y))$ et $\mathfrak{D}'(\Omega_x \times \Omega_y)$ sont isomorphes topologiquement [18], $G^\varepsilon_{x,y} \to G_{x,y}$ dans $\mathfrak{D}'(\Omega_x \times \Omega_y)$. D'où le

Théorème 1. 6. — *Sous les hypothèses* (1, 33), (1, 16), (1, 17), (1, 22) *et* (1, 23), *le noyau de Green* $G^\varepsilon_{x,y}$ *défini par* $b(\varepsilon; u, v)$ *sur* V, *converge dans* $\mathfrak{D}'(\Omega_x \times \Omega_y)$ *vers le noyau de Green* $G_{x,y}$ *définie par* $b(u, v)$ *sur* $\overline{V}_{(W)}$.

Problèmes aux limites non homogènes.

Reprenons les hypothèses et les notations du théorème 1. 3. Supposons en outre

(1, 34) Il existe un espace E (resp. un espace E_ε, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$) et un opérateur $\tilde{B} \in \mathfrak{L}(W, E)$ (resp. $\tilde{B}_\varepsilon \in \mathfrak{L}(V, E_\varepsilon)$ tel que $\tilde{B}h = Bh$ pour tout $h \in N_B$ (resp. $\tilde{B}_\varepsilon h = B_\varepsilon h$ pour tout $h \in N_\varepsilon$).

Soit $h \in W$ et une famille $h_\varepsilon \in V$, tels que

$$(1, 35)\quad \begin{cases} h_\varepsilon \to h \text{ dans } W \\ \tilde{B}_\varepsilon h_\varepsilon \in H;\ \tilde{B}h \in H \text{ et } \tilde{B}_\varepsilon h_\varepsilon \to \tilde{B}h \text{ dans } H \text{ quand } \varepsilon \to 0. \end{cases}$$

On a alors le

(15) De façon générale, E et F étant deux espaces vectoriels topologiques, $\mathfrak{L}(E; F)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de E dans F. Si on munit cet espace de la topologie de la convergence simple (resp. bornée). (Voir Bourbaki [1]) on le note $\mathfrak{L}_s(E; F)$ (resp. $\mathfrak{L}_b(E; F)$).

(16) Voir Bourbaki [1] chap. III, p. 23, proposition 5.

(17) Voir Schwartz, [1], tome I, p. 70, théorème VII.

(18) Voir Schwartz [9], p. 93, proposition 25.

THÉORÈME 1. 7. — *Sous les hypothèses du théorème* 1. 3 *ainsi que* (1, 34) *et* (1, 35) *la solution* u_ε *de*

$$\tilde{B}_\varepsilon u_\varepsilon = f_\varepsilon; \qquad u_\varepsilon - h_\varepsilon \in N_\varepsilon$$

converge dans W *vers la solution* u *de*

$$\tilde{B}u = f; \qquad u - h \in N_B.$$

DÉMONSTRATION. — Posons $U_\varepsilon = u_\varepsilon - h_\varepsilon$ et $U = u - h$. Alors U_ε (resp. U) est solution de

$$\tilde{B}_\varepsilon U_\varepsilon = B_\varepsilon U_\varepsilon = f_\varepsilon - \tilde{B}_\varepsilon h_\varepsilon = F_\varepsilon \in H; \quad U_\varepsilon \in N_\varepsilon$$

(resp.

$$\tilde{B}u = BU = f - \tilde{B}h = F \in H; \quad U \in N_B$$

d'après (1, 18) et (1, 35) $F_\varepsilon \to F$ dans H. Le théorème 1. 7 résulte donc du théorème 1. 3.

Propriétés de continuité de l'application $\varepsilon \to u_\varepsilon$.

THÉORÈME 1. 8. — *Sous les hypothèses* (1, 13), (1, 16) *et* (1, 18 *bis*) *l'application* $\varepsilon \to f_\varepsilon$ *est continue de* $]0, \varepsilon_0]$ *dans* H *et*

(1, 22′) $\begin{cases} \textit{Pour tout } \varepsilon_1 \in]0, \varepsilon_0] \textit{ et toute famille } w_\varepsilon \textit{ bornée dans} \\ \quad V \textit{ pour } \varepsilon \textit{ assez voisin de } \varepsilon_1, \\ \qquad (b(\varepsilon; w_\varepsilon, v) - b(\varepsilon_1; w_\varepsilon, v) \to 0) \\ \quad \textit{quand } \varepsilon \to \varepsilon_1, \textit{pour tout } v \in V \textit{ (ceci entraîne } (1.\ 14)) \end{cases}$

et

(1, 23″) $\begin{cases} \textit{Pour tout } \varepsilon_1 \in]0, \varepsilon_0], \textit{il existe } \delta(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0,\ \delta(\varepsilon, \varepsilon_1) \to 0 \\ \quad \textit{quand } \varepsilon \to \varepsilon_1, \textit{tel que} \\ \mathrm{Re}\{b(\varepsilon; v, v) - b(\varepsilon_1; v, v)\} + \delta(\varepsilon; \varepsilon_1)\,\mathrm{Re}\,b(\varepsilon_1; v, v) \geqslant 0, \\ \textit{pour tout } v \in V. \end{cases}$

Alors l'application $\varepsilon \to u_\varepsilon$ *définie par* (1, 19) *est continue de* $]0, \varepsilon_0]$ *dans* V.

La démonstration est celle du théorème 1. 3, avec V = W.

COROLLAIRE 1, 1. — *Sous les hypothèses du théorème* 1. 3, *ainsi que* (1, 18) *bis* (1, 22′), *et* (1, 23″), $\varepsilon \to u_\varepsilon$ *est continue de* $[0, \varepsilon_0]$ *dans* W (*avec* $u_0 = u$, *solution de* (1, 20)).

REMARQUE. — Les hypothèses (1, 22′) et (1, 23″) sont en particulier vérifiées si on suppose que $\varepsilon \to b\ (\varepsilon;\ u,\ v)$ est

continue pour tout $u, v \in V$, et uniformément sur les ensembles bornés de V, *i.e.* pour tout $\varepsilon_1 \in]0, \varepsilon_0]$, il existe $k(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$, convergent vers 0 quand $\varepsilon \to \varepsilon_1$, telle que $|b(\varepsilon; u, v) - b(\varepsilon_1; u, v)| \leqslant k(\varepsilon, \varepsilon_1)\|u\|_V\|v\|_V$ pour tout $u, v \in V$.

3. — Exemples d'application du théorème 1. 3.

Naturellement la théorie s'applique à tous les problèmes aux limites couverts par la théorie de Lions. Nous n'en citerons que quelques exemples concernant les équations aux dérivées partielles et les systèmes différentiels.

D'autre part, nous ne considérons que des conditions aux limites homogènes, étant bien entendu qu'à chaque problème homogène correspondent des problèmes aux limites non homogènes.

Nous désignons toujours par Ω un ouvert de R^n, quelconque sauf mention expresse du contraire, de frontière Γ.

1° Nous prenons $H = L^2(\Omega)$.

Puis $W = H^1(\Omega)$. Sur W la forme

$$b(u, v) = ((u, v))_1 + (u, v)_0 \text{ (19)},$$

définit l'opérateur $-\Delta + 1$, où $\Delta = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, et est elliptique.

Nous prenons pour V des sous-espaces V_i fermés de $\mathcal{V}$ formé des $u \in H^1(\Omega)$ tels que $\Delta u \in L^2(\Omega)$, muni de la norme $(\|u\|^2_{H^1(\Omega)} + |\Delta u|_0^2)^{1/2}$. Nous prenons $a(u, v) = (\Delta u, \Delta v)_0$, qui définit l'opérateur Δ^2.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$

$$b(\varepsilon; u, v) = \varepsilon(\Delta u, \Delta v)_0 + ((u, v))_1 + (u, v)_0$$

est elliptique sur $\mathcal{V}$.

Soit f donnée dans $L^2(\Omega)$.

Alors u_ε^i désigne la solution dans V_i de

$$\varepsilon\Delta^2 u_\varepsilon^i - \Delta u_\varepsilon^i + u_\varepsilon^i = f; \qquad u_\varepsilon^i \in N_\varepsilon^i$$

et w_i la solution dans $\overline{V}_{i(W)}$ de

$$-\Delta w_i + w_i = f \quad w_i \in N_B^i.$$

(19) $((u, v))_1 = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)_0$.

Il nous reste, dans chacun des quatre exemples qui suivent ($i = 1, \ldots 4$) à préciser les espaces V_i et $\overline{V}_{i(W)}$ et à interpréter les conditions $u^i_\varepsilon \in N^i_\varepsilon$ et $w_i \in N^i_B$. Pour cette interprétation nous utiliserons les formules de Green formelles suivantes

$$(\Delta^2 u, v)_0 = \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu}(\Delta u)\bar{v}\, ds - \int_\Gamma \Delta u \frac{\partial \bar{v}}{\partial \nu}\, ds + (\Delta u, \Delta v)_0$$

et

$$(\Delta u, v)_0 = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} \bar{v}\, ds - ((u, v))_1.$$

On en déduit

$$((\varepsilon\Delta^2 - \Delta + 1)u, v)_0 = \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu}(\varepsilon\Delta u - u)\bar{v}\, ds$$
$$- \varepsilon \int_\Gamma \Delta u \frac{\partial \bar{v}}{\partial \nu}\, ds + \varepsilon(\Delta u, \Delta v)_0 + ((u, v))_1 + (u, v)_0.$$

Exemple 1. 1 : *Problèmes de Dirichlet* [20]. — $V_1 = H^2_0(\Omega)$, alors $\overline{V}_{1(W)} = H^1_0(\Omega)$.

Les conditions aux limites formelles, d'après les formules de Green précédentes sont alors, pour u^1_ε :

$$u^1_\varepsilon\Big|_\Gamma = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u^1_\varepsilon}{\partial \nu}\Big|_\Gamma = 0$$

et pour w_1

$$w_1|_\Gamma = 0.$$

Exemple 1. 2. — V_2 est le sous-espace de $\mathfrak{V}$ des $u \in H^1_0(\Omega)$ tels que $\Delta u \in L^2(\Omega)$. Alors $\overline{V}_{2(W)} = H^1_0(\Omega)$. Par suite $w_2 = w_1$.

Quant à u^2_ε il vérifie les conditions aux limites formelles

$$u^2_\varepsilon|_\Gamma = 0 \qquad \Delta u^2_\varepsilon|_\Gamma = 0.$$

Dans les deux exemples qui suivent, nous supposons que Γ est suffisamment régulière pour que $H^2(\Omega)$ soit dense dans $H^1(\Omega)$ [21].

Exemple 1. 3. — Nous prenons $V_3 = \mathfrak{V}$; par suite $\overline{V}_{3(W)} = H^1(\Omega)$. Les conditions satisfaites par u^3_ε sont :

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(\varepsilon\Delta u^3_\varepsilon - u^3_\varepsilon)|_\Gamma = 0 \qquad \text{et} \qquad \Delta u^3_\varepsilon|_\Gamma = 0.$$

(20) Ce cas est étudié dans Morgenstern [1].

(21) On ignore si pour $m > m' \geqslant 0$, $H^m(\Omega)$ est dense dans $H^{m'}(\Omega)$, quelque soit l'ouvert Ω. C'est vrai si la frontière de Ω est assez régulière.

Tandis que w_3 satisfait (condition de Neumann)

$$\left.\frac{\partial w_3}{\partial \nu}\right|_\Gamma = 0.$$

Exemple 1. 4. — V_4 est le sous-espace de $\mathcal{V}$ des u qui vérifient $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma = 0$ [22]. Alors $\overline{V}_{4(W)} = H^1(\Omega)$ et $w_4 = w_3$.

Les conditions satisfaites par u_ε^4 sont :

$$\left.\frac{\partial u_\varepsilon^4}{\partial \nu}\right|_\Gamma = 0 \qquad \text{et} \qquad \left.\frac{\partial}{\partial \nu}(\Delta u_\varepsilon^4)\right|_\Gamma = 0.$$

Dans chacun de ces exemples, d'après le théorème 1. 4, $u_\varepsilon^i \to w_i$ dans $H^1(\Omega)$.

Remarque 1, 2. — Le problème 1, 3 nous montre que les conditions aux limites du problème perturbé peuvent dépendre de ε.

Remarque 1, 3. — Les exemples 1, 1 et 1, 2 (resp. 1, 3 et 1, 4) nous montrent que deux familles u_ε^1 et u_ε^2 (resp. u_ε^3 et u_ε^4) de solutions de problèmes aux limites distincts peuvent avoir la même limite w_1 (resp. w_3).

2° Nous prenons H, W, $b(u, v)$ et $\mathcal{V}$ comme dans 1°, puis

$$b(\varepsilon;\ u,\ v) = \varepsilon(\Delta u,\ \Delta v)_0 - \varepsilon^2((u,\ v))_1 + ((u,\ v))_1 + (u,\ v)_0$$

qui définit l'opérateur $\varepsilon\Delta^2 + \varepsilon^2\Delta - \Delta + 1$.

Exemple 1. 5. — Soit f donnée dans $L^2(\Omega)$. Soit u_ε la [23] solution dans $\mathcal{V}$ de

$$(\varepsilon\Delta^2 u_\varepsilon + \varepsilon^2\Delta u) - \Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon = f \qquad u_\varepsilon \in N_\varepsilon$$

pour ε assez petit et w la solution dans $H^1(\Omega)$ de

$$-\Delta w + w = f; \qquad w \in N_B$$

les conditions aux limites sont, pour u_ε

$$\left.\frac{\partial}{\partial \nu}(\varepsilon\Delta u_\varepsilon + \varepsilon^2 u_\varepsilon - u_\varepsilon)\right|_\Gamma = 0 \qquad \text{et} \qquad \Delta u_\varepsilon|_\Gamma = 0$$

et, pour w $$\left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_\Gamma = 0.$$

(22) Ceci a un sens : voir Lions [1], p. 71.

(23) $b(\varepsilon;\ u,\ v)$ est elliptique sur $\mathcal{V}$ pour $\varepsilon < 1$.

Il est facile de voir que nous sommes dans les conditions d'application du théorème 1. 3. Par suite $u_\varepsilon \to w$ dans $H^1(\Omega)$, quand $\varepsilon \to 0$.

3° Nous prenons $H = L^2(\Omega)$.

Puis $W = H^{m'}(\Omega)$ et

$$\text{(I, 37)} \qquad b(u, v) = \sum_{|p|,|q| \leq m'} (b_{pq} D^q u, D^p v)_0$$

avec $b_{pq} \in L^\infty(\Omega)$. ($L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions essentiellement bornées sur Ω.) On a alors

$$\text{(I, 37')} \qquad B = \sum_{|p|,|q| \leq m'} (-1)^{|p|} D^p(b_{pq} D^q).$$

On suppose $b(u, v)$ elliptique sur $H^{m'}(\Omega)$.

On prendra pour V des sous-espaces fermés V_i de $H^m(\Omega)$, $m > m'$, et sur V

$$\text{(I, 38)} \qquad a(\varepsilon; u, v) = \sum_{|p|,|q| \leq m} (a_{pq}(\varepsilon) D^q u, D^p v)_0$$

avec $a_{pq}(\varepsilon) \in L^\infty(\Omega)$, $a_{pq}(\varepsilon)$ convergent vers 0 dans $L^\infty(\Omega)$ quand $\varepsilon \to 0$.

$a(\varepsilon; u, v)$ définit l'opérateur :

$$\text{(I, 38')} \qquad A_\varepsilon = \sum_{|p||q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p(a_{pq}(\varepsilon) D^q).$$

On suppose que, pour ε assez petit, $a(\varepsilon; u, v)$ est elliptique sur $H^m(\Omega)$ [24], et on prend

$$b(\varepsilon; u, v) = a(\varepsilon; u, v) + b(u, v).$$

Soit f donnée dans $L^2(\Omega)$.

On désigne par u_ε^i, la solution dans V_i de

(I, 39)

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{|p|,|q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p(a_{pq}(\varepsilon) D^q u_\varepsilon^i) + \sum_{|p||q| \leq m'} (-1)^{|p|} D^p(b_{pq} D^q u_\varepsilon^i) = f; \\ u_\varepsilon^i \in N_\varepsilon^i \end{cases}$$

et par w_i la solution dans $\overline{V}_{i(W)}$ de

$$\text{(I. 40)} \qquad \sum_{|p||q| \leq m'} (-1)^{|p|} D^p(b_{pq} D^q w_i) = f; \qquad w_i \in N_B^i.$$

Exemple 1, 6. — Problèmes de Dirichlet.

[24] Au sens de (1, 16').

On prend $V_1 = H_0^m(\Omega)$; alors $\overline{V}_{1(w)} = H_0^{m'}(\Omega)$.

Les conditions aux limites pour u_ε^1 sont :

$$\left.\frac{\partial^k u_\varepsilon^1}{\partial \nu^k}\right|_\Gamma = 0 \quad k = 0, 1, \ldots, m - 1$$

et pour w_1

$$\left.\frac{\partial^k w_1}{\partial \nu^k}\right|_\Gamma = 0 \quad k = 0, 1, \ldots, m' - 1.$$

Dans les deux exemples qui suivent nous supposons que Γ est une variété indéfiniment différentiable de dimensions $n - 1$. Nous utilisons alors pour interpréter les conditions aux limites le résultat suivant [25] :

Pour $k = 0, 1, \ldots, m - 1$ (resp. $k = 0, 1, \ldots, m' - 1$) il existe $S_k^\varepsilon u_\varepsilon^i$ unique dans $H'^m_k(\Gamma)$ (resp. $T_k u_\varepsilon^i$ (ou $T_k w_i$) unique dans $H'^{m'}_k(\Gamma)$) tels que

$$((A_\varepsilon + B)u_\varepsilon^i, v)_0 = a(\varepsilon; u_\varepsilon^i, v) + b(u_\varepsilon^i, v) + \sum_{k=0}^{m-1} \langle S_\varepsilon^k u_\varepsilon^i, \overline{\gamma_k v} \rangle + \sum_{k=0}^{m'-1} \langle T_k u_\varepsilon^i, \overline{\gamma_k v} \rangle$$

et

$$(Bw_i, v)_0 = b(w_i, v) + \sum_{k=0}^{m'-1} \langle T_k w_i, \overline{\gamma_k v} \rangle.$$

Exemple 1. 7. — Problèmes de Neumann.

Nous prenons $V_2 = H^m(\Omega)$. Donc $\overline{V}_{2(w)} = H^{m'}(\Omega)$.

Les conditions aux limites correspondantes sont donc, pour u_ε^2 :

$$(S_k^\varepsilon + T_k)u_\varepsilon^2 = 0 \text{ sur } \Gamma \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, \ldots, m' - 1,$$
$$S_k^\varepsilon u_\varepsilon^2 = 0 \text{ sur } \Gamma \quad \text{pour} \quad k = m', m' + 1, \ldots, m - 1$$

et pour w_2 :

$$T_k w_2 = 0 \text{ sur } \Gamma \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, \ldots, m' - 1.$$

Exemple 1. 8. — Problème de Dirichlet-Neumann mêlés.

Soit Γ_1 un sous-ensemble fermé de Γ de mesure positive. Désignons par C_1 (resp. C_2) le sous-espace de $C(\overline{\Omega})$ des fonctions f qui vérifient $\gamma_k(f) = 0$ sur Γ_1 pour $k = 0, 1, \ldots m - 1$ (resp. pour $k = 0, 1, \ldots, m' - 1$).

[25] Voir Lions [2], p. 228.

On prend pour V_3 l'adhérence dans $H^m(\Omega)$ de C_1. Alors $\overline{V}_3(w)$ est l'adhérence de C_1 dans $H^{m'}(\Omega)$. Cet espace est identique à l'adhérence dans $H^{m'}(\Omega)$ de C_2.

Alors u_ε^3 satisfait les conditions :

$$\frac{\partial^k u_\varepsilon^3}{\partial \nu^k} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \quad k = 0, 1, \ldots, m-1$$

$$(S_k^\varepsilon + T_k)u_\varepsilon^3 = 0 \quad \text{sur} \quad \complement(\Gamma_1) \quad k = 0, 1, \ldots, m'-1 \quad (^{26})$$

$$S_k^\varepsilon u_\varepsilon^3 = 0 \quad \text{sur} \quad \complement(\Gamma_1) \quad k = m', m'+1, \ldots, m$$

c'est-à-dire les conditions de Dirichlet sur Γ_1 et les conditions de Neumann sur $\complement(\Gamma_1)$.

Tandis que w_3 vérifie

$$\text{et} \quad \left.\begin{aligned} \frac{\partial^k w_3}{\partial \nu^k} &= 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \\ T_k w_3 &= 0 \quad \text{sur} \quad \complement(\Gamma_1) \end{aligned}\right\} k = 0, 1, \ldots, m'-1$$

c'est-à-dire les conditions de Dirichlet sur Γ_1 et les conditions de Neumann sur $\complement(\Gamma_1)$.

L'exemple suivant fait intervenir des dérivées obliques. On suppose toujours que Γ est une variété indéfiniment différentiable de dimension $n - 1$.

On se donne m (resp. m') opérateurs differentiels

$$A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$$

(resp. $B_0, B_1, \ldots, B_{m'-1}$) à coefficients indéfiniment différentiables, bornés ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre m (resp. m') avec A_k d'ordre $2m-1-k$, $m-1$ fois transversal à Γ, tel que $A_k^\Gamma \in \mathcal{L}(H^m(\Omega), H_k'^m(\Gamma))$ (resp. B_j d'ordre $2m'-j-1$, $m'-1$ fois transversal à Γ, avec

$$B_j^\Gamma \in \mathcal{L}(H^{m'}(\Omega);\ H_k'^{m'}(\Gamma)).$$

Nous prenons sur $H^{m'}(\Omega)$,

$$b_1(u, v) = \sum_{k=0}^{m'-1} \langle B_k^\Gamma u, \overline{\gamma_k v}\rangle + b(u, v)$$

où $b(u, v)$ est donné par (I, 37). Alors $b_1(u, v)$ définit encore B donné par (I, 37').

(26) $\complement(\Gamma_1)$ désigne le complémentaire de Γ_1.

Nous supposons $b_1(u, v)$ elliptique sur $H^{m'}(\Omega)$.

Nous prenons sur $H^m(\Omega)$:

$$a_1(\varepsilon; u, v) = \varepsilon \sum_{k=0}^{k=m-1} \langle A_k^\Gamma u, \gamma_k v\rangle + a(\varepsilon; u, v)$$

où $a(\varepsilon; u, v)$ est donnée par (I, 38). Alors $a_1(\varepsilon; u, v)$ définit A_ε donné par (I, 38′). Nous supposons $a_1(\varepsilon; u, v)$ elliptique sur V quand $\varepsilon \to 0$.

Dans ces conditions u_ε^i est encore la solution de (I, 39) et w_i la solution de (I, 40).

Exemple 1. 9. — Soit $k_1, k_2, \ldots, k_n$ des entiers distincts avec $0 \leqslant k_i \leqslant m-1$. Désignons par C_3 le sous-espace de $C(\overline{\Omega})$ des f *vérifiant* $\gamma_{k_i}(f) = 0$ *sur* Γ, *pour* $i = 1, 2, \ldots, n$ *et par* C_4 *le sous-espace de* $C(\overline{\Omega})$ *des* f telles que $\gamma_{k_i}(f) = 0$ sur Γ pour tous les i tels que $k_i \leqslant m' - 1$.

Prenons V_4 adhérence dans $H^m(\Omega)$ de C_3. Alors $\overline{V}_{4\,W)}$ est l'adhérence dans $H^{m'}(\Omega)$ de C_4.

Les conditions aux limites sont alors, pour u_ε^4:

$$\gamma_{k_i}(u_\varepsilon^4) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$
$$(S_k^\varepsilon - \varepsilon A_k^\Gamma)\, u_\varepsilon^4 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma$$

pour $k = m', m' + 1, \ldots\, m-1$, et $k \neq k_i$.

$$(S_k^\varepsilon + T_k)\, u_\varepsilon^4 - (\varepsilon A_k^\Gamma + B_k^\Gamma)\, u_\varepsilon^4 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma$$

pour $k = 0, 1, \ldots, m'-1$ et $k \neq k_i$; et pour w_4:

$$\gamma_{k_i}(w_4) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \quad \text{pour tous les } k_i \quad \text{avec} \quad k_i \leqslant m'-1.$$
$$T_k w_4 - B_k^\Gamma w_4 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma$$

pour $k = 0, 1, \ldots, m' - 1$, et $k \neq k_i$.

Dans ces conditions aux limites interviennent des dérivées obliques. Dans chacun de ces exemples de 3°, nous sommes dans les conditions d'applications du théorème 1. 5, et par suite $u_\varepsilon^i \to w_i$ dans $H^{m'}(\Omega)$.

4° *Exemples de systèmes.* — Nous prenons $H = (L^2(\Omega))^r$, r entier positif quelconque. Nous désignons par $(\vec{u}, \vec{v})_{r_0}$ le produit scalaire dans $(L^2(\Omega))^r$. Nous prenons ensuite $W = (H^{m'}(\Omega))^r$ et

$$b(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{|p||q| \quad m'} \left(B_{pq} D^q \vec{u}, D^p \vec{v}\right)_{r_0}$$

où B_{pq} est la matrice (b_{pq}^{ij}), $i, j = 1, 2, \ldots, r$ et $b_{pq}^{ij} \in L^\infty(\Omega)$.
On a alors

$$B = \sum_{|p||q| \leqslant m'} (-1)^{|p|} D^p (B_{pq} D^q).$$

On suppose $b(\vec{u}, \vec{v})$ elliptique sur $(H^{m'}(\Omega))^r$.
On prend pour V des sous-espaces fermés de $(H^m(\Omega))^r$ avec $m > m'$ et

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{|p||q| \leqslant m} (A_{pq} D^q \vec{u}, D^p \vec{v})_{r_0}$$

où A_{pq} est la matrice $(a_{pq}^{ij}) i, j = 1, 2, \ldots, r$ et $a_{pp}^{ij} \in L^\infty(\Omega)$.
On a alors

$$A = \sum_{|p|,|q| \leqslant m} (-1)^{|p|} D^p (A_{pq} D^q).$$

On suppose $\varepsilon a(\vec{u}, \vec{v}) + b(\vec{u}, \vec{v})$ elliptique sur $(H^m(\Omega))^r$ pour $\varepsilon \to 0$.
Soit $\vec{f}$ donnée dans $(L^2(\Omega))^r$: $f = (f_1, \ldots, f_r)$, $f_i \in L^2(\Omega)$. Soit $\vec{u}_\varepsilon$ la solution dans V du système

$$(\varepsilon A + B)\vec{u}_\varepsilon = \vec{f}; \quad \vec{u}_\varepsilon \in N_\varepsilon$$

et $\vec{w}$ la solution dans $\overline{V}(W)$ du système :

$$B\vec{w} = \vec{f}; \quad \vec{w} \in N_B.$$

En fait $\vec{u}_\varepsilon$ est de la forme $(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon, \ldots, u_r^\varepsilon)$ avec $u_i^\varepsilon \in H^m(\Omega)$ et $\vec{w}$ est de la forme $(w_1, w_2, \ldots, w_r)$ avec $w_i \in H^{m'}(\Omega)$. Les systèmes précédents s'écrivent :

$$\varepsilon \sum_{|p|,|q| \leqslant m} (-1)^{|p|} D^p \sum_{j=1}^{r} a_{pq}^{ij} D^q u_j^\varepsilon + \sum_{|p||q| \leqslant m'} (-1)^{|p|} D^p \sum_{j=1}^{r} b_{pq}^{ij} D^q u_j^\varepsilon = f_i$$
$$i = 1, 2, \ldots, r$$

et

$$\sum_{|p||q| \leqslant m'} (-1)^{|p|} D^p \sum_{j=1}^{r} b_{pq}^{ij} D^q w_j = f_i \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Exemples 1. 10. — Prenons $r = 3$, et $V = V_1 \times V_2 \times V_3$ avec V_i, $i = 1, 2, 3$ des exemples de 3°.
Alors $\overline{V}_{(W)} = \overline{V}_{1(W)} \times \overline{V}_{2(W)} \times \overline{V}_{3(W)}$.

les conditions aux limites sont donc pour $\vec{u}_\varepsilon$:

$$\frac{\partial^p u_1^\varepsilon}{\partial \nu^p} = 0 \text{ sur } \Gamma \text{ pour } p = 0, 1, \ldots, m-1.$$

$$(\varepsilon S_k + T_k)u_2^\varepsilon|_\Gamma = 0 \qquad \text{pour } k = 0, \ldots, m'-1;$$
$$S_k u_2|_\Gamma = 0 \qquad \text{pour } k = m', \ldots, m-1.$$

$$\left.\frac{\partial^p u_3^\varepsilon}{\partial \nu^p}\right|_{\Gamma_1} = 0, \quad k = 0, \ldots, m-1;$$

$$(\varepsilon S_k + T_k)u_3^\varepsilon\Big|_{\complement(\Gamma_1)} = 0, \quad k = 0, \ldots, m'-1;$$

$$S_k u_3^\varepsilon\Big|_{\complement(\Gamma_1)} = 0, \quad k = m', \ldots, m.$$

et pour $\vec{w}$

$$\left.\frac{\partial^p w_1}{\partial \nu^p}\right|_\Gamma = 0 \quad p = 0, 1, \ldots, m'-1;$$

$$T_k w_2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma \text{ pour } k = 0, \ldots, m'-1.$$

et

$$\left.\frac{\partial^k w_3}{\partial \nu^k}\right|_{\Gamma_1} = 0 \quad T_k w_3 = 0 \quad \text{sur } \complement(\Gamma_1) \quad k = 0, 1, \ldots, m'-1.$$

Nous étudions, dans les deux numéros qui suivent, le cas particulier où $b(\varepsilon; u, v) = \varepsilon a(u, v) + b(u, v)$, et où (I, 33) est vérifié. Nous allons, dans ce cas, compléter les résultats du théorème 1. 4 en faisant des hypothèses de régularité supplémentaires sur Ω ou sur les opérateurs A et B (A est l'opérateur défini par $a(u, v)$ sur V.)

4. — Théorème de convergence locale pour des opérateurs A et B « réguliers ».

Espaces H^k [27].

Pour k réel quelconque, H^k est l'espace Hilbertien des $T \in \mathcal{S}'$ ($\mathcal{S}'$ est l'espace des distributions tempérées) telles que $(1 + r^2)^{k/2}\, \hat{T} \in L^2$ ($\hat{T}$ étant la transformée de Fourier de T) muni du produit scalaire

$$(S, T)_{H^k} = ((1 + r^2)^{k/2}\, \hat{S},\ (1 + r^2)^{k/2}\, \hat{T})_0 \ ^{(28)}.$$

(27) Pour les espaces H^k et $\mathcal{L}^k(\Omega)$. Voir Schwartz [5] pp. 2 et 39.

(28) $r^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

Nous noterons $\|T\|_k$ la norme de T dans H^k.

Pour k entier positif, nous retrouvons l'espace introduit au nº 1, avec $\Omega = R^n$. L'espace H^{-k} est alors formé des distributions de la forme $T = \sum_{|p| \leqslant k} D^p f_p$, où les $f_p \in L^2$. Le dual de H^k, muni de sa structure d'espace de Banach est isomorphe à H^{-k}.

Rappelons quelques propriétés des espaces H^k. Si $k > k'$, $H^k \subset H^{k'}$. L'espace $\mathfrak{D}(R^n)$ est dense dans H^k. La dérivation D^r est une application continue de H^k dans $H^{k-|r|}$. Enfin, si $a(x) \in \mathfrak{D}$ et si $T \in H^k$, alors $a(x)T \in H^k$, et l'application $T \to a(x)T$ de H^k dans H^k est continue.

Espace $\mathcal{L}^k(\Omega)$.

C'est l'espace des distributions u telles que $\varphi u \in H^k$ pour toute $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$. Des $u_j \to 0$ dans $\mathcal{L}^k(\Omega)$ si et seulement si $\varphi u_j \to 0$ dans H^k pour toute $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$.

L'ouvert Ω est quelconque dans R^n. Nous prenons

$$\text{(I, 41)} \qquad A = \sum_{|p||q| \leqslant m} (-1)^{|p|} D^p(a_{pq}(x)\, D^q)$$

$$\text{(I, 42)} \qquad B = \sum_{|p||q| \leqslant m'} (-1)^{|p|} D^p(b_{pq}(x) D^q)$$

où $a_{pq}(x)$ et $b_{pq}(x)$ *sont des fonctions indéfiniment dérivables sur* Ω. On suppose aussi $m > m'$.

Nous faisons sur A et B les hypothèses d'ellipticité suivantes : il existe des nombres positifs α et β (ε) tels que l'on ait

$$\text{(1, 43)} \quad Re(B\varphi, \varphi)_0 \geqslant \alpha\|\varphi\|_m^2 \quad \text{pour toute} \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

$$\text{(1, 44)} \quad \varepsilon Re(A\varphi, \varphi)_0 + Re(B\varphi, \varphi)_0 \geqslant \beta(\varepsilon)\|\varphi\|_m^2$$

pour toute $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ et ε assez petit.

Soit, pour ε assez petit, $u_\varepsilon \in \mathcal{L}^m(\Omega)$ vérifiant

$$\text{(1, 45)} \qquad (\varepsilon A + B)u_\varepsilon = f.$$

Nous savons, d'après Friedrichs [1] que si $f \in \mathcal{L}^k(\Omega)$, alors $u_\varepsilon \in \mathcal{L}^{2m+k}(\Omega)$. Nous allons montrer la

Proposition 1. 6. — *Soit* A (*resp.* B) *un opérateur de la forme* (1, 41) (*resp.* (1, 42)) *avec les conditions d'éllipticité* (1, 43) *et* (1, 44) *et f donnée dans* $\mathcal{L}^k(\Omega)$, *k entier quelconque. Si* $u_\varepsilon \in \mathcal{L}^m(\Omega)$,

vérifiant (1, 45), *est borné dans* $\mathcal{L}^{m'}(\Omega)$ *et si* $\varepsilon^{1/2}u_\varepsilon$ *est borné dans* $\mathcal{L}^{m}(\Omega)$, *alors* u_ε *est borné dans* $\mathcal{L}^{2m'+k}(\Omega)$, $\varepsilon^{1/2}u_\varepsilon$ *est borné dans* $\mathcal{L}^{m+m'+k}(\Omega)$ *et* $\varepsilon u_\varepsilon$ *est borné dans* $\mathcal{L}^{m+k}(\Omega)$.

Démonstration. — Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Posons $w_\varepsilon = \varphi u_\varepsilon$. Il nous suffit de montrer

a) $D^j w_\varepsilon$ est borné dans $H^{m'}$ pour $|j| \leqslant k + m'$,

b) $\varepsilon^{1/2} D^j w_\varepsilon$ est borné dans H^m pour $|j| \leqslant k + m'$,

c) $\varepsilon D^j w_\varepsilon$ est borné dans H^m pour $|j| \leqslant k + m$.

Calculons tout d'abord, pour $|j| \leqslant k + m$, $(\varepsilon A + B)\, D^j w_\varepsilon$.

Nous utilisons le résultat suivant : Λ étant un opérateur différentiel d'ordre 2μ, à coefficients indéfiniment dérivables sur Ω, on a

$$(1,\ 46)\quad \Lambda(D^j(\varphi u)) = D^j(\varphi \Lambda u) + D^j(\Lambda_2 u) + \Lambda_1(\varphi u).$$

où Λ_1 (resp. Λ_2) est un opérateur d'ordre $2\mu + |j| - 1$ (resp. $2\mu - 1$) à coefficients indéfiniment dérivables (resp. indéfiniment dérivables à support compact) sur Ω.

En effet en utilisant la formule de Leibnitz, on obtient :

$$\Lambda(D^j(\varphi u)) - D^j \Lambda(\varphi u) = \Lambda_1(\varphi u)$$

où Λ_1 est un opérateur à coefficients indéfiniment dérivables d'ordre

$$2\mu + |j| - 1$$

et

$$\Lambda(\varphi u) = \varphi(\Lambda u) + \Lambda_2 u$$

où Λ_2 est un opérateur d'ordre $2\mu - 1$ à coefficients indéfiniment dérivables à support compact. D'où (1, 46).

On en déduit :

$$B(D^j w_\varepsilon) = D^j(\varphi B u_\varepsilon) + D^j B^{(2)}_{(\varphi)} u_\varepsilon + B^{(1)} w_\varepsilon$$

où $B^{(1)}$ (resp. $B^{(2)}_{(\varphi)}$) est un opérateur d'ordre $2m' + |j| - 1$ (resp. $2m' - 1$)) à coefficients indéfiniment dérivables (resp. indéfiniment dérivables à support compact) et

$$A(D^j w_\varepsilon) = D^j(\varphi A u_\varepsilon) + D^j A^{(2)}_{(\varphi)} u_\varepsilon + A^{(1)} w_\varepsilon$$

où $A^{(1)}$ (resp. $A^{(2)}_{(\varphi)}$) est un opérateur d'ordre $2m + |j| - 1$ (resp. $2m - 1$) à coefficients indéfiniment dérivables (resp. indéfiniment dérivables à support compact).

D'où finalement, en tenant compte de (1, 45)

$$(1, 47) \quad (\varepsilon A + B)D^j w_\varepsilon = D^j(\varphi f) + D^j((\varepsilon A^{(2)}_{(\varphi)} + B^{(2)}_{(\varphi)})u_\varepsilon) + \varepsilon A^{(1)} w_\varepsilon + B^{(1)} w_\varepsilon.$$

Montrons maintenant les assertions *a*) et *b*) par récurrence [29]. Elles sont vraies pour $j = 0$, par hypothèse. Supposons qu'elles soient vraies pour tout r avec $|r| \leqslant |j| - 1$ et montrons les pour j avec $|j| \leqslant k + m'$. Il résulte des propriétés des espaces H^k, des propriétés des opérateurs $A^{(1)}$, $A^{(2)}_{(\varphi)}$, $B^{(1)}$, $B^{(2)}_{(\varphi)}$, et des hypothèses de récurrence que $D^j(\varepsilon^{1/2}A^{(2)}_{(\varphi)}u_\varepsilon) + \varepsilon^{1/2}A^{(1)}w_\varepsilon$ (resp. $D^j(B^{(2)}_{(\varphi)}u) + B^{(1)}w_\varepsilon$) est borné dans H^{-m} (resp. $H^{-m'}$). D'autre part $D^j(\varphi f)$ est dans $H^{k-|j|}$, donc dans $H^{-m'}$, puisque $|j| \leqslant k + m'$. On déduit donc de (1, 47) :

$$(1, 48) \quad |\langle(\varepsilon A + B)D^j w_\varepsilon, \overline{D^j w_\varepsilon}\rangle| \leqslant ||D^j(\varphi f)||_{-m'} ||D^j w_\varepsilon||_{m'} + C_1||D^j(\varepsilon^{1/2} w_\varepsilon)||_m + C_2||D^j w_\varepsilon||_{m'}$$

où le crochet désigne la dualité entre H^m et H^{-m} [30], et où les constantes C_1 et C_2 sont indépendantes de ε et de f. Or, on déduit de (1, 43) et (1, 44) : il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que l'on ait :

$$(1, 49) \quad \mathrm{R}e(B\varphi, \varphi)_0 \geqslant \alpha||\varphi||^2_{m'}, \quad \text{pour toute} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

et

$$(1, 50) \qquad \mathrm{R}e(\varepsilon(A\varphi, \varphi)_0 + (B\varphi, \varphi)_0) \geqslant \beta\varepsilon||\varphi||^2_m$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et tout $\varepsilon \leqslant 1$.

Par suite, si $\mathrm{R}e(A\varphi, \varphi)_0 > 0$, on a

$$(1, 51) \quad \mathrm{R}e(\varepsilon(A\varphi, \varphi)_0 + (B\varphi, \varphi)_0) \geqslant \frac{1}{2}(\alpha||\varphi||^2_{m'} + \beta\varepsilon||\varphi||^2_m).$$

et si $\mathrm{R}e(A\varphi, \varphi)_0 \leqslant 0$:

$$(1, 52) \qquad \mathrm{R}e\{\varepsilon(A\varphi, \varphi)_0 + (B\varphi, \varphi)_0\} \geqslant \beta||\varphi^2_m||.$$

On déduit facilement *a*) et *b*) de (1, 48), (1, 51) et (1, 52), comme il est fait dans la démonstration du théorème 1. 4.

Nous montrons *c*) également par récurrence, puisque cette assertion est vraie d'après *b*) pour $|j| \leqslant k + m'$ [31]. Reprenons

(29) Nous supposons $k + m' > 0$. En effet, si nous avons $k + m' \leqslant 0$, alors $\mathcal{L}^{m'}(\Omega) \subset \mathcal{L}^{2m'+k}(\Omega)$ et $\mathcal{L}^m(\Omega) \subset \mathcal{L}^{m+m'+k}(\Omega)$.

(30) Pour $T \in H^{-m}$ et $\varphi \in H^m$, on a

$$\langle T, \varphi\rangle = ((1 + r^2)^{-m/2}T, (1 + r^2)^{m/2}\varphi)_0 \quad \text{et} \quad |\langle T, \varphi\rangle| \leqslant ||T||_{-m}||\varphi||_m.$$

(31) On peut aussi supposer $k + m > 0$.

(1, 47). Pour $|j| \leqslant k+m$, $D^j(\varphi f) \in H^{-m}$, chacun des termes dans l'expression de $B(D^j w_\varepsilon)$ est borné dans H^{-m}, d'après *a*), et d'après l'hypothèse de récurrence, $\varepsilon(D^j A^{(2)}_{(\varphi)} u_\varepsilon + A^{(1)} w_\varepsilon)$ est borné dans H^{-m}. Par suite $A(\varepsilon D^j w_\varepsilon)$ est borné dans H^{-m}. Mais d'après (1, 50) et *b*), on a

$$(1, 53) \qquad \beta \| \varepsilon D^j w_\varepsilon \|_m^2 \leqslant |\langle \varepsilon A D^j w_\varepsilon, \overline{\varepsilon D^j w_\varepsilon} \rangle| - K\varepsilon$$

où K est une constante indépendante de ε. D'où le résultat.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème de convergence locale suivant

THÉORÈME 1. 9. — *Soit* A (*resp.* B) *un opérateur de la forme* (1, 41) (*resp.* (1, 42)) *à coefficients indéfiniment dérivables sur* Ω, *avec les conditions d'éllipticité* (1, 43) *et* (1, 44) *et f donnée dans* $\mathcal{L}^k(\Omega)$ *k entier quelconque. Si lorsque* $\varepsilon \to 0$, $u_\varepsilon \in \mathcal{L}^m(\Omega)$, *vérifiant* (1, 45) *converge dans* $\mathcal{L}^{m'}(\Omega)$ *vers* w *vérifiant*

$$(1, 54) \qquad Bw = f$$

et si $\varepsilon^{1/2} u_\varepsilon \to 0$ *dans* $\mathcal{L}^m(\Omega)$, *alors* $u_\varepsilon \to w$ *dans* $\mathcal{L}^{2m'+k}(\Omega)$, $\varepsilon^{1/2} u_\varepsilon \to 0$ *dans* $\mathcal{L}^{m+m'+k}(\Omega)$ *et* $\varepsilon u_\varepsilon \to 0$ *dans* $\mathcal{L}^{2m+k}(\Omega)$.

Démonstration ([32]). — Soit $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$. Posons $\tilde{u}_\varepsilon = \varphi u_\varepsilon$ et $\tilde{w} = \varphi w$.

Par hypothèse, $\tilde{u}_\varepsilon$ (resp. $\varepsilon^{1/2}\, \tilde{u}_\varepsilon$) est borné dans $H^{m'}$ (resp. H^m). Par suite de la proposition 1.6, $\tilde{u}_\varepsilon$ (resp. $\varepsilon^{1/2}\, \tilde{u}_\varepsilon$) est donc borné dans H^{2m+k} (resp. $H^{m+m'+k}$). De toute suite $\tilde{u}_{\varepsilon_n}$, on peut donc extraire une sous-suite $\tilde{u}_{\varepsilon_p}$, telle que $\tilde{u}_{\varepsilon_p}$ (resp. $\varepsilon_p^{1/2} \tilde{u}_{\varepsilon_p}$) converge faiblement dans $H^{2m'+k}$ (resp. $H^{m+m'+k}$) vers une limite qui ne peut être que $\tilde{w}$ (resp. 0), puisque $\tilde{u}_\varepsilon \to \tilde{w}$ dans $H^{m'}$ (resp. $\varepsilon^{1/2} \tilde{u}_\varepsilon \to 0$ dans H^m) par hypothèse. Mais on a, d'après (1, 45) :

$$(1, 55) \qquad B(D^j \tilde{w}) = D^j(\varphi f) + B^{(1)} \tilde{w} + D^j(B^{(2)}_{(\varphi)} w).$$

D'où, en tenant compte de (1, 47)

$$(1, 56) \qquad (\varepsilon A + B)\, D^j \tilde{u}_\varepsilon = B(D^j \tilde{w}) + \varepsilon a_j^\varepsilon + b_j^\varepsilon$$

avec

$$(1, 57) \qquad a_j^\varepsilon = D^j(A^{(2)}_{(\varphi)} u_\varepsilon) + A^{(1)} \tilde{u}_\varepsilon$$

et

$$(1, 58) \qquad b_j^\varepsilon = D^j(B^{(2)}_{(\varphi)}(u_\varepsilon - w)) + B^{(1)}(\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{w}).$$

([32]) On peut supposer $k + m' > 0$.

Nous raisonnons par récurrence. Supposons que $\tilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup \tilde{w}$ dans $H^{m'+|j|-1}$ et que $\varepsilon^{1/2}\tilde{u}_\varepsilon \to 0$ dans $H^{m+|j|-1}$, où $|j| \leqslant k + m'$. Alors $\varepsilon^{1/2}a_j^\varepsilon \to 0$ dans H^{-m} et $b_j^\varepsilon \to 0$ dans $H^{-m'}$. D'autre part, on a :

$$\varepsilon\langle AD^j\tilde{u}_\varepsilon, \overline{D^j\tilde{u}_\varepsilon}\rangle + \langle BD^j(\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{w}), \overline{D^j(\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{w})}\rangle$$
$$= \langle BD^j\tilde{w} + \varepsilon a_j^\varepsilon + b_j^\varepsilon, \overline{D^j\tilde{u}_\varepsilon}\rangle + \langle BD^j\tilde{w}, \overline{D^j(\tilde{w} - \tilde{u}_\varepsilon)}\rangle - \langle BD^j\tilde{u}_\varepsilon, \overline{D^j\tilde{w}}\rangle.$$

Il résulte des propriétés de a_j^ε et b_j^ε, de la proposition 1. 5, et de la convergence faible $\tilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup \tilde{w}$ dans $H^{2m'+k}$, que le second membre converge vers 0.

Or, comme $D^j\tilde{u}_\varepsilon$ est borné dans $H^{m'}$, on a d'après (1, 49) et (1, 50) :

$$\beta\|\varepsilon^{1/2}D^j\tilde{u}_\varepsilon\|_m^2 - K\varepsilon + \alpha\|D^j(\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{w})\|_{m'}^2$$
$$\leqslant \operatorname{Re}\{\varepsilon\langle AD^j\tilde{u}_\varepsilon, \overline{D^j\tilde{u}_\varepsilon}\rangle + \langle BD^j(\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{w}), \overline{D^j(\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{w})}\rangle\}$$

où K est une constante indépendante de ε. On en déduit donc que $\tilde{u}_\varepsilon \to \tilde{w}$ dans $H^{m'+|j|}$ et que $\varepsilon^{1/2}\tilde{u}_\varepsilon \to 0$ dans $H^{m+|j|}$.

Supposons enfin que $\varepsilon\tilde{u}_\varepsilon \to 0$ dans $H^{m+|j|-1}$, avec $|j| \leqslant k + m$. Alors $\varepsilon a_j^\varepsilon \to 0$ dans H^{-m}. De plus, d'après les résultats précédents, b_j^ε ainsi que $B(D^j(\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{w}))$ convergent vers 0 dans H^{-m}, et par suite de (1, 56) $A(\varepsilon D^j\tilde{w}_\varepsilon)$ converge vers 0 dans H^{-m}. D'où le résultat, d'après (1, 53).

Applications aux problèmes aux limites.

Reprenons les hypothèses et les notations du théorèmes 1. 4. Chaque fois que la topologie de V (resp. W) coïncide *localement* avec la topologie de H^m (resp. $H^{m'}$), et que $a(u, v)$ (resp. $b(u, v)$) définit un opérateur de la forme (1, 41) (resp. 1, 42), à coefficients indéfiniment dérivables sur Ω, on aura le théorème suivant :

THÉORÈME 1. 10. — *Dans les conditions précédentes, pour tout ouvert borné avec* $\overline{\mathfrak{a}} \subset \Omega$, *pour lequel* $f \in H^k(\mathfrak{a})$, *k entier, alors* $u_\varepsilon \to w$ *dans* $H^{2m'+k}(\mathfrak{a})$, $\varepsilon^{1/2}u_\varepsilon \to 0$ *dans* $H^{m+m'+k}(\mathfrak{a})$ *et* $\varepsilon u_\varepsilon \to 0$ *dans* $H^{2m+k}(\mathfrak{a})$.

Exemples. — Reprenons les exemples 1-1, 1-2, 1-3 et 1-4 du n° 3. La topologie de V coïncide localement avec celle de H^2. Par suite pour tout ouvert borné $\mathfrak{a}$ avec $\overline{\mathfrak{a}} \subset \Omega$, pour lequel $f \in H^k(\mathfrak{a})$, on aura $u_\varepsilon^i \to w_i$, pour $i = 1, \ldots, 4$, dans $H^{2+k}(\mathfrak{a})$.

Remarque. — Les résultats précédents s'appliquent aux systèmes différentiels du nº 3 dans lesquels on suppose que les b^{ij}_{pq} et les a^{ij}_{pq} sont indéfiniment dérivables sur Ω.

5. — Théorème de convergence à la frontière pour un ouvert régulier et des opérateurs A et B réguliers.

Nous faisons les hypothèses suivantes :

a) Ω est borné et sa frontière Γ est une variété indéfiniment dérivable de dimension $n-1$;

b) $W = H^{m'}(\Omega)$; $V = H^m(\Omega)$ (resp. $H^m_0(\Omega)$) $m > m'$.

Nous prenons sur W (resp. V) $b(u, v)$ définie par

$$b(u, v) = \sum_{|p||q| \leqslant m'} (b_{pq} D^q u, D^p v)_0 \tag{1, 59}$$

(resp. $a(u, v)$ définie par

$$a(u, v) = \sum_{|p||q| \leqslant m} (a_{pq} D^q u, D^p v)_0 \tag{1, 60}$$

avec

c) a_{pq} et b_{pq} sont indéfiniment dérivables sur $\overline{\Omega}$.

d) $b(u, v)$ est elliptique sur $H^{m'}(\Omega)$,

e) $\varepsilon a(u, v) + b(u, v)$ est elliptique sur $H^m(\Omega)$ (resp. $H^m_0(\Omega)$) pour ε assez petit.

Soit f donnée dans $H^k(\Omega)$, k entier $\geqslant 0$.

Soit u_ε la solution de

$$u_\varepsilon \in H^m(\Omega) \text{ (resp. } H^m_0(\Omega)) \tag{1, 61}$$

et

$$\varepsilon a(u_\varepsilon, v) + b(u_\varepsilon, v) = (f, v) \quad \text{pour tout} \quad v \in H^m(\Omega) \text{ (resp. } H^m_0(\Omega))$$

et w la solution de

$$w \in H^{m'}(\Omega) \text{ (resp. } H^{m'}_0(\Omega)) \tag{1, 62}$$

et

$$b(w, v) = (f, v) \qquad \text{pour tout} \qquad v \in H^{m'}(\Omega) \text{ (resp. } H^{m'}_0(\Omega)).$$

Nous savons d'après Nirenberg [1] et Browder [1] ([33]) que $u_\varepsilon \in H^{2m+k}(\Omega)$ et que $w \in H^{2m'+k}(\Omega)$.

([33]) Cf. aussi une démonstration dans Lions [3].

On pourrait croire que, lorsque $\varepsilon \to 0$, $u_\varepsilon \to w$ dans $H^{2m'+k}(\Omega)$. Ce résultat est faux en général comme le montre l'exemple trivial suivant :

Nous prenons $V = H^1(\Omega)$ (resp. $H^1_0(\Omega)$) et $W = L^2(\Omega)$.

$a(u, v) = (u, v)_1$ qui définit l'opérateur $-\Delta$.

$$b(u, v) = (u, v)_0.$$

Soit $f \in H^k(\Omega)$ et u_ε la solution dans $H^1(\Omega)$ (resp. $H^1_0(\Omega)$) de

$$-\varepsilon\Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon = f; \qquad u_\varepsilon \in N_\varepsilon$$

alors $u_\varepsilon \to w = f$ dans $L^2(\Omega)$. Supposons que $u_\varepsilon \to w$ dans $H^k(\Omega)$, $k > 1$. Comme u_ε satisfait la condition aux limites $(\partial u_\varepsilon/\partial \nu)_\Gamma = 0$ (resp. $u_\varepsilon|_\Gamma = 0$) on aurait

$$(\partial w/\partial \nu)_\Gamma = (\partial f/\partial \nu)_\Gamma = 0 \quad (\text{resp. } w = |_\Gamma = f|_\Gamma = 0)$$

ce qui est absurde puisque f est quelconque dans $H^k(\Omega)$.

Cependant nous obtenons le résultat suivant sur la convergence des dérivées tangentielles, notées D^j_t :

THÉORÈME 1.11. — *Sur toute carte locale* U, *sous les hypothèses a), b), c), d), e) :*

$$\begin{aligned} &D^j_t u_\varepsilon \to D^j_t w \quad \textit{dans} \quad H^{m'}(U) \quad \textit{pour} \quad |j| \leqslant k + m' \\ &\varepsilon^{1/2} D^j_t u_\varepsilon \to 0 \quad \textit{dans} \quad H^{m}(U) \quad \textit{pour} \quad |j| \leqslant k + m' \\ &\varepsilon D^j_t u_\varepsilon \to 0 \quad \textit{dans} \quad H^{m}(U) \quad \textit{pour tout} \quad |j| \leqslant k + m. \end{aligned}$$

Démonstration. — Nous faisons la démonstration pour $V = H^m(\Omega)$ et $W = H^{m'}(\Omega)$. Il n'y a pas de difficulté à l'étendre au cas où $V = H^m_0(\Omega)$ et $V_{(W)} = H^{m'}_0(\Omega)$.

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert le long de Γ, applicable par un homéomorphisme indéfiniment différentiable ψ sur W(*) défini par $\{0 < \xi_i < 1,\ i = 1, \ldots, n-1 \text{ et } -1 < \xi_n < 1\}$; tel que $U = \mathcal{O} \cap \Omega$ s'applique sur W^+ défini par $\{0 < \xi_i < 1,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ et $\mathcal{O} \cap \Gamma$ sur $W_0 = W \cap \{\xi_n = 0\}$.

Pour tout $\delta > 0$, désignons par W^+_δ l'ensemble défini par $\{\delta < \xi_i < 1 - \delta,\ i = 1, 2, \ldots, n-1,\ 0 < \xi_n < 1 - \delta\}$. Soit $U_\delta = \psi^{-1}(W^+_\delta)$.

Par transport de structure [34], ψ définit un isomorphisme de $H^s(U)$ sur $H^s(W^+)$, pour tout s entier $\geqslant 0$. De même ψ définit un isomorphisme entre le sous-espace $H^s_1(U)$ de $H^s(U)$

[34] Voir Schwartz [6], p. 21.

(*) Aucune confusion n'est possible avec l'espace de Hilbert W qui est ici $H^{m'}(\Omega)$.

des fonctions identiquement nulles près de $\partial U - \Gamma$ [35], et le sous-espace $H^s_1(W^+)$ de $H^s(W^+)$ des fonctions identiquement nulles près de $\partial W^+ - W_0$.

Soit $\delta > 0$. Il existe δ_1 avec $0 < \delta_1 < \delta$. Alors, toujours par transport de structure, ψ définit un isomorphisme entre le sous-espace C_δ des fonctions de $C(\overline{U})$, égales à 1 sur U_δ et identiquement nulles sur $U - U_{\delta_1}$ et le sous-espace $\tilde{C}_\delta$ des fonctions de $C\left(\overline{W^+}\right)$ égales à 1 sur W^+_δ et identiquement nulles sur $W^+ - W^+_{\delta_1}$.

La forme sesquilinéaire $b(u, v)$ définit par restriction une forme sesquilinéaire continue sur $H^{m'}(U)$. On peut donc définir, l'image par ψ de $b(u, v)$, soit $\tilde{b}(\tilde{u}, \tilde{v}) = b(\psi^{-1}\tilde{u}, \psi^{-1}\tilde{v})$, qui est une forme sesquilinéaire continue sur $H^{m'}(W^+)$. On définira de même sur $H^m(W^+)$ l'image par ψ de $a(u, v)$ soit $\tilde{a}(\tilde{u}, \tilde{v}) = a(\psi^{-1}u, \psi^{-1}v)$. Par définition même $\tilde{a}(\tilde{u}, \tilde{v})$ et $\tilde{b}(\tilde{u}, \tilde{v})$ sont de la forme :

$$(1, 63) \qquad \tilde{a}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \sum_{|p||q| \leqslant m} (\tilde{a}_{pq} D^q \tilde{u}, D^p \tilde{v})_0$$

et

$$(1, 64) \qquad \tilde{b}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \sum_{|p|, |q| \leqslant m'} (\tilde{b}_{pq} D^q \tilde{u}, D^p \tilde{v})_0$$

où $\tilde{a}_{pq}$ et $\tilde{b}_{pq}$ sont indéfiniment dérivables sur $\overline{W^+}$.

Désignons par $(u_\varepsilon)_U$, $(w)_U$ et $(f)_U$ les restrictions à U de u_ε w et f. D'après (1, 61) (resp. (1, 62)) nous avons

$$\varepsilon a((u_\varepsilon)_U, v) + b((u_\varepsilon)_U, v) = ((f)_U, v)_0 \quad \text{pour tout} \quad v \in H^m_1(U)$$
$$(\text{resp. } b((w)_U, v) = ((f)_U, v)_0 \quad \text{pour tout} \quad v \in H^{m'}_1(U))$$

et, par suite, en désignant par $\tilde{u}_\varepsilon$, $\tilde{w}$ et $\tilde{f}$ les images par ψ de $(u_\varepsilon)_U$, $(w)_U$ et $(f)_U$:

$$(1, 65) \quad \varepsilon\tilde{a}(\tilde{u}_\varepsilon, v) + \tilde{b}(\tilde{u}_\varepsilon, v) = (\tilde{f}, v)_0 \quad \text{pour tout} \quad v \in H^m_1(W^+)$$

et

$$(1, 66) \quad b(\tilde{w}, \tilde{v}) = (\tilde{f}, v)_0 \quad \text{pour tout} \quad v \in H^{m'}_1(W^+).$$

Remarquons enfin que $b(u, v)$ (resp. $\varepsilon a(u, v) + b(u, v)$) étant elliptique par restriction sur $H^{m'}_1(U)$ (resp. $H^m_1(U)$ quand $\varepsilon \to 0$) $\tilde{b}(\tilde{u}, \tilde{v})$ (resp. $\varepsilon\tilde{a}(\tilde{u}, \tilde{v}) + \tilde{b}(\tilde{u}, \tilde{v})$) est elliptique sur

[35] Pour un ouvert Ω, $\partial\Omega$ désigne la frontière de Ω.

$H_1^{m'}(W)^+$ (resp. $H_1^m(W^+)$ quand $\varepsilon \to 0$). Par suite il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que

$$\begin{aligned} Re(\tilde{b}(u, u)) &\geqslant \alpha\|u\|_{m'}^2 \quad \text{pour tout} \quad u \in H_1^{m'}(W^+) \text{ [36]} \\ Re(\tilde{a}(u, u) + \tilde{b}(u, u)) &\geqslant \beta\|u\|_m^2 \quad \text{pour tout} \quad u \in H_1^m(W^+). \end{aligned}$$

On en déduit comme au n° 3, pour $\varepsilon \leqslant 1$:

(1, 67)

$$Re(\varepsilon\tilde{a}(u, u) + \tilde{b}(u, u)) \geqslant \frac{1}{2}(\alpha\|u\|_{m'}^2 + \beta\varepsilon\|u\|_m^2) \begin{cases} \text{pour tout } u \in H_1^m(W^+) \\ \text{avec } Re(a(u, u)) > 0 \end{cases}$$

et

$$\text{(1, 68)} \qquad Re(\varepsilon\tilde{a}(u, u) + \tilde{b}(u, u)) \geqslant \beta\|u\|_m^2$$

pour tout $u \in H_1^m(W^+)$ avec $Re(a(u, u)) \leqslant 0$.

Enfin, si u est dans un borné B de $H_1^{m'}(W^+)$ pour lequel $Re\tilde{b}(u, u) < K$, alors

$$\text{(1, 69)} \quad Re(\varepsilon\tilde{a}(u, u) + \tilde{b}(w, w)) \geqslant \alpha\|w\|_{m'}^2 + \beta\varepsilon\|u\|_m^2 - K\varepsilon$$

pour tout $u \in B$, $w \in H_1^{m'}(W^+)$.

Nous devons montrer que pour tout $\delta > 0$, étant donnée $\varphi \in C_\delta$, alors $D_t^j(\varphi u_\varepsilon) \to D_t^j(\varphi u)$ dans $H^{m'}(U)$ pour $|j| \leqslant k + m'$ etc..., ce qui revient à montrer, d'après ce qui précède que $D_t^j\tilde{\varphi}(\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{w}) \to 0$ dans $H^{m'}(W^+)$ et $D_t^j(\varepsilon^{1/2}\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon) \to 0$ dans $H^m(W^+)$ pour $|j| \leqslant k + m'$ et que $\varepsilon D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon) \to 0$ dans $H^m(W^+)$ pour $|j| \leqslant k + m$, où $j = (j_1, \ldots, j_{n-1}, 0)$ [37].

Nous savons que $u_\varepsilon \in H^{2m+k}(\Omega)$. Par suite $\tilde{u}_\varepsilon \in H^{2m+k}(W^+)$. Calculons pour $|j| \leqslant k + m$, et pour $v \in C(\overline{W^+})$, identiquement nulle près de $\partial W^+ - W_0$:

$$\varepsilon\tilde{a}(D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon), v) + \tilde{b}(D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon), v).$$

D'après la formule (1, 46) du n° 4, on aura pour $|p|\,|q| \leqslant m'$

$$\text{(1, 70)} \quad \tilde{b}_{pq}D^qD_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon) = D_t^j(\tilde{b}_{pq}\tilde{\varphi}D^q\tilde{u}_\varepsilon) + D_t^j(B_{pq}^{(2)}\tilde{u}_\varepsilon) + B_{pq}^{(1)}(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon).$$

où

$$B_{pq}^{(1)}(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon) = -\sum_{1 \leqslant |r| \leqslant |j|} \alpha_r D_t^r(\tilde{b}_{pq})D_t^{j-r}D^q(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)$$

et

$$B_{pq}^{(2)}(\tilde{u}_\varepsilon) = \tilde{b}_{pq} \sum_{1 \leqslant |r| \leqslant |q|} \beta_r D^r(\tilde{\varphi})D^{q-r}(\tilde{u}_\varepsilon).$$

[36] On désigne par $\|u\|_s$ la norme de u dans $H_1^s(W^+)$.

[37] $\tilde{\varphi} = \psi(\varphi)$. Dans l'espace des $\{\xi_i\}$ nous notons par D_t^s toute dérivée avec $s = s_1, \ldots, s_{n-1}, 0)$.

On aura de même pour $|p||q| \leqslant m$.

$$(1, 71) \quad \tilde{a}_{pq} D^q D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon) = D_t^j(\tilde{a}_{pq}\tilde{\varphi} D^q \tilde{u}_\varepsilon) + D_t^j(A_{pq}^{(2)}\tilde{u}_\varepsilon) + A_{pq}^{(1)}(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)$$

avec pour $A_{pq}^{(2)}$ et $A_{pq}^{(1)}$ des expressions analogues à celles de $B_{pq}^{(2)}$ et $B_{pq}^{(1)}$.

D'autre part, puisque $\tilde{\varphi}$ et v sont identiquement nulles près de $\partial W^+ - W_0$, nous avons pour $|p||q| \leqslant m'$ (resp. $|p||q| \leqslant m$) :

$$(1, 72) \quad (D_t^j(\tilde{b}_{pq}\tilde{\varphi} D^q \tilde{u}_\varepsilon),\ D^p v)_0 = (-1)^{|j|}(\tilde{b}_{pq} D^q \tilde{u}_\varepsilon,\ \bar{\tilde{\varphi}} D_t^j D^p v)_0$$

(resp.

$$(1, 73) \quad (D_t^j(\tilde{a}_{pq}\tilde{\varphi} D^q \tilde{u}_\varepsilon), D^p v)_0 = (-1)^{|j|}(\tilde{a}_{pq} D^q \tilde{u}_\varepsilon,\ \bar{\tilde{\varphi}} D_t^j D^p v)_0.$$

Mais, d'après la formule de Leibnitz, pour $|p| \leqslant m$:

$$\bar{\tilde{\varphi}} D^p D_t^j v = D^p(\bar{\tilde{\varphi}} D_t^j v) + C_p^j v.$$

où

$$(1, 74) \qquad C_p^j v = - \sum_{1 \leqslant |r| \leqslant p} \alpha_r D^r(\bar{\tilde{\varphi}}) D^{p-r} D_t^j v.$$

On en déduit finalement, en tenant compte de (1, 65)

$$(1, 75) \quad \varepsilon\tilde{a}(D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon), v) + \tilde{b}(D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon), v) = (-1)^{|j|}(f, \bar{\tilde{\varphi}} D_t^j v)_0 + \varepsilon a_j(\tilde{u}_\varepsilon, v) + b_j(\tilde{u}_\varepsilon, v)$$

où

$$(1, 76) \quad a_j(\tilde{u}_\varepsilon, v) = \sum_{|p||q| \leqslant m} (D_t^j(A_{pq}^{(2)}\tilde{u}_\varepsilon) + A_{pq}^{(1)}(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon), D^p v)_0 + (-1)^{|j|}(\tilde{a}_{pq} D^q \tilde{u}_\varepsilon, C_p^j v)_0$$

et

$$(1, 77) \quad b_j(\tilde{u}_\varepsilon, v) = \sum_{|p||q| \leqslant m'} (D_t^j(B_{pq}^{(2)}\tilde{u}_\varepsilon) + B_{pq}^{(1)}(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon), D^p v)_0 + (-1)^{|j|}(\tilde{b}_{pq} D^q{}_\varepsilon \tilde{u}, C_p^j v)_0.$$

Nous savons que $u_\varepsilon \to w$ dans $H^{m'}(\Omega)$ et que $\varepsilon^{1/2} u_\varepsilon \to 0$ dans $H^m(\Omega)$. Par suite, $\tilde{u}_\varepsilon \to \tilde{w}$ dans $H^{m'}(W^+)$ et $\varepsilon^{1/2}\tilde{u}_\varepsilon \to 0$ dans $H^m(W^+)$.

Montrons tout d'abord la :

Proposition 1. 7. — *$D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)$ (resp. $\varepsilon^{1/2} D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)$) est borné dans $H^{m'}(W^+)$ (resp. $H^m(W^+)$) pour $|j| \leqslant k + m'$.*

Démonstration. — Nous raisonnons par récurrence, la proposition étant vraie pour $j = 0$. Supposons la démontrée jusqu'à l'ordre $j - 1$, $|j| \leqslant k + m'$.

Il résulte des hypothèses de récurrence, des propriétés des opérateurs $A^{(1)}_{pq}$ et $A^{(2)}_{pq}$ que pour $|p||q| \leqslant m$:

$$\varepsilon^{1/2}[D^j_t(A^{(2)}_{pq}\tilde{u}_\varepsilon) + A^{(1)}_{pq}(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)]$$

est borné dans $L^2(W^+)$. D'autre part, $(\tilde{a}_{pq}D^q\tilde{u}_\varepsilon,\ C^j_p v)_0$ est, d'après (1, 74) somme de termes de la forme :

$$(\tilde{a}_{pq}D^r(\tilde{\varphi})D^q(\tilde{u}_\varepsilon),\quad D^{p-r}D^j_t v)_0 \quad \text{avec} \quad |r| \geqslant 1,$$

ce qui s'écrit encore, au signe près :

$$(D^{j-s}_t(\tilde{a}_{pq}D^r\tilde{\varphi}D^q\tilde{u}_\varepsilon),\ D^\alpha v)_0 \quad \text{avec} \quad |s| \geqslant 1 \quad \text{et} \quad |\alpha| \leqslant m.$$

Or d'après l'hypothèse de récurrence $\varepsilon^{1/2}D^{j-s}_t(\tilde{a}_{pq}D^r\tilde{\varphi}D^q\tilde{u}_\varepsilon)$, pour $|s| \geqslant 1$ est borné dans $L^2(W^+)$.

Par suite, il existe une constante indépendante de ε et de v telle que

$$(1, 78) \qquad |Re\ \varepsilon a_j(u_\varepsilon, v)| \leqslant K_1\ \varepsilon^{1/2}||v||_{m'}$$

pour tout $v \in C(\overline{W^+})$ identiquement nulle près de $\partial W^+ - W_0$.

On montrerait de la même façon que,

$$(1, 79) \qquad |Re\ b_j(u_\varepsilon, v)| \leqslant K_2\ ||v||_{m'}$$

pour tout $v \in C(\overline{W^+})$ identiquement nulle près de $\partial W^+ - W_0$, K_2, étant indépendante de ε et de v.

Enfin pour $|j| \leqslant k + m'$, nous pouvons écrire $(\tilde{f},\ \tilde{\varphi}D^j_t v)_0$, au signe près, sous la forme

$$(D^s_t(\tilde{\varphi}\tilde{f}),\ D^\alpha_t v) \quad \text{avec} \quad |s| \leqslant k \quad \text{et} \quad |\alpha| \leqslant m'.$$

Par suite :

$$(1, 80) \qquad |Re(\tilde{\varphi}\tilde{f},\ D^j_t v)_0| \leqslant K_3\ ||v||_{m'},$$

pour tout $v \in C(\overline{W^+})$, identiquement nulle près de $\partial W^+ - W_0$.

Les inégalités (1, 78), (1,79) et (1,80) sont encore vraies pour $v = D^j_t(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)$ ce qui donne en tenant compte de (1, 75)

$$(1, 81) \quad Re\{\varepsilon\tilde{a}(D^j_t(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon), D^j_t(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)) + \tilde{b}(D^j_t(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon), D^j_t(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)\} \\ \leqslant K_4||D^j_t(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)||_{m'} + K_5||\varepsilon^{1/2}D^j_t(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)||_m.$$

D'où le résultat, en tenant compte de (1, 67) et (1, 68).

Nous sommes maintenant en mesure de montrer la :

PROPOSITION 1. 8. — *Quand* $\varepsilon \to 0$,

$$D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon) \to D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{w}) \ (\textit{resp.}\ \varepsilon^{1/2} D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)) \to 0)$$

dans $H^{m'}(W^+)$ (*resp. dans* $H^m(W^+)$) *pour* $|j| \leqslant k + m'$.

Démonstration. — D'après la proposition 1. 6, de toute suite u_{ε_n} on peut extraire une sous-suite u_{ε_p} telle que $D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_{\varepsilon_p})$ (resp. $(\varepsilon_p)^{1/2} D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_{\varepsilon_p})$) converge dans $H^{m'}(W^+)$ faible (resp. $H^m(W^+)$ faible) vers une limite qui ne peut être que $D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{w})$ (resp. 0) puisque $\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon \to \tilde{\varphi}\tilde{w}$ dans $H^{m'}(W^+)$ (resp. $\varepsilon^{1/2}\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon \to 0$ dans $H^m(W^+)$).

Pour montrer les convergences fortes nous raisonnons par récurrence : supposons la proposition établie jusqu'à l'ordre $j - 1$, avec $|j| \leqslant k + m'$.

Nous avons pour $v \in C(\overline{W^+})$ identiquement nulle près de $\partial W^+ - W_0$,

$$\tilde{b}(D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{w}), v) = (-1)^{|j|}(f, \tilde{\varphi} D_t^j v)_0 + b_j(\tilde{w}, v)$$

donc

$$\varepsilon\tilde{a}(D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon), v) + \tilde{b}(D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon), v) = \tilde{b}(D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{w}), v) + \varepsilon a_j(\tilde{u}_\varepsilon, v) + b_j(\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{w}, v)$$

et

$$\varepsilon\tilde{a}(D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon), D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)) + \tilde{b}\big(D_t^j(\tilde{\varphi}(\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{w})), D_t^j(\tilde{\varphi}(\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{w}))\big)$$
$$= \varepsilon a_j(\tilde{u}_\varepsilon, D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)) + b_j((\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{w}), D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)) + \tilde{b}\big(D_t^j(\tilde{\varphi}(\tilde{w} - \tilde{u}_\varepsilon)), D_t^j\tilde{\varphi}\tilde{w}\big).$$

La proposition 1. 7 sera complètement démontrée, d'après (1, 69), si nous montrons que la partie réelle du second membre tend vers 0.

Or, d'après la convergence faible $\tilde{b}(D_t^j\tilde{\varphi}(\tilde{w} - \tilde{u}_\varepsilon)), (D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{w})) \to 0$. D'autre part, il résulte des hypothèses de récurrence, de la proposition 1. 7 et de l'expression même de $a_j(u, v)$ et de $b_j(u, v)$ que

$$\mathrm{Re}\{\varepsilon a_j(\tilde{u}_\varepsilon, D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)) + b_j(\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{w}, D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon))\} \to 0$$

d'où la proposition.

Il nous reste à montrer que pour $|j| \leqslant k + m$, $\varepsilon D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon) \to 0$ dans $H^m(W^+)$. Ceci est vrai pour $|j| \leqslant k + m'$, d'après la proposition 1. 8, et par suite nous pouvons raisonner par récurrence. Supposons donc que $\varepsilon D_t^s(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon) \to 0$ pour tout $|s| \leqslant |j| - 1$, $|j| \leqslant k + m$.

Montrons d'abord que $\varepsilon D_t^s(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)$ est borné dans $H^m(W^+)$. Reprenons (1, 75) et multiplions les deux membres par ε. Nous savons d'après la proposition 1. 7, que $\varepsilon^{1/2}D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon) \to 0$ dans $H^{m'}(W^+)$ pour $|j| \leqslant k + m$. On a donc en particulier $|\mathrm{Re}\,\varepsilon b_j(\tilde{u}_\varepsilon, v)| \leqslant K_1\varepsilon^{1/2}||v||_{m'}$.

D'autre part, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$|\mathrm{Re}(\varepsilon^2 a_j(\tilde{u}_\varepsilon, v))| \leqslant K_2\varepsilon\,||v||_m.$$

Enfin $(\tilde{\varphi}\bar{f}, D_t^j(v))_0$ peut s'écrire au signe près $(D_t^s(\tilde{\varphi}\bar{f}), D^\alpha v)_0$ avec $|s| \leqslant k$ et $|\alpha| \leqslant m$. Donc

$$|\mathrm{Re}\,\varepsilon(\bar{f}, \tilde{\varphi}D_t^j v)|_0 \leqslant K_3\varepsilon||v||_m.$$

Finalement on obtient

$$\mathrm{Re}\{\varepsilon^2\tilde{a}(D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon), D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)) + \varepsilon\tilde{b}(D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon), D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon))$$
$$\leqslant K_1\varepsilon^{1/2}||D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)||_{m'} + K_4||\varepsilon D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)||_m.$$

D'où le résultat en tenant compte de (1, 67) et (1, 68).

Il en résulte que $\varepsilon D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon) \to 0$ dans $H^m(W^+)$ faible. Par suite :

$$(\bar{f}, \tilde{\varphi}D_t^jD_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)) \to 0$$

D'autre part, d'après la proposition 1, 8

$$\mathrm{Re}\,\varepsilon b_j(u_\varepsilon, D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)) \to 0.$$

Enfin, d'après l'hypothèse de récurrence et le fait que $\varepsilon D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)$ est borné dans $H^m(W^+)$.

$$\mathrm{Re}\,\varepsilon^2 a_j(u_\varepsilon, D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)) \to 0.$$

Donc

$$\mathrm{Re}\{\varepsilon^2\tilde{a}(D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon), D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)) + \varepsilon b(D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon), D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon))\} \to 0.$$

D'où le résultat d'après (1, 69).

Le théorème 1. 11 est ainsi complètement démontré. Bien entendu nous n'avons pas de théorème analogue pour les dérivées normales, car on pourrait alors par recollement des morceaux, obtenir la convergence $u_\varepsilon \to u$ dans $H^{2m+k}(\Omega)$ et nous avons vu que cela était impossible, en général.

6. — Valeurs propres et fonctions propres.

Préliminaires. — Soit K un espace de Hilbert, dont le produit scalaire est noté (x, y) et la norme par $||x||$. Soit A un opérateur dans K, hermitien, complètement continu, posi-

tif et tel que $Ax = 0$ entraîne $x = 0$. Alors A possède un spectre dénombrable

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant \cdots \to 0. \tag{1, 82}$$

Soit $e_1, e_2, \ldots, e_n$, les vecteurs propres correspondants avec

$$Ae_n = \lambda_n e_n \quad \text{et} \quad (e_i, e_j) = \delta_{ij} \text{ (38)} \tag{1,83}$$

Notation : $f_1, f_2, \ldots, f_n$ étant n vecteurs de K linéairement indépendants, nous désignons par $R^n(f_i)$ le sous-espace de K engendré par les n vecteurs f_i. La proposition suivante est classique (39) :

Proposition 1, 9. — *On a*

$$\lambda_n = \sup_{f_1, \ldots, f_n \in K} \left[\inf_{x \in R^n(f_i)} \frac{(Ax, x)}{\|x\|^2} \right]$$

$f_1, \ldots f_n$, étant linéairement indépendants dans K.

Reprenons alors les espaces de Hilbert H et V, avec (1, 1), puis sur V une forme sesqui-linéaire continue *hermitienne*, $a(u, v)$ qui définit l'opérateur A et l'espace N. On pose la

Définition 1, 2. — *$a(u, v)$ est dite elliptique sur* V *au sens de Garding* (40) *s'il existe $\alpha > 0$ et ξ tels que :*

$$a(u, u) + \xi |u|^2 \geqslant \alpha \|u\|_V^2 \quad \textit{pour tout } u \in V.$$

Si $a(u, v)$ est hermitienne et elliptique sur V au sens de Garding alors

$$((u, v)) = a(u, v) + \xi(u, v)$$

définit sur V un produit scalaire équivalent à $(u, v)_V$.

Il est également classique (41) que l'on a

Théorème 1, 11. — *Soit f donnée dans* H. *Si $a(u, v)$ est hermitienne et elliptique sur* V *au sens de Garding, et si l'injection de* V *dans* H *est complètement continue, alors le problème :*

$$Au - \mu u = f; \qquad u \in N \tag{1, 84}$$

(38) δ_{ij}, symbole de Kronecker.
(39) Voir Courant-Hilbert [1].
(40) Voir Garding [1].
(41) Voir Courant-Hilbert [1].

admet une solution unique sauf pour un ensemble dénombrable de valeurs de μ

$$\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \dots \leqslant \mu_n \leqslant \dots$$

qui constituent le spectre du problème, et on a

$$(1, 85) \qquad \mu_n = \operatorname*{Inf}_{f_1, \dots, f_n \in V} \left[\operatorname*{Sup}_{u \in R^n(f_i)} \left[\frac{a(u, u)}{|u|^2} \right] \right]$$

Perturbation singulière. — On reprend V, W et H, avec (1, 13) et

(1, 86) L'injection de W dans H est complètement continue [42].

On prend sur V (resp. W) une famille de formes sesqui-linéaires continues $b(\varepsilon; u, v)$ (resp. une forme sesqui-linéaire continue $b(u, v)$).

On suppose que $b(\varepsilon; u, v)$ et $b(u, v)$ sont *hermitiennes*, qu'elles vérifient (1, 15) et que l'on a les hypothèses d'ellipticité :

(1,87) Il existe $\alpha(\varepsilon) > 0$, $\alpha(\varepsilon) \to 0$ avec ε, $\eta(\varepsilon)$, $\eta(\varepsilon) \to \eta$ quand $\varepsilon \to 0$, et $\beta > 0$ tels que pour tout $u \in V$ et tout $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, on ait :

$$b(\varepsilon; u, u) + \eta(\varepsilon)|u|^2 \geqslant \alpha(\varepsilon)||u||_V^2 + \beta||u||_W^2$$

et

(1, 88) $b(u, v)$ est elliptique sur $\overline{V}_{(W)}$, au sens de Garding, i,e,. il existe ξ et $\gamma > 0$, tels que pour tout $u \in \overline{V}_{(W)}$, on ait :

$$b(u, u) + \xi|u|^2 \geqslant \gamma||u||_W^2.$$

Soit B (resp. B_ε) et N_B (resp. N_ε) l'opérateur et l'espace attachés à $b(u, v)$ (resp. $b(\varepsilon; u, v)$) sur $\overline{V}_{(W)}$ (resp. sur V).

Soit $\lambda_n(\varepsilon)$ la $n^{\text{ième}}$ valeur propre du problème

$$(1, 89) \qquad B_\varepsilon u_\varepsilon = \lambda(\varepsilon) u_\varepsilon; \quad u_\varepsilon \in N_\varepsilon; \quad |u_\varepsilon| = 1;$$

ε assez petit avec

$$\lambda_1(\varepsilon) \leqslant \lambda_2(\varepsilon) \leqslant \dots \leqslant \lambda_n(\varepsilon) \leqslant \dots$$

Soit $v_n(\varepsilon)$ les vecteurs propres associés, auxquels on impose de former un système orthonormé dans H.

[42] Il en résulte que l'injection de V dans H est aussi complètement continue.

Soit μ_n la $n^{\text{ième}}$ valeur propre du problème

(1, 90) $$Bu = \mu u; \quad u \in N_B \, |u| = 1$$

avec

$$\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \mu_n \leqslant \cdots$$

Soit w_n les vecteurs propres associés auxquels on impose de former un système orthonormé dans H.

Théorème 1, 12. — *Sous les hypothèses* (1, 13), (1, 86), (1, 15) *où* $b(\varepsilon; u, v)$ *et* $b(u, v)$ *sont hermitiennes, ainsi que* (1, 87), (1, 88) *et*

(1, 91) *Il existe* $\delta(\varepsilon)$ *et* $\tau(\varepsilon)$ *convergent tous deux vers* 0 *avec* ε, *tels que*

$$b(\varepsilon; u, u) - b(u, u) + \delta(\varepsilon) b(u, u) + \tau(\varepsilon) |u|^2 \geqslant 0$$

pour tout $u \in V$ *et* ε *assez petit.*

$\lambda_n(\varepsilon)$ *converge vers* μ_n, *quand* $\varepsilon \to 0$.

Démonstration. — D'après le théorème 1, 11, on a :

$$\lambda_n(\varepsilon) = \inf_{f_1, f_2, \ldots f_n \in V} \left[\sup_{u \in R^n(f_i)} \frac{b(\varepsilon; u, u)}{|u|^2} \right]$$

et

$$\mu_n = \inf_{f_1, f_2, \ldots f_n \in \bar{V}_{(W)}} \left[\sup_{u \in R^n(f_i)} \frac{b(u, u)}{|u|^2} \right].$$

Mais d'après (1, 91), on a pour tout $u \in V$

$$\frac{b(\varepsilon; u, u)}{|u|^2} \geqslant [1 - \delta(\varepsilon)] \frac{b(u, u)}{|u|^2} - \tau(\varepsilon)$$

d'où il résulte :

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \lambda_n(\varepsilon) \geqslant \mu_n.$$

Il nous suffit alors de montrer que

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \lambda_n(\varepsilon) \leqslant \mu_n.$$

Or, en désignant par $e_1, e_2, \ldots, e_n$ les n premiers vecteurs propres de B, normalisés dans $\bar{V}_{(W)}$, on a

$$\mu_n = \sup_{u \in R^n(e_i)} \left[\frac{b(u, u)}{|u|^2} \right].$$

Pour $\delta > 0$ donné, il existe un espace à n dimensions dans V, $R^n(g_i)$ tel que l'on ait

$$\operatorname*{Sup}_{u \in R^n(g_i)} \left[\frac{b(u, u)}{|u|^2}\right] \leqslant \mu_n + \delta.$$

Or

$$\lambda_n(\varepsilon) \leqslant \operatorname*{Sup}_{u \in R^n(g_i)} \left[\frac{b(\varepsilon; u, u)}{|u|^2}\right]$$

donc, d'après (1, 15)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \operatorname{Sup} \lambda_n(\varepsilon) \leqslant \operatorname*{Sup}_{u \in R^n(g_i)} \frac{b(u, u)}{|u|^2} \quad \text{donc} \quad \leqslant \mu_n + \delta$$

d'où le résultat puisque δ est un nombre positif quelconque.

THÉORÈME 1. 13. — *Sous les hypothèses du théorème* 1, 12, $v_n(\varepsilon) \to w_n$ *dans* W.

Démonstration. — 1° Supposons que μ_n est valeur propre simple du problème (1, 90). Alors, d'après le théorème 1, 12, pour ε assez petit, $\lambda_n(\varepsilon)$ est aussi valeur propre simple du problème (1, 89).

On a

$$b(\varepsilon; v_n(\varepsilon), v_n(\varepsilon)) = \lambda_n(\varepsilon), \qquad (|v_n(\varepsilon)| = 1).$$

Il en résulte, en tenant compte du théorème 1, 12, que $b(\varepsilon; v_n(\varepsilon), v_n(\varepsilon))$ est borné, et en tenant compte de (1, 87), que $v_n(\varepsilon)$ est borné dans W. De toute suite $v_n(\varepsilon_i)$ on peut donc extraire une sous-suite $v_n(\varepsilon_j)$ convergent dans W faible vers w. Montrons que $w = w_n$.

On a

$$(1, 92) \quad b(\varepsilon_j; v_n(\varepsilon_j), v) = \lambda_n(\varepsilon_j)\,(v_n(\varepsilon_j), v) \quad \text{pour tout} \quad v \in V.$$

Posons :

$$c(\varepsilon; u, v) = b(\varepsilon; u, v) - b(u, v) + \delta(\varepsilon) b(u, v) + \tau(\varepsilon)\,(u, v).$$

D'après (1, 91), $c(\varepsilon; u, v)$ est pour ε assez petit une forme hermitienne positive. On a donc d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|c(\varepsilon; v_n(\varepsilon), v)| \leqslant \left(c(\varepsilon; v_n(\varepsilon), v_n(\varepsilon))^{1/2}\,(c(\varepsilon; v, v))^{1/2}\right)$$

mais $c(\varepsilon; v_n(\varepsilon), v_n(\varepsilon))$, est borné, et $c(\varepsilon; v, v) \to 0$ (en tenant

compte de (1, 15)). Par suite $c(\varepsilon; v_n(\varepsilon), v) \to 0$ pour tout $v \in V$. Il en résulte que $b(\varepsilon; v_n(\varepsilon), v) - b(v_n(\varepsilon), v) \to 0$ pour tout $v \in V$ [43].

Or

$$b(\varepsilon_j; v_n(\varepsilon_j), v) - b(w, v)$$
$$= (b(\varepsilon_j; v_n(\varepsilon_j), v) - b(v_n(\varepsilon_j), v)) + (b(v_n(\varepsilon_j), v) - b(w, v)).$$

où le second membre converge vers 0.

D'autre part, le second membre de (1, 92) converge vers $\mu_n(w, v)$. On a donc :

$$b(w, v) = \mu_n(w, v) \quad \text{pour tout} \quad v \in V \quad \text{donc pour tout} \quad v \in \overline{V}_{(W)}.$$

Par suite $w = w_n$.

Il nous reste à montrer que $v_n(\varepsilon) \to w_n$ dans W fort.

Remarquons tout d'abord que la convergence $v_n(\varepsilon)$ vers w_n dans W faible entraîne, d'après l'hypothèse (1, 86), la convergence dans H fort.

On a de plus

$$b(\varepsilon; v_n(\varepsilon), v_n(\varepsilon)) - b(v_n(\varepsilon), v_n(\varepsilon)) + b(v_n(\varepsilon) - w_n, v_n(\varepsilon) - w_n)$$
$$= \lambda_n(\varepsilon) + \mu_n - b(v_n(\varepsilon), w_n) - b(w_n, v_n(\varepsilon)).$$

Le second membre converge vers 0 avec ε. Quant au premier membre il est minoré d'après (1, 88) et (1, 91) par :

$$-\delta(\varepsilon)\, b(v_n(\varepsilon), v_n(\varepsilon)) - \tau(\varepsilon) + \gamma \|v_n(\varepsilon) - w_n\|_W^2 - \xi |v_n(\varepsilon) - w_n|^2.$$

D'où le résultat.

2° Supposons que μ_n est dégénéré, d'ordre de multiplicité p. On a donc :

$$\mu_{n-1} < \mu_n = \mu_{n+1} = \cdots = \mu_{n+p-1} < \mu_{n+p}.$$

Rien ne permet d'affirmer que

$$\lambda_n(\varepsilon) = \lambda_{n+1}(\varepsilon) = \cdots = \lambda_{n+p-1}(\varepsilon)$$

Mais on a $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \lambda_{n+j}(\varepsilon) = \mu_n$ pour $j = 0, 1, \ldots, p-1$.

Soit $v_{n+j}(\varepsilon)$ le vecteur propre correspondant à $\lambda_{n+j}(\varepsilon)$, et w_{n+j}, $i = 0, 1, \ldots, p-1$ les vecteurs propres correspondants à μ_n.

(43) Comparez lemme 1. 1, page 22.

En utilisant la démonstration de 1° on voit que pour tout $j \in (0, 1, \ldots, p-1)$ il existe $i_j \in (0, 1, \ldots, p-1)$ tel que $\lim_{\varepsilon \to 0} v_{n+j}(\varepsilon) = w_{n+i_j}$ dans W. De plus si $j \neq k$, on a $i_j \neq i_k$, puisque $(v_{n+j}(\varepsilon), v_{n+k}(\varepsilon))_0 = 0$. Pour simplifier l'écriture, nous appellerons w_n la limite, quand $\varepsilon \to 0$, de $v_n(\varepsilon)$. Moyennant cette notation, le théorème 1, 12 est complètement démontré.

On en déduit immédiatement le

Théorème 1, 14. — *Sous les hypothèses du théorème* 1, 13, $\dfrac{v_n(\varepsilon)}{\sqrt{\lambda_n(\varepsilon)}} \to \dfrac{w_n}{\sqrt{\mu_n}}$ *dans* W, *quand* $\varepsilon \to 0$.

Les résultats de ce n° 6 complètent, dans une certaine mesure, les résultats de nombreux auteurs : voir Kato [1], Moser [1], Morgenstern [1], Glasko [1], Kostomarov [1], Visik-Liousternik [1].

CHAPITRE II

APPLICATION AUX PROBLÈMES MIXTES

Dans tout ce paragraphe, t désigne une variable réelle, et, pour tout espace de Banach E, $\mathcal{D}'(t, \mathrm{E})$ (resp. $\mathcal{D}'_+(t; \mathrm{E})$) désigne l'espace des distributions en t à valeurs dans E (resp. l'espace des distributions en t, à valeurs dans E, à support limité à gauche) [44]. On pose $\mathrm{D} = (\partial/\partial t)$.

1. — Convergence, au sens des distributions de la solution d'un problème mixte relatif à $\mathrm{B}_\varepsilon + \mathrm{D}$ (resp. $\mathrm{B}_\varepsilon + a\mathrm{D}^2 + b\mathrm{D}$, avec a et b réels et $a > 0$).

a-préliminaires [45]. — On se donne comme au n° 1 du chapitre I, un espace de Hilbert H, puis un espace de Hilbert V, avec

$$\text{(2, 1)} \qquad \mathrm{V} \subset \mathrm{H} \text{ et V dense dans H.}$$

Soit $a(u, v)$ une forme sesqui-linéaire continue sur V, à laquelle sont attachés, l'espace N et l'opérateur A.

PROBLÈME 2, 1. (*resp.* 2, 2). — *Soit* T *donnée dans* $\mathrm{D}'_+(t; \mathrm{H})$. *Existe-t-il* u *avec*

$$\text{(2, 1)} \qquad \mathrm{A}u + \mathrm{D}u = \mathrm{T}; \qquad u \in \mathcal{D}'_+(t; \mathrm{N})$$

(resp.

$$\text{(2, 2)} \quad \mathrm{A}u + a\mathrm{D}^2u + b\mathrm{D}u = \mathrm{T}; \quad u \in \mathcal{D}'_+(t; \mathrm{N}); \ a \text{ et } b \text{ réels}).$$

(44) Voir Schwartz [8], [9], ou [3]. Les résultats essentiels utilisés concernant ces espaces, sont également rappelés dans Lions, [1] chap. II, § 1.

(45) On rappelle dans ces préliminaires les résultats, utilisés dans la suite de Lions [1] chap. II et Lions [5].

Définition 2, 1. — Nous dirons que $a(u, v)$ vérifie l'hypothèse (E) sur V, s'il existe $c > 0$ et $\alpha > 0$ tels que

$$\operatorname{Re} a(u, u) + c\,|u|^2 \geqslant \alpha\,\|u\|_V^2 \quad \text{pour tout} \quad u \in V.$$

Théorème 2, 1. — *Sous l'hypothèse* (2, 1) *si* $a(u, v)$ *vérifie* (E) *sur* V, (*resp. est hermitienne et vérifie* (E) *sur* V) *l'opérateur* $A + D$ (*resp.* $A + aD^2 + bD$, *avec* a *et* b *réels et* $a > 0$) *est un isomorphisme de* $\mathcal{D}'_+(t; N)$ *sur* $\mathcal{D}'_+(t; H)$ *et par suite le problème* 2, 1 (*resp.* 2, 2) *admet une solution unique.*

Remarque 2, 1. ([46]). — En posant $S = e^{-\lambda t}u$, on peut toujours supposer, pour résoudre le problème 2. 1 (resp. 2, 2) au lieu de (E)

$$\operatorname{Re} a(u, u) \geqslant \alpha\|u\|_V^2 \quad \text{pour tout} \quad u \in V$$

(*i.e.* $a(u, v)$ est elliptique sur V au sens de la définition 1, 1).

Distribution de Green.

Sous les hypothèses du théorème 2, 1, il existe une distribution unique G_1 (resp. G_2) élément de $\mathcal{D}'_+(t; \mathcal{L}_b(H; N))$ telle que la solution u_1 (resp. u_2) du problème 2,1 (resp. du problème 2,2) soit donnée par $u_1 = G_1 * T$ (resp. $u_2 = G_2 * T$). On appelle G_1 (resp. G_2) la distribution de Green de l'opérateur $A + D$ (resp. $A + aD^2 + bD$) relativement à l'espace N.

Problèmes non homogènes. — On suppose comme au chapitre I, p. 13, qu'il existe un espace vectoriel topologique E, et un opérateur $\tilde{A} \in \mathcal{L}(V; E)$ tel que $\tilde{A}h = Ah$ pour tout $h \in N$. soit T donnée dans $\mathcal{D}'_+(t; H)$ et h donnée dans $\mathcal{D}'_+(t; V)$ avec $\tilde{A}h \in \mathcal{D}'_+(t; H)$.

Problème 2, 3. (*resp.* 2, 4). — *Trouver* u *avec*

$$(2, 3) \qquad \tilde{A}u + Du = T; \quad u - h \in \mathcal{D}'_+(t; N)$$

(resp.

$$(2, 4) \quad \tilde{A}u + aD^2u + bDu = T; \quad u - h \in \mathcal{D}'_+(t; N.)$$

On se ramène au problème 2, 1 (resp. 2, 2) en posant $U = u - h$.

([46]) Cf. par exemple Lions [6] p. 8.

b) *Perturbation singulière : opérateurs de la forme* $B_\varepsilon + D$. — On reprend les notations du chapitre I, n° 2, avec les hypothèses (1, 13), (1, 16) et (1, 17).

Soit $T \in \mathcal{D}'_+(t; H)$ et une famille $T_\varepsilon \in \mathcal{D}'_+(t; H)$ tels que

$$T_\varepsilon \to T \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'_+(t; H) \tag{2, 5}$$

Soit u_ε (resp. u) la solution de

$$B_\varepsilon u_\varepsilon + Du_\varepsilon = T_\varepsilon; \quad u_\varepsilon \in \mathcal{D}'_+(t; N_\varepsilon) \tag{2, 6}$$

(resp.

$$Bu + Du = T; \quad u \in \mathcal{D}'_+(t; N_B). \tag{2, 7}$$

(On rappelle que N_B est l'espace attaché à $b(u, v)$ sur $\overline{V}_{(W)}$.)

Théorème 2. 2. — *Sous les hypothèses* (1, 13), (1, 16), (1, 17) *ainsi que* (1, 22), (1, 23) et (2,5), *la solution* u_ε *de* (2, 6) *converge dans* $\mathcal{D}'_+(t; W)$ *vers la solution* u *de* (2, 7).

Avant de donner la démonstration de ce théorème, notons le lemme :

Lemme 2. 1. — *On pourra toujours se ramener aux hypothèses* (1, 16) *et* (1, 17) *si on a*

(2, 8) *Il existe* $c_1(\varepsilon) > 0$, $c_1(\varepsilon) \leqslant c_1$, $\alpha(\varepsilon) > 0$, *avec* $\alpha(\varepsilon) \to 0$ *avec* ε *et* $\beta > 0$, *tels que*

$$\mathrm{Re}\, b(\varepsilon; u, u) + c_1(\varepsilon)|u|^2 \geqslant \alpha(\varepsilon)\|u\|_V^2 + \beta\|u\|_W^2$$

pour tout $u \in V$.

et

(2, 9) $b(u, v)$ *vérifie* (E) *sur* $\overline{V}_{(W)}$, *i.e. il existe* $c_2 > 0$ *et* $\gamma > 0$ *tels que*

$$\mathrm{Re}\, b(u, u) + c_2|u|^2 \geqslant \gamma\|u\|_W^2 \quad \textit{pour tout} \quad u \in \overline{V}_{(W)}.$$

Ce lemme résulte de la remarque 2, 1. Il suffit de poser

$$S_\varepsilon = e^{-\lambda t}u_\varepsilon \quad \text{et} \quad S = e^{-\lambda t}u$$

et de choisir $\lambda \geqslant \mathrm{Sup}\,(c_1, c_2)$.

Démonstration du théorème 2-2.

D'après (2, 5), T_ε et T ont leur support limité à gauche par un point fixe que nous pouvons toujours supposer être

l'origine. Alors u_ε et u ont aussi leur support dans $(0, +\infty)$ et il nous suffit de montrer que $u_\varepsilon \to u$ dans $\mathcal{D}'(t;\ W)$.

1° Supposons que T_ε et T aient leur support dans un même compact de $(0, +\infty)$. Remarquons qu'il résulte alors de (2, 5) :

(2, 5′) $T_\varepsilon \to T$ dans $\mathcal{E}'(t;\ H)$, espace des distributions en t, à valeurs dans W à support compact, muni de sa topologie habituelle ([47]).

Dans ce cas T_ε et T admettent une transformée de Laplace ([48]) $\hat{T}_\varepsilon(p)$ et $\hat{T}(p)$, $p = \xi + i\eta$. Soit $\hat{u}_\varepsilon(p)$ (resp. $\hat{u}(p)$) la transformée de Laplace de u_ε (resp. u). Il existe alors $\xi_0 > 0$, indépendant de ε, tel que dans le demi-plan P, $\xi > \xi_0$, $\hat{T}_\varepsilon(p)$, $\hat{T}(p)$, $\hat{u}_\varepsilon(p)$ et $\hat{u}(p)$ soient des fonctions holomorphes de p à valeurs dans H (pour $\hat{T}_\varepsilon(p)$ et $\hat{T}(p)$), V et W.

Pour $p \in P$, $\hat{u}_\varepsilon(p)$ (resp. $\hat{u}(p)$) est l'élément de V (resp. $\overline{V}_{(W)}$) vérifiant :

$$b(\varepsilon;\ \hat{u}_\varepsilon(p), v) + p(\hat{u}_\varepsilon(p), v) = (\hat{T}_\varepsilon(p), v) \tag{2, 10}$$

pour tout $v \in V$

(resp.

$$b(\hat{u}(p), v) + p(\hat{u}(p), v) = (\hat{T}(p), v) \tag{2, 11}$$

pour tout $v \in \overline{V}_{(W)}$).

Puisque $\mathrm{Re}\, p > 0$, il résulte du théorème 1. 3, appliqué à $b_1(\varepsilon;\ u,\ v) = b(\varepsilon;\ u,\ v) + p(u,\ v)$ que, pour chaque $p \in P$, $\hat{u}_\varepsilon(p) \to \hat{u}(p)$ dans W.

De plus d'après (1, 20) nous avons la majoration :

(2, 12) $\|\hat{u}_\varepsilon(p)\|_W \leqslant K\,|\hat{T}_\varepsilon(p)|$ où K est indépendante de ε.

Or, d'après (2, 5′), $|\hat{T}_\varepsilon(p)|$ est majoré par un polynôme en $|p|$ indépendant de ε. On a donc

$$\|\hat{u}_\varepsilon(p)\|_W \leqslant \mathfrak{L}(|p|) \tag{2, 13}$$

où $\mathfrak{L}(|p|)$ est un polynôme en $|p|$ indépendant de ε.

Il résulte de (2, 13) et des propriétés des fonctions holomorphes, que sur tout compact de P, les $\hat{u}_\varepsilon(p)$ forment un ensemble équicontinu de fonctions à valeurs dans W. Par

([47]) Voir Schwartz [1] tome I p. 89.
([48]) Voir Schwartz [7] ou [8] p. 48 ou [3] exp. 2.

suite la convergence $\hat{u}_\varepsilon(p) \to \hat{u}(p)$ dans W, pour tout $p \in \mathrm{P}$, entraîne

(2, 14) $\hat{u}_\varepsilon(p) \to \hat{u}(p)$ dans W, uniformément sur tout compact de P.

Il résulte de (2, 13), (2, 14), des propriétés des fonctions holomorphes et de la transformation de Laplace, que $u_\varepsilon \to u$ dans $\mathfrak{D}'(t; \mathrm{W})$.

2° T et T_ε sont quelconque dans $\mathfrak{D}'_+(t; \mathrm{H})$.

Soit G_ε (resp. G) la distribution de Green de l'opérateur $\mathrm{B}_\varepsilon + \mathrm{D}$ (resp. $\mathrm{B} + \mathrm{D}$) relativement à l'espace N_ε (resp. N_B). Nous devons montrer que $\mathrm{G}_\varepsilon * \mathrm{T}_\varepsilon \to \mathrm{G} * \mathrm{T}$ dans $\mathfrak{D}'(t; \mathrm{W})$. Pour tout j, considérons une fonction $a_j(t) \in \mathfrak{D}_-$ (espace des fonctions indéfiniment dérivables à support limité à droite) avec $a_j(t) = 1$ pour $t < j$. Alors $a_j(t)\mathrm{T}$ et $a_j(t)\mathrm{T}_\varepsilon$ sont dans $\mathcal{E}'(t; \mathrm{H})$ et ont leur support dans un même compact de $(0, +\infty)$. Par suite d'après 1°, $\mathrm{G}_\varepsilon * a_j(t)\mathrm{T}_\varepsilon \to \mathrm{G} * a_j(t)\mathrm{T}$ dans $\mathfrak{D}'(t; \mathrm{W})$. Or $a_j(t)\mathrm{T}_\varepsilon - \mathrm{T}_\varepsilon$ et $a_j(t)\mathrm{T} - \mathrm{T}$ ont leur support dans $t > j$. Par suite, sur l'ouvert $t < j$, $\mathrm{G}_\varepsilon * \mathrm{T}_\varepsilon$, (resp. $\mathrm{G} * \mathrm{T}$) coïncide avec $\mathrm{G}_\varepsilon * a_j(t)\mathrm{T}_\varepsilon$ (resp. $\mathrm{G} * a_j(t)\mathrm{T}$). Donc la restriction, à l'ouvert $t < j$, de $\mathrm{G}_\varepsilon * \mathrm{T}_\varepsilon$ converge, dans $\mathfrak{D}'(t < j; \mathrm{W})$ vers $\mathrm{G} * \mathrm{T}$. D'où le résultat puisque j est quelconque.

c) *Perturbation singulière. — Opérateurs de la forme* $\mathrm{B}_\varepsilon + a\mathrm{D}^2 + b\mathrm{D}$ *où* a *et* b *sont des constantes réelles, avec* $a > 0$. — On reprend les notations de b) avec l'hypothèse (1, 13), ainsi que

(2, 15) $b(\varepsilon; u, v)$ et $b(u, v)$ sont hermitiennes.

et (1, 16) et (1, 17). Soit T donnée dans $\mathfrak{D}'_+(t; \mathrm{H})$ et une famille $\mathrm{T}_\varepsilon \in \mathfrak{D}'_+(t; \mathrm{H})$ avec (2, 5). Soit u_ε (resp. u) la solution de

(2, 16) $\mathrm{B}_\varepsilon u_\varepsilon + a\mathrm{D}^2 u_\varepsilon + b\mathrm{D}u_\varepsilon = \mathrm{T}_\varepsilon; \; u_\varepsilon \in \mathfrak{D}'_+(t; \mathrm{N}_\varepsilon)$

(resp.

(2, 17) $\mathrm{B}u + a\mathrm{D}^2 u + b\mathrm{D}u = \mathrm{T}; \quad u \in \mathrm{D}'_+(t; \mathrm{N}_\mathrm{B}))$

avec a, b réels et $a > 0$.

Théorème 2. 3. — *Sous les hypothèses* (1, 13), (1, 15), (1, 16) (1, 17), (2, 15), (1, 23), (2, 5) *la solution* u_ε *de* (2, 16) *où* a *et* b *sont réels positifs, converge vers la solution* u *de* (2, 17) *dans* $\mathfrak{D}'_+(t; \mathrm{W})$.

8

Notons le lemme :

Lemme 2. 2. — *On pourra se ramener aux hypothèses* (1, 16), (1, 17) *et a, b réels positifs, si on a* (2, 8) (2, 9), *a réel positif, b réel quelconque.*

Démonstration. — Posons $S_\varepsilon = u_\varepsilon e^{-\lambda t}$, $S = ue^{-\lambda t}$, λ réel. (2, 16) (resp. (2, 17)) devient :

$$(2,\ 16') \quad \tilde{B}_\varepsilon S_\varepsilon + aD^2S_\varepsilon + \tilde{b}DS_\varepsilon = e^{-\lambda t}T_\varepsilon; \quad S_\varepsilon \in \mathcal{D}'_+(t;\ N_\varepsilon)$$

(resp.

$$(2,\ 17') \quad \tilde{B}S + aD^2S + \tilde{b}DS = e^{-\lambda t}T; \quad S \in \mathcal{D}'_+(t;\ N_B)$$

avec

$$\tilde{B}_\varepsilon = B_\varepsilon + b\lambda + a\lambda^2; \quad \tilde{B} = B + b\lambda + a\lambda^2; \quad \tilde{b} = 2a\lambda + b.$$

Posons

$$\tilde{b}(u, v) = b(u, v) + (b\lambda + a\lambda^2)\,(u, v)$$

et

$$\tilde{b}(\varepsilon;\ u, v) = b(\varepsilon;\ u, v) + (b\lambda + a\lambda^2)\,(u, v).$$

Il est alors toujours possible, d'après (2, 8) et (2, 9) de choisir λ de façon que $\tilde{b}(\varepsilon;\ u, v)$ vérifie (1, 16) et $\tilde{b}(u, v)$ (1, 17), et que l'on ait $\tilde{b} = 2\lambda a + b > 0$.

Démonstration du théorème 2-3.

Comme dans *b*) les u_ε ont leur support limité à gauche par un point fixe que nous supposons être l'origine. Il nous suffit de montrer que $u_\varepsilon \to u$ dans $\mathcal{D}'(t;\ W)$. Nous faisons la démonstration uniquement dans le cas où T et T_ε ont leur support dans un compact fixe de $(0, +\infty)$. Le cas où T_ε et T sont quelconques s'en déduit exactement comme dans *b*).

Supposons donc T_ε et T à support dans un même compact de $(0, +\infty)$, et faisons une transformation de Laplace. On reprend les notations de *b*, 1°. Il existe $\xi_0 > 0$, tel que, pour $p \in P$, demi-plan $\xi > \xi_0$, $\hat{u}_\varepsilon(p)$ (resp. $\hat{u}(p)$) soit la solution dans V (resp. dans $\overline{V}_{(W)}$) de

$$(2,\ 18) \quad b(\varepsilon;\ \hat{u}_\varepsilon(p), v) + (ap^2 + bp)\,(\hat{u}_\varepsilon(p), v) = (\hat{T}_\varepsilon(p), v)$$

pour tout $v \in V$

(resp.

$$(2,\ 19)\quad b(\hat{u}(p),\ v) + (ap^2 + bp)\ (\hat{u}(p),\ v) = (\hat{T}(p),\ v)$$

pour tout $v \in \overline{V}_{(W)}$.

Nous allons montrer que l'on a :

$$(2,\ 20)\quad \text{pour chaque}\quad p \in P,\ \hat{u}_\varepsilon(p) \to \hat{u}(p)\quad \text{dans}\quad W$$

et

$$(2,\ 21)\quad \|\hat{u}_\varepsilon(p)\|_W \leqslant \mathcal{P}(|p|),\ \text{où } \mathcal{P}(|p|) \text{ est un polynôme en } |p| \text{ indépendant de } \varepsilon.$$

Si $\mathrm{R}ep^2 \geqslant 0$, (2, 20) résulte du lemme 1, 1 et du théorème 1. 3 appliqué à $b_1(\varepsilon;\ u,\ v) = b(\varepsilon;\ u,\ v) + (ap^2 + bp)\ (u,\ v)$, et (2, 21) de (1, 20) et (2, 5′).

Cas où $\mathrm{R}ep^2 < 0$, *i.e.* $|\eta| > \xi > \xi_0$.

En écrivant (2, 18) pour $v = \hat{u}_\varepsilon(p)$, en prenant les parties réelles des deux membres, on obtient

$$(2,\ 22)\quad b(\varepsilon;\ \hat{u}_\varepsilon(p),\ \hat{u}_\varepsilon(p)) \leqslant (|\hat{T}_\varepsilon(p)|\ |u_\varepsilon(p)| + \eta^2|\hat{u}_\varepsilon(p)|^2)$$

et en prenant les parties imaginaires des deux membres

$$(2,\ 22')\quad |\hat{u}_\varepsilon(p)| \leqslant \frac{|\hat{T}_\varepsilon(p)|}{\xi_0(2a\xi_0 + b)}.$$

On déduit alors facilement (2, 21), de (1, 16), (2, 22), (2, 22′) et (2, 5′). Il n'y a pas de difficulté à montrer, par adaptation convenable de la démonstration du théorème 1. 2 (en tenant compte du lemme 1, 1), que $\hat{u}_\varepsilon(p)$ converge pour tout $p \in P$, vers $\hat{u}(p)$ dans W faible, donc aussi dans H faible. Mais on a alors :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |\hat{u}_\varepsilon(p)|^2 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{Im(\hat{T}_\varepsilon(p),\ \hat{u}_\varepsilon(p))}{2a\xi\eta + b\eta} = |\hat{u}(p)|^2\ (^{49})$$

donc $\hat{u}_\varepsilon(p) \to \hat{u}(p)$ dans H fort.

Mais alors,

$$b(\varepsilon;\ \hat{u}_\varepsilon(p),\ \hat{u}_\varepsilon(p)) - b(\hat{u}(p),\ \hat{u}(p)) + b(\hat{u}_\varepsilon(p) - \hat{u}(p),\ \hat{u}_\varepsilon(p) - u(p))$$

converge vers 0, d'où (2, 20).

On déduit alors, comme dans *b*), de (2, 20) et (2, 21) que $u_\varepsilon \to u$ dans $\mathcal{D}'(t;\ W)$ d'où le théorème.

(49) *Im* désigne la partie imaginaire.

Problèmes non homogènes. — Reprenons l'hypothèse (1, 34). Soit T_ε et T avec (2, 5). Soit h donnée dans $\mathfrak{D}'_+(t; W)$, et une famille h_ε de $\mathfrak{D}'_+(t; V)$ telle que $h_\varepsilon \to h$ dans $\mathfrak{D}'_+(t; W)$, avec $\tilde{B}h \in \mathfrak{D}'_+(t; H)$, $\tilde{B}_\varepsilon h_\varepsilon \in \mathfrak{D}'_+(t; H)$, $\tilde{B}_\varepsilon h_\varepsilon$ convergent vers $\tilde{B}h$ dans $\mathfrak{D}_+(t; H)$ quand $\varepsilon \to 0$.

Soit, sous les hypothèses (1, 16) et (1, 17), S_ε (resp. U_ε) la solution de

$$(2, 23) \qquad \tilde{B}_\varepsilon S_\varepsilon + DS_\varepsilon = T_\varepsilon; \qquad S_\varepsilon - h_\varepsilon \in \mathfrak{D}'_+(t; N_\varepsilon)$$

(resp.

$$(2, 24) \qquad \tilde{B}_\varepsilon U_\varepsilon + aD^2U_\varepsilon + bDU_\varepsilon = T_\varepsilon; \qquad U_\varepsilon - h_\varepsilon \in \mathfrak{D}'_+(t; N_\varepsilon)$$

et S (resp. U) la solution de

$$(2, 25) \qquad \tilde{B}S + DS = T; \qquad S - h \in \mathfrak{D}'_+(t; N_B)$$

(resp.

$$(2, 26) \qquad \tilde{B}U + aD^2U + bDU = T; \qquad U - h \in \mathfrak{D}'_+(t; N_B).$$

On a alors :

THÉORÈME 2. 4. — *Sous les hypothèses du théorème* 2. 2. (*resp.* 2. 3) *la solution* S_ε *de* (2, 23) (*resp.* U_ε *de* (2, 24)) *converge dans* $\mathfrak{D}'_+(t; W)$ *vers la solution* S *de* (2, 25) (*resp.* U *de* (2, 26)).

Démonstration. — On se ramène facilement au théorème 2. 2 (resp. 2. 3) en posant

$$s_\varepsilon = S_\varepsilon - h_\varepsilon \quad \text{et} \quad s = S - h (\text{resp. } u_\varepsilon = U_\varepsilon - h_\varepsilon \quad \text{et} \quad u = U - h).$$

REMARQUE. — Les résultats du théorème 2. 3 se généralisent à l'aide des transmutations ([50]), à des opérateurs de la forme :

$$B_\varepsilon + D^2 + r(t)D + s(t).$$

Exemples. — 1° On prend un ouvert Ω de R^n, de frontière Γ. Puis $H = L^2(\Omega)$, $W = H^1(\Omega)$ et

$$b(u, v) = ((u, v))_1 + (u, v)_0 \qquad \text{qui définit} \qquad -\Delta + 1.$$

Exemple 2. 1. — Prenons $V = H^2_0(\Omega)$, donc $\overline{V}_{(W)} = H^1_0(\Omega)$. $b(\varepsilon; u, v) = \varepsilon\big((\Delta u, \Delta v)_0 - ((u, v))_1\big) + ((u, v))_1 + (u, v)_0$ définit $\varepsilon(\Delta^2 + \Delta) - \Delta + 1$.

([50]) Voir Lions [7].

Soit $T \in \mathcal{D}'_+(t;\ L^2(\Omega))$.

Soit u_ε la solution de

$$\varepsilon(\Delta^2 + \Delta)u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon + Du_\varepsilon = T; \qquad u_\varepsilon \in \mathcal{D}'_+(t;\ N_\varepsilon)$$

et u la solution de

$$-\Delta u + u + Du = T; \qquad u \in \mathcal{D}'_+(t;\ N_B).$$

Alors, d'après le théorème 2. 2, $u_\varepsilon \to u$ dans $\mathcal{D}'_+(t;\ H^1(\Omega))$.

Il reste à interpréter les conditions aux limites.

La condition $u_\varepsilon(x,\ t) \in \mathcal{D}'_+(t;\ N_\varepsilon)$ signifie que pour toute fonction $\varphi(t)$ de l'espace $\mathcal{D}_-$, $\langle u_\varepsilon(x,\ t),\ \varphi(t)\rangle$ est dans N_ε, donc ici :

$$\langle u_\varepsilon(x,\ t),\ \varphi(t)\rangle|_\Gamma = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial\nu}\langle u_\varepsilon(x,\ t),\ \varphi(t)\rangle\Big|_\Gamma = 0.$$

La condition $u \in \mathcal{D}'_+(t;\ N_B)$ signifie ici, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}_-$, $\langle u(x,\ t),\ \varphi(t)\rangle|_\Gamma = 0$.

2° On pourrait reprendre tous les exemples du chapitre I, n° 3. Bornons-nous à l'un d'entre eux :

Exemple 2. 2. — On suppose Γ régulière, et on prend H, W, et $b(u,\ v)$ comme dans 1°. Prenons ensuite $V = \mathcal{V}$, espace des $u \in L^2(\Omega)$ avec $\Delta u \in L^2(\Omega)$ muni de la norme $(|u|_0^2 + |\Delta u|_0^2)^{1/2}$. Alors $\overline{V}_{(W)} = H^1(\Omega)$. On prend

$$b(\varepsilon;\ u,\ v) = \varepsilon(\Delta u,\ \Delta v)_0 - \varepsilon^2((u,\ v))_1 + b(u,\ v)$$

qui définit $\varepsilon\Delta^2 + (\varepsilon^2 - 1)\Delta + 1$.

Soit T donnée dans $D'_+\ (t;\ H)$.

Soit u_ε la solution de

$$\varepsilon\Delta^2 u_\varepsilon + (\varepsilon^2 - 1)\Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon + D^2 u_\varepsilon = T; \quad u_\varepsilon \in \mathcal{D}'_+(t,\ N_\varepsilon).$$

Les conditions aux limites sont ici : pour toute $\varphi(t) \in \mathcal{D}_-$,

$$\frac{\partial}{\partial\nu}(\varepsilon\langle\Delta u_\varepsilon(x,\ t),\ \varphi(t)\rangle + (\varepsilon^2 - 1)\langle u_\varepsilon(x,\ t),\ \varphi(t)\rangle)\Big|_\Gamma = 0$$

et

$$\langle\Delta u_\varepsilon(x,\ t),\ \varphi(t)\rangle|_\Gamma = 0.$$

Soit u la solution de

$$-\Delta u + u + D^2 u = T;\ u \in \mathcal{D}'_+(t;\ N_B)$$

pour laquelle les conditions aux limites sont : pour toute $\varphi \in \mathcal{D}_-$, on a $\frac{\partial}{\partial\nu}\langle u(x, t), \varphi(t)\rangle\Big|_\Gamma = 0$.

Alors, d'après le théorème 2. 3, $u_\varepsilon \to u$ dans $\mathcal{D}'_+(t; H^1(\Omega))$.

2. Problèmes mixtes fins pour des opérateurs de la forme $A(t) + D$; théorèmes d'existence et d'unicité ([51]).

On se propose dans ce numéro, d'étudier l'existence et l'unicité de la solution de problèmes mixtes pour l'opérateur $A(t) + D$, par la méthode de Galerkine, utilisée par de nombreux auteurs ([52]), pour les opérateurs du 2e ordre en t.

On reprend H comme au nº 1, puis V séparable avec (1, 1).

On se donne sur V, une famille de formes sesquilinéaires continues, $a(t; u, v)$, $t \geqslant 0$, $u, v \in V$.

Espace $N(t)$ et opérateur $A(t)$ associés à $a(t; u, v)$.

Pour t fixé, $N(t)$ est l'espace des $u \in V$ tels que l'application $v \to a(t; u, v)$ soit continue sur V muni de la topologie induite par H. Comme V est dense dans H, il existe $A(t)u \in H$, tel que $a(t; u, v) = (A(t)u, v)$ pour tout $v \in V$. On munit $N(t)$ de la norme

$$\|u\|_{N(t)} = (\|u\|_V^2 + |A(t)u|^2)^{1/2}$$

qui en fait un espace de Hilbert. Alors $A(t) \in \mathcal{L}(N(t); H)$.

On dira que $a(t; u, v)$, vérifie sur V, l'hypothèse (2, 27) (resp. (2, 28)) si on a

(2, 27) $t \to a(t; u, v)$ est deux fois continûment différentiable.

(resp.

(2, 28) (ellipticité) $\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } c > 0 \text{ il existe } \alpha(c) = \alpha > 0 \\ \quad \text{et } \lambda(c) = \lambda \text{ tels que, pour tout} \\ \quad t \in (0, c) \text{ et tout } u \in V \text{ on ait} \\ \qquad \mathrm{Re}\, a(t; u, u) + \lambda |u|^2 \geqslant \alpha \|u\|_V^2. \end{array} \right.$

([51]) Les résultats de ce nº 2 ne sont pas nouveaux ; ils sont implicitement contenus dans Trèves [1] et Lions [6]. Nous les donnons ici explicitement pour la commodité du lecteur.

([52]) Voir Lions [6], Faedo [1], Visik [1] et Visik-Ladyzenskaia [1].

De (2, 27) résulte :

(2, 29) $\left\{\begin{array}{l}\text{Pour tout } c > 0 \text{ il existe } \mu_1(c) = \mu_1 \text{ et } \mu_2(c) = \mu_2 \\ \quad \text{tels que, pour tout } t \in (0, c) \text{ et tout } u, v \in \mathrm{V}, \\ \quad \text{on ait} \\ \qquad\qquad |a'(t; u, v)| \leqslant \mu_1 \|u\|_{\mathrm{V}} \|v\|_{\mathrm{V}} \\ \quad \text{et} \qquad |a''(t; u, v)| \leqslant \mu_2 \|u\|_{\mathrm{V}} \|v\|_{\mathrm{V}} \text{ (}^{53}\text{)}\end{array}\right.$

Nous désignons par $\mathcal{C}_1$ (resp. $\mathcal{C}_2$) l'ensemble des applications continues (resp. une fois continûment différentiable) de $t \geqslant 0$ dans H, avec $h' \in L^2((o, s); H)$ [54] (resp. $h'' \in L^2((o, s); H)$ pour tout $s > 0$.

Nous avons le :

Théorème 2. 5. — *Soit* $h(t) \in \mathcal{C}_2$, *avec* $h(0) \in N(0)$. *Sous les hypothèses* (2, 27) *et* (2, 28), *il existe une fonction et une seule* $t \to u(t)$, *une fois continûment différentiable de* $t \geqslant 0$, *dans* V, *solution de :*

$$(2,\ 30) \qquad A(t)u(t) + Du(t) = h(t), \quad u(t) \in N(t)$$

pour $t \geqslant 0$ et $u(0) = 0$.

De plus u, u' *et* u'' *sont dans* $L^2((0, s); V)$ *pour tout* $s > 0$.

Il nous suffit de montrer le théorème pour $t \in (0, c)$, c fixé quelconque.

Lemme 2. 3. — *On peut toujours remplacer* (2, 28) *par*

(2, 31) $\left\{\begin{array}{l}\textit{pour tout } c > 0 \textit{ il existe } \alpha(c) = \alpha > 0, \textit{ tel que} \\ \mathrm{Re}\, a(t; u, u) \geqslant \alpha \|u\|_{\mathrm{V}}^2 \textit{ pour tout } u \in \mathrm{V} \textit{ et tout } t \in (0, c).\end{array}\right.$

Démonstration. — Pour λ réel, on pose $v(t) = e^{-\lambda t}u(t)$. Il est facile de voir qu'on peut toujours choisir λ tel que

$$a(t; u, v) + \lambda(u, v)$$

vérifie (2, 31).

Démonstration du théorème 2. 5. — Nous nous plaçons sur l'intervalle $(0, c)$, c fixé, et nous supposons que $a(t; u, v)$ vérifie (2, 27) et (2, 31).

(53) On pose $a'(t; u, v) = Da(t; u, v)$; $a''(t; u, v) = D^2a(t; u, v)$ et plus généralement

$$a^{(n)}(t; u, v) = D^n(a(t; u, v)).$$

(54) $L^2((o, s); H)$ est l'espace des fonctions de carré sommable sur $(0, s)$ à valeurs dans H, muni de sa structure Hilbertienne naturelle.

Démonstration de l'unicité. — Nous supposons dans (2, 30), $h(t) = 0$, et nous devons montrer que $u(t) = 0$. Or, on a

$$a(t;\, u(t),\, u(t)) + (u'(t),\, u(t)) = 0.$$

On en déduit, en tenant compte de (2, 31) et de la condition $u(0) = 0$,

$$2\alpha \int_0^s ||u(t)||_V^2\, dt + |u(s)|^2 \leqslant 0 \quad \text{pour tout} \quad s \in (0,\, c).$$

Par suite $u(t)$ est nulle pour tout $t \in (0,\, s)$ donc pour tout $t \in (0,\, c)$.

Démonstration de l'existence. — Soit $w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots$ une suite totale dans V, telle que pour tout p, $w_1, \ldots w_p$ soient linéairement indépendants. Soit $g_{in}(t)$ la solution du système différentiel :

$$\text{(2, 32)} \quad D^2 \left\{ \sum_{i=1}^{n} g_{in}(t)\, a(t; w_i, w_j) + \sum_{i=1}^{n} g'_{in}(t)\,(w_i,\, w_j) \right\} = D^2((h(t), w_j))$$
$$j = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$$

avec

$$\text{(2, 33)} \quad g_{in}(0) = 0; \quad g'_{in}(0) = \beta_{in} \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{n} \beta_{in} w_i \to h(0) \quad \text{dans V}$$

$$g''_{in}(0) = \gamma_{in} \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{n} \gamma_{in} w_i \to h'(0) - A(0)\, h(0) \quad \text{dans H.}$$

Le système admet une solution unique g_{in} qui est deux fois continûment différentiable de $t \geqslant 0$, avec $g'''_{in} \in L^2(0,\, s)$ pour tout $s > 0$.

Posons

$$\text{(2, 34)} \qquad u_n(t) = \sum_{i=1}^{n} g_{in}(t)\, w_i.$$

On déduit de (2, 32) :

$$a(t;\, u''_n(t),\, u''_n(t)) + 2a'(t;\, u'_n(t),\, u''_n(t)) + a''(t;\, u_n(t),\, u''_n(t))$$
$$+ (u'''_n(t),\, u''_n(t)) = (h''(t),\, u''_n(t)).$$

D'où, en prenant les parties réelles des deux membres et en intégrant de 0 à s :

$$2 \int_0^s \mathrm{Re}\, a(t;\, u''_n(t),\, u''_n(t))\, dt \leqslant |u''_n(0)|^2$$
$$+ \int_0^s |2\mathrm{Re}\{(h''(t), u''_n(t)) - 2a'(t; u'_n(t), u''_n(t)) - a''(t; u_n(t), u''_n(t))\}|\, dt.$$

D'où, pour $s \in (0, c)$, en tenant compte, d'une part de (2, 29) et (2, 31), d'autre part de

$$(2, 35) \quad \|u_n(t)\|_V^2 \leqslant t \int_0^t \|u_n'(x)\|_V^2 \, dx \quad (\text{puisque } u_n(0) = 0)$$

et

$$(2, 36) \quad \|u_n'(t)\|_V^2 \leqslant 2 \|u_n'(0)\|_V^2 + 2t \int_0^t \|u_n''(x)\|_V^2 \, dx.$$

$$2\alpha \int_0^s \|u_n''(t)\|_V^2 \, dt \leqslant |u_n''(o)|^2 + (k_1 s + k_2)\|u_n'(0)\|_V^2 + \left(k_3 s \int_0^s \|u_n''(t)\|_V^2 \, dt\right) + \mathrm{K}\left(\int_0^s |h''(t)|^2 \, dt\right)^{1/2} \left(\int_0^s \|u_n''(t)\|_V^2 \, dt\right)^{1/2}$$

où les constantes k_1, k_2, k_3 et K ne dépendent que de c.

En tenant compte de (2, 33) on en déduit qu'il existe s_0, ne dépendant que de c, tel que

$$\int_0^{s_0} \|u_n''(t)\|_V^2 \, dt \leqslant \mathrm{C}(s_0).$$

On en déduit, d'après (2, 35) et (2, 36) :

$$\int_0^{s_0} (\|u_n''(t)\|_V^2 + \|u_n'(t)\|_V^2 + \|u_n(t)\|_V^2) \, dt \leqslant \mathrm{C}(s_0).$$

On peut donc extraire une sous-suite u_ν, telle que u_ν, u_ν', u_ν'', convergent faiblement dans $L^2((o, s_0); V)$. Soit u la limite de u_ν; alors u est une fois continûment différentiable de (o, s_0) dans V, et pour chaque $t \in (o, s_0)$, $u_\nu(t) \to u(t)$ et $u_\nu'(t) \to u'(t)$ dans V faible.

Intégrons alors deux fois (2, 32) en tenant compte de (2, 33). On obtient :

$$a(t; u_n(t), w_j) + (u'_n(t), w_j) = (h(t), w_j) + (u_n'(0) - h(0), w_j) + ta(0; u_n'(0), w_j) + t(u_n''(0) - h'(0), w_j).$$

Prenons $n = \nu$ et faisons tendre ν vers l'∞. Le premier membre de l'égalité précédente tend vers :

$$a(t; u(t), w_j) + (u'(t), w_j).$$

Le deuxième membre tend vers $(h(t), w_j)$ puisque, d'après (2, 33) $u_n'(0) \to h(0)$ dans V, et que, d'autre part :

$$a(0; u_n'(0), w_j) \to a(0; h(0), w_j) = (\mathrm{A}(0)\, h(0), w_j).$$

puisque $h(0) \in \mathrm{N}(0)$.

Par suite $u(t)$ vérifie :

$$(2, 37) \quad a(t; u(t), w_j) + (u'(t), w_j) = (h(t), w_j) \quad \text{pour tout } j.$$

Par suite $u(t)$ est solution de (2, 30), pour $t \in (0, s_0)$.

Désignons par $u_1(t)$ la solution de (2, 30) dans (o, s_0). Nous sommes amenés à chercher une fonction $u_2(t)$, définie sur $t \geqslant s_0/2$, une fois continûment différentiable de $t \geqslant s_0/2$ dans V, vérifiant :

$$\text{(2, 38)} \quad A(t)u_2(t) + Du_2(t) = h(t)\,;\; u_2(t) \in N(t)\,;\; u_2(s_0/2) = u_1(s_0/2).$$

Soit $p(t)$ une fonction indéfiniment différentiable, avec $p(t) = 1$ pour $t \leqslant (s_0/2) + \tau$, $\tau < s_0/4$, $p(t) = 0$ si $t \geqslant s_0 - \tau$. Posons $v_1(t) = p(t)u_1(t)$. Pour tout $t \geqslant 0$, $v_1(t) \in N(t)$. Posons $w_2(t) = u_2(t) - v_1(t)$. Il est équivalent de chercher $u_2(t)$ solution de (2, 38), ou de chercher $w_2(t)$, une fois continûment différentiable de $t \geqslant s_0/2$ dans V, vérifiant :

$$\text{(2, 39)} \quad \begin{cases} A(t)w_2(t) + Dw_2(t) = h_2(t)\,;\; w_2(t) \in N(t),\; w_2(s_0/2) = 0 \\ \text{avec} \qquad h_2(t) = h(t)\,(1 - p(t)) - p'(t)u_1(t). \end{cases}$$

Or, $h_2(t)$ est une fonction une fois continûment différentiable de $t \geqslant s_0/2$ dans H, et $h_2'' \in L^2((s_0/2, s)\,;\, H)$ pour tout $s > s_0/2$, puisque $u_1'' \in L^2((0, s_0)\,;\, H)$. De plus $h_2(s_0/2) = 0$, donc est dans $N(s_0/2)$.

Le problème (2, 39) est donc équivalent au problème (2, 30) avec $s_0/2$ à la place de 0. Par suite il existe une solution unique de (2, 39), dans $(s_0/2, \operatorname{Inf}(3s_0/2, c))$, et ainsi de suite si $c > 3s_0/2$.

On peut obtenir un théorème analogue au théorème 2. 5, en affaiblissant les conditions sur $h(t)$, mais en faisant des hypothèses supplémentaires sur $a(t;\, u,\, v)$. De façon précise, nous posons :

$$\text{(2, 40)} \qquad a(t;\, u,\, v) = a_0(t;\, u,\, v) + a_1(t;\, u,\, v)$$

avec

$$\text{(2, 41)} \quad a_0(t;\, u,\, v) = \overline{a_0(t;\, v,\, u)} \quad \text{pour tout} \quad u,\, v \in V$$

et, nous supposons :

$$\text{(2, 42)} \quad \begin{cases} \text{pour tout } c > 0, \text{ il existe } \lambda(c) = \lambda \text{ et } \alpha(c) = \alpha > 0, \\ \quad \text{tels que, pour tout } t \in (o, c) \text{ et tout } u \in V, \text{ on ait :} \\ \qquad a_0(t;\, u,\, u) + \lambda|u|^2 \geqslant \alpha\|u\|_V^2 \end{cases}$$

et

$$\text{(2, 43)} \quad \begin{cases} \text{pour tout } c > 0, \text{ il existe } \nu(c) = \nu, \text{ tel que, pour} \\ \quad \text{tout } t \in (o,\, c) \text{ et tout } u,\, v \in V, \text{ on ait :} \\ \qquad |\mathrm{Re}\, a_1(t;\, u,\, v)| \leqslant \nu\|u\|_V|v|. \end{cases}$$

On a alors le

THÉORÈME 2. 6. — *Soit* $h(t) \in \mathcal{C}_1$, *avec* $h(0) \in V$. *Sous les hypothèses* (2, 27), (2, 42), et (2, 43), *il existe une fonction et une seule, continue* (*resp. une fois continûment différentiable*) *de* $t \geqslant 0$ *dans* V (*resp. dans* H), *solution de* (2, 30). *De plus* u *et* u' *sont dans* $L^2((0, s); V)$ *et* u'' *est dans* $L^2((0, s)); H)$ *pour tout* $s > 0$.

Démonstration. — Il suffit de montrer le théorème dans (o, c), c fixé. Nous pouvons remplacer (2, 42) par :

(2, 44) il existe $\alpha(c) = \alpha > 0$, tel que, pour tout $t \in (0, c)$ et tout $u \in V$, on ait : $a_0(t; u, u) \geqslant \alpha\ ||u||_V^2$.

L'unicité s'établit comme pour le théorème 2. 5. Montrons l'existence.

Les w_i étant définis comme précédemment, soit $g_{in}(t)$ la solution du système :

(2, 45) $$D\left(\sum_{i=1}^{n} g_{in}(t)a(t; w_i, w_j) + \sum_{i=1}^{n} g'_{in}(t)(w_i, w_j)\right) = D(h(t), w_j),$$
$$j = 1, 2, \ldots, n$$

avec les conditions :

(2, 46) $$g_{in}(0) = 0; \quad g'_{in}(0) = \beta_{in} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \beta_{in} w_i \to h(0) \quad \text{dans V.}$$

Ce système admet une solution unique, qui est une fois continûment différentiable, avec $g''_{in} \in L^2(o, s)$.

Posons encore $u_n(t) = \sum_{i=1}^{n} g_{in}(t) w_i$.

On déduit de (2, 45)

$$a(t; u'_n(t), u'_n(t)) + a'(t; u_n(t), u'_n(t)) + (u''_n(t), u'_n(t)) = (h'(t), u'_n(t)).$$

D'où en prenant les parties réelles et en intégrant de 0 à s :

$$2\int_0^s a_0(t;\ u'_n(t),\ u'_n(t))\, dt$$
$$\leqslant |u'_n(0)|^2 + 2\int_0^s |\mathrm{Re}\{(h'(t),\ u'_n(t)) - a'(t;\ u_n(t),\ u'_n(t))\}|\, dt.$$

On en déduit très facilement par des majorations analogues à celles du théorème 2. 5, qu'il exite s_0 ne dépendant que de c, tel que

(2, 47) $$\int_0^{s_0} (||u'_n(t)||_V^2 + ||u_n(t)||_V^2)\, dt \leqslant C(s_0).$$

Mais on déduit aussi de (2, 45) :

$$a(t;\ u_n'(t),\ u_n''(t)) + a'(t;\ u_n(t),\ u_n''(t)) + |u_n''(t)|^2 = (h'(t),\ u_n''(t)).$$

D'où, en prenant les parties réelles et en intégrant de o à s_0 :

$$(2,48)\quad a_0(s_0\,;u_n'(s_0),u_n'(s_0)) + \int_0^{s_0}|u_n''(t)|^2 dt \leqslant a_0(0\,;u_n'(0),u_n'(0)) + \int_0^{s_0}|h'(t)|^2\,dt + \int_0^{s_0}\{|a_0'(t;\ u_n'(t),\ u_n'(t))| + 2|\mathrm{Re}a_1(t;\ u_n'(t),\ u_n''(t))|\}\,dt + 2\left|\int_0^{s_0}\mathrm{Re}a'(t;\ u_n(t),\ u_n''(t))\,dt\right|.$$

Majoration de $\int_0^{s_0}|\mathrm{Re}a_1(t;u_n'(t),u_n''(t))|\,dt$. Nous utilisons (2, 43):

$$\int_0^{s_0}|\mathrm{Re}a_1(t;\ u_n'(t),\ u_n''(t))|\,dt \leqslant \nu\left(\int_0^{s_0}||u_n'(t)||_V^2\,dt\right)^{1/2}\left(\int_0^{s_0}|u_n''(t)|^2\,dt\right)^{1/2}.$$

D'où, en utilisant (2, 47) :

$$\left|\int_0^{s_0}\mathrm{Re}a_1((t;\ u_n'(t),\ u_n''(t))\,dt\right| \leqslant K_1\left(\int_0^{s_0}|u_n''(t)|^2\,dt\right)^{1/2}.$$

Majoration de $\left|\int_0^{s_0}a'(t;\ u_n(t),\ u_n''(t))dt.\right|$ Nous partons de :

$$a'(t,\ u_n(t),\ u_n''(t)) = D\{a'(t;\ u_n(t),\ u_n'(t))\} - a'(t;\ u_n'(t),\ u_n'(t)) - a''\ (t;\ u_n(t),\ u_n'(t)).$$

D'où, en utilisant, à la fois, (2, 29), (2, 35) et (2, 46) et (2,47) :

$$\left|\int_0^{s_0}\mathrm{Re}a'(t;\ u_n(t),\ u_n''(t))\,dt\right| \leqslant K_2 + K_3||u_n'(s_0)||_V.$$

De plus, d'après (2, 47), $\int_0^{s_0}|a_0'(t;\ u_n'(t),\ u_n'(t))|\,dt \leqslant K_4$, les constantes K_1, K_2, K_3, K_4 étant indépendantes de n.

Portant ces majorations dans (2, 48) et utilisant (2, 44) et (2, 46), on voit qu'il existe une constante K_5 indépendante de n, telle que

$$(2,\ 49)\qquad \int_0^{s_0}|u_n''(t)|^2\,dt \leqslant K_5.$$

De (2, 47) et (2, 49), il résulte que l'on peut extraire une sous suite u_ν telle que u_ν et u_ν' (resp. u_ν'') convergent faiblement dans $L^2((o,\ s_0);\ V)$ (resp. dans $L^2((o,\ s_0);\ H)$. Si u est la limite de u_ν, alors u est continue (resp. une fois continûment différentiable) de $(o,\ s_0)$ dans V (resp. dans H) et pour chaque $t \in (o,\ s_0)$, $u_\nu(t)$ (resp. $u_\nu'(t)$) converge vers $u(t)$ (resp. $u'(t)$) dans V faible (resp. dans H faible).

Il est facile de montrer, comme dans le théorème 2. 5, par passage à la limite, en utilisant (2, 46), que $u(t)$ est solution de (2, 30) dans $(o; s_0)$. On en déduit le résultat sur (o, c) exactement comme dans la démonstration du théorème 2. 5.

Problèmes mixtes. — Nous faisons maintenant l'hypothèse (1, 7) [55]. Au théorème 2. 5 correspondra le problème mixte suivant : Soit $t \to F(t)$ une fonction définie de $t \geqslant 0$ dans V, deux fois (resp. trois fois) continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans V (resp. dans H), avec $A(t)F(t) \in H$ pour tout $t \geqslant 0$, et $t \to A(t)\,F(t)$ deux fois continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans H, et $A(0)F(0) + F'(0) \in N(0)$.

Soit $k(t) \in \mathcal{C}_2$ *et* $k(0) \in N(0)$.

Problème 2. 5. — *Trouver* $U(t)$, *une fois continûment différentiable de* $t \geqslant 0$ *dans* V, *avec*

$$A(t)U(t) + DU(t) = k(t),\ U(t) - F(t) \in N(t) \qquad \textit{pour} \qquad t \geqslant 0;$$
$$U(0) = F(0).$$

En posant $u(t) = U(t) - F(t)$ on est ramené au problème (2, 30) avec

$$h(t) = k(t) - (A(t)F(t) + DF(t)).$$

D'après les propriétés de $k(t)$ et $F(t)$, $h(t)$ vérifie les propirétés du théorème 2. 5. Par suite, sous les hypothèses (2, 27), (2, 28), le problème 2. 5 admet une solution unique; De plus U, U′, et U″ sont dans $L^2((o, s); V)$ pour tout $s > 0$.

Au théorème 2. 6 correspond le problème mixte suivant : Soit $t \to F(t)$ une fonction à valeurs dans V, une fois (resp. deux fois) continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans V (resp. dans H) avec $A(t)F(t) \in H$ pour tout $t \geqslant 0$, et $t \to A(t)F(t)$ une fois continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans H, et $A(0)F(0) + F'(0) \in V$.

Soit $k(t) \in \mathcal{C}_1$ avec $k(0) \in V$.

Problème 2. 6. — *Trouver* $U(t)$, *continue* (*resp. une fois continument différentiable*) *de* $t \geqslant 0$ *dans* V (*resp.* H) *avec*

$$A(t)U(t) + DU(t) = k(t);$$
$$U(t) - F(t) \in N(t) \quad \textit{pour} \quad t \geqslant 0 \quad \textit{et} \quad U(0) = F(0).$$

[55] Nous supposons (1, 7) pour simplifier. Sous la seule hypothèse (1, 1) on devra supposer qu'il existe un espace vectoriel topologique E, et un opérateur $\tilde{A}(t) \in \mathcal{L}(V; E)$ tel que $A(t)h = \tilde{A}(t)h$ pour tout $h \in N(t)$. Cf. p. 54, problèmes 2-3 et 2-4.

On voit facilement, d'après le théorème 2. 6 que si $a(t; u, v)$ vérifie les hypothèses (2, 27), (2, 42) et (2, 43) le problème 2. 6 admet une solution unique. De plus U et U′ sont dans $L^2((0, s); V)$ et U″ est dans $L^2((0, s); H)$ pour tout $s > 0$.

Cas particulier des opérateurs indépendants du temps.

Les résultats précédents sont encore valables pour une seule forme sesquilinéaire $a(u, v)$ définissant un opérateur A et un espace N indépendants du temps. Les hypothèses (2, 28), (2, 42) et (2, 43) se modifient de façon évidente. Quant aux démonstrations elles se simplifient puisque les termes en $a'(t; u, v)$ $a''(t, u, v)$ etc... disparaissent. En particulier, on obtient directement le résultat dans $(0, c)$ sans passer par l'intermédiaire de s_0.

Notons encore, pour des opérateurs indépendants du temps, le théorème suivant qui nous sera utile dans la suite :

Théorème 2. 7. — *Soit f donnée dans* N *avec* $Af \in N$ (*resp.* $Af \in V$). *Si la forme* $a(u, v)$ *vérifie* (2, 28) (*resp.* (2, 42) *et* (2, 43)) (*ces hypothèses étant modifiées de façon évidente*) *il existe une fonction et une seule* $u(t)$, *une fois continûment différentiable de* $t \geqslant 0$ *dans* V (*resp. continue de* $t \geqslant 0$ *dans* V, *une fois continûment différentiable de* $t \geqslant 0$ *dans* H) *vérifiant :*

$$(2, 50) \quad Au(t) + Du(t) = 0; \; u(t) \in N(t) \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0$$
$$u(0) = f.$$

En posant $U(t) = u(t) - f$ on se ramène au théorème 2. 5 (resp.. 2. 6).

3. — Perturbation singulière : convergence fine pour des opérateurs de la forme $B_\varepsilon(t) + D$ et $B_\varepsilon(t) + D^2$.

On reprend deux espaces de Hilbert V et W avec

$$(2, 51) \quad V \subset W \subset H \quad \text{et} \quad V \text{ séparable dense dans } H.$$

On se donne sur V (resp. W) une famille de formes sesquilinéaires continues $b(\varepsilon; t; u, v)$, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $t \geqslant 0$ (resp. $b(t; u, v)$, $t \geqslant 0$).On désigne toujours par $\overline{V}_{(W)}$ l'adhérence de V dans W, muni de la topologie induite par W, par $N_\varepsilon(t)$ et $B_\varepsilon(t)$ l'espace et l'opérateur attachés à $b(\varepsilon; t; u, v)$ sur V, et par $N_B(t)$ et

$B(t)$ l'espace et l'opérateur attachés à $b(t; u, v)$ sur $\overline{V}_{(W)}$. Donnons maintenant une définition.

Désignons par $\mathcal{C}_1(t_0)$ resp. $(\mathcal{C}_2(t_0))$ l'ensemble des fonctions continues (resp. une fois continûment différentiables) de $t \geqslant t_0$ dans H, avec h' (resp. h'') dans $L^2((t_0, s); H)$ pour tout $s > t_0$).

Soit $h(t) \in \mathcal{C}_1(t_0)$ (resp. $\mathcal{C}_2(t_0)$). Soit $h_\varepsilon(t)$ une famille de $\mathcal{C}_1(t_0)$ (resp. $\mathcal{C}_2(t_0)$).

Définition 2. 2. — Nous dirons que $h_\varepsilon(t)$ vérifie la propriété $\mathcal{C}_1(t_0; h)$ (resp. $\mathcal{C}_2(t_0; h)$) si nous avons, pour ε convergent vers 0 :

(2, 52) $\quad h_\varepsilon(t_0)$ est borné dans V.

(2, 53) $\quad h_\varepsilon \to h$ dans $L^2((t_0, s); H)$ et h'_ε est borné dans cet espace pour tout $s > t_0$.

(resp.

(2, 54) $\quad h_\varepsilon(t_0) \in N_\varepsilon(t_0)$.

$h_\varepsilon(t_0)$ est borné dans V.

$B_\varepsilon(t_0)h_\varepsilon(t_0)$ est borné dans H.

$h'_\varepsilon(t_0)$ est borné dans H.

(2, 55) $\quad h_\varepsilon \to h$ dans $L^2((t_0, s); H)$ et h''_ε est borné dans cet espace pour tout $s > t_0$.

Lemme 2. 3. — *Si $h_\varepsilon(t)$ vérifie $\mathcal{C}_1(t_0; h)$ (resp. $\mathcal{C}_2(t_0;$ H)) alors, on a :*

(2, 56) *pour tout* $t \geqslant t_0$, $h_\varepsilon(t) \to h(t)$ *dans* H.

(*resp.*

(2, 57) *pour tout* $t \geqslant t_0$, $h'_\varepsilon(t)$ *est borné dans* H, *et* $h_\varepsilon(t) \to h(t)$ *dans* H.

Démonstration. — Si $h_\varepsilon(t) \in \mathcal{C}_2(t_0)$, on a

(2, 58) $$|h'_\varepsilon(t)|^2 \leqslant 2|h'_\varepsilon(t_0)|^2 + 2(t-t_0)\int_{t_0}^{t}|h''_\varepsilon(x)|^2\,dx.$$

Si $h_\varepsilon(t)$ vérifie $\mathcal{C}_2(t_0; h)$, alors $h'_\varepsilon(t_0)$ (resp. h''_ε) est borné dans H (resp. dans $L^2((t_0, s); H)$ pour $s > t_0$) et par suite $h'_\varepsilon(t)$ est borné pour $t > t_0$. Le lemme 2. 3 résulte donc du lemme :

Lemme 2. 4. — *Soit* K *un espace de Hilbert, et t_0 un nombre réel* > 0. *Si $h_\varepsilon \to h$ dans* $L^2((t_0, t); K)$ *et si h'_ε est borné dans cet espace pour tout $t > t_0$, alors $h_\varepsilon(t) \to h(t)$ dans* K *pour tout* $t \geqslant t_0$.

Démonstration. — On a

$$D\|h_\varepsilon(t)-h(t)\|_K^2 = 2\mathrm{Re}(h'_\varepsilon(t)-h'(t), \qquad h_\varepsilon(t)-h(t))_K$$

donc

$$\|h_\varepsilon(t)-h(t)\|_K^2 - \|h_\varepsilon(t_0)-h(t_0)\|_K^2 = 2\int_0^t \mathrm{Re}(h'_\varepsilon(x)-h'(x), \\ h_\varepsilon(x)-h(x))_K dx.$$

Par suite des hypothèses le second membre tend vers 0, donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|h_\varepsilon(t)-h(t)\|_K^2 = \lim_{\varepsilon\to 0}\|h_\varepsilon(t_0)-h(t_0)\|_K^2$$

cette limite ne peut être que 0, car autrement $h_\varepsilon(t)$ ne pourrait pas converger vers $h(t)$ dans $L^2((t_0, t); K)$ pour $t > t_0$.

Exemple. — Si $h(t)\in\mathcal{C}_2$ (resp. $\mathcal{C}_1$) alors la famille réduite à $h(t)$ elle-même appartient à $\mathcal{C}_2(0; h)$ (resp. $\mathcal{C}_1(0; h)$ à condition que $h(0)\in\bigcap_\varepsilon N_\varepsilon(0)\cap N_B(0)$ [56] (resp. $h(0)\in V$).

Faisons sur $b(\varepsilon; t; u, v)$ et $b(t; u, v)$ les hypothèses suivantes :

Hypothèses d'ellipticité.

(2, 59) Pour tout $c>0$, il existe $\alpha(\varepsilon; c)=\alpha(\varepsilon)>0$, $\alpha(\varepsilon)\to 0$ avec ε, et $\beta>0$, tels que, pour tout $t\in(0, c)$ tout $u\in V$, et tout $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, on ait :

$$\mathrm{Re}\,b(\varepsilon; t; u, u)\geqslant\alpha(\varepsilon)\|u\|_V^2+\beta\|u\|_W^2$$

et

(2, 60) $b(t; u, v)$ vérifie (2, 31) sur W.

Hypothèses de différentiabilité en t.

(2, 61) Pour $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, et $u, v\in V$, $t\to b(\varepsilon; t; u, v)$ est deux fois continûment différentiable en t, et pour tout $c>0$, il existe des constantes $\mu_1(c)=\mu_1$, $\mu_2(c)=\mu_2$, $\nu_1(c)=\nu_1$, $\nu_2(c)=\nu_2$, telles que pour tout $t\in(0, c)$, $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, et $u, v\in V$ on ait :

$$|b'(\varepsilon; t; u, v)|\leqslant\mu_1\alpha(\varepsilon)\|u\|_V\|v\|_V+\mu_2\|u\|_W\|v\|_W,$$
$$|b''(\varepsilon; t; u, v)|\leqslant\nu_1\alpha(\varepsilon)\|u\|_V\|v\|_V+\nu_2\|u\|_W\|v\|_W.$$

$\alpha(\varepsilon)$ étant définie dans (2, 59).

[56] Cette intersection n'est jamais vide; elle contient toujours 0. Sous l'hypothèse (1, 33) elle contient même $\mathcal{D}(\Omega)$.

(2, 62) $b(t; u, v)$ est deux fois continûment différentiable en t pour $u, v \in W$.

et enfin, les deux hypothèses suivantes :

(2, 63) pour chaque $t \geqslant 0$, $b(\varepsilon; t; u, v)$ vérifie (1, 22), *i.e.*, si $u_\varepsilon \in V$ vérifie $|b(\varepsilon; t; u_\varepsilon, u_\varepsilon)|$ borné, alors $b(\varepsilon; t; u_\varepsilon, v) - b(t; u_\varepsilon, v) \to 0$ pour tout $v \in V$

et

(2, 64) Pour tout $c > 0$, il existe $\delta(\varepsilon; c) = \delta(\varepsilon)$, $\delta(\varepsilon) \to 0$ avec ε, telle que pour tout $t \in (0, c)$ et tout $u \in V$, on ait :

$$\mathrm{Re}\{b(\varepsilon; t; u, u) - b(t; u, u)\} + \delta(\varepsilon)\,\mathrm{Re}\,b(t; u, u) \geqslant 0\ (^{57}).$$

Théorème 2. 8. — *Soit* $h(t) \in \mathcal{C}_2$ *avec* $h(0) \in N_B(0)$ *et une famille* $h_\varepsilon(t) \in \mathcal{C}_2$ *vérifiant* $\mathcal{C}_2(0; h)$. *Sous les hypothèses* (2, 51), (2, 59) *et* (2, 60), (2, 61) *et* (2, 62), (2, 63), (2, 64), *soit* $u_\varepsilon(t)$ (*resp.* $u(t)$) *la solution une fois continûment différentiable de* $t \geqslant 0$ *dans* V (*resp.* $\overline{V}_{(W)}$) *de*

(2, 65) $$B_\varepsilon(t)u_\varepsilon(t) + Du_\varepsilon(t) = h_\varepsilon(t); u_\varepsilon(t) \in N_\varepsilon(t) \quad \text{pour} \quad t > 0; \quad u_\varepsilon(0) = 0.$$

(*resp.*

(2, 66) $$B(t)u(t) + Du(t) = h(t);\ u(t) \in N_B(t) \quad \text{pour} \quad t > 0 \quad u(0) = 0.$$

Alors pour tout $s > 0$, u_ε *converge dans* $L^2((0, s); W)$ *vers* u; u'_ε *converge faiblement dans cet espace vers* u', *et* u''_ε y *converge faiblement vers* u''. *Il en résulte que pour tout* $t \geqslant 0$, $u_\varepsilon(t) \to u(t)$ *dans* W *fort, et* $u'_\varepsilon(t) \to u'(t)$ *dans* W *faible.*

Remarque. — On pourra toujours se ramener aux hypothèses (2, 59) et (2, 60) si on a

(2, 59′) Pour tout $c > 0$, il existe $\alpha(\varepsilon; c) = \alpha(\varepsilon) > 0$, $\alpha(\varepsilon) \to 0$ avec ε, $\lambda(\varepsilon; c) = \lambda(\varepsilon)$, $\lambda(\varepsilon) \to \lambda$ quand $\varepsilon \to 0$, et $\beta(c) = \beta > 0$, tels que pour tout $t \in (0, c)$ tout $u, v \in V$, et $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, on ait :

$$\mathrm{Re}\ b(\varepsilon; t; u, u) + \lambda(\varepsilon)\,|u|^2 \geqslant \alpha(\varepsilon)\,\|u\|_V^2 + \beta\,\|u\|_W^2$$

(57) Cf. (I, 23.)

et

(2, 60′) Pour tout $c > 0$, il existe $\gamma(c) = \gamma > 0$, et $\mu(c) = \mu$ tels que, pour tout $t \in (0, c)$ et tout $u, v \in W$, on ait :

$$\mathrm{Re}\, b(t; u, u) + \mu |u|^2 \geqslant \gamma \|u\|_W^2.$$

Démonstration du théorème 2. 8.

On a

$$b(\varepsilon; t; u_\varepsilon(t), v) + (u'_\varepsilon(t), v) = (h_\varepsilon(t), v) \quad \text{pour tout } v \in V$$

d'où, en dérivant chaque membre, deux fois par rapport à t:

$$b(\varepsilon; t; u''_\varepsilon(t), v) + 2b'(\varepsilon; t; u'_\varepsilon(t), v) + b''(\varepsilon; t; u_\varepsilon(t), v) + (u'''_\varepsilon(t), v) = (h''_\varepsilon(t), v)$$

pour tout $v \in V$, donc pour $v = u''_\varepsilon(t)$, ce qui donne

$$b(\varepsilon; t; u''_\varepsilon(t), u''_\varepsilon(t)) + 2b'(\varepsilon; t; u'_\varepsilon(t); u''_\varepsilon(t)) + b''_\varepsilon(\varepsilon; t; u_\varepsilon(t), u''_\varepsilon(t)) + (u'''_\varepsilon(t), u''_\varepsilon(t)) = (h''_\varepsilon(t), u''_\varepsilon(t))$$

d'où, en prenant les parties réelles et en intégrant de 0 à s, $s \in (0, c)$

$$(2, 67) \quad 2\int_0^s \mathrm{Re}\, b(\varepsilon; t; u''_\varepsilon(t), u''_\varepsilon(t))dt + |u''_\varepsilon(s)|^2 \leqslant |u''_\varepsilon(0)|^2 + 2\left|\int_0^s \mathrm{Re}\{(h''_\varepsilon(t), u''_\varepsilon(t)) - 2b'(\varepsilon; t; u'_\varepsilon(t), u''_\varepsilon(t)) - b''(\varepsilon; t; u_\varepsilon(t), u''_\varepsilon(t))\}dt\right|.$$

On en déduit, comme à la page 65, en tenant compte de (2, 61) et de $u_\varepsilon(0) = 0$; que le second membre est majoré par

$$|u''_\varepsilon(0)|^2 + K\left(\int_0^s |h''_\varepsilon(t)|^2 dt\right)^{1/2}\left(\int_0^s \|u''_\varepsilon(t)\|_W^2 dt\right)^{1/2} + (k_1 s + k_2)\alpha(\varepsilon)\|u'_\varepsilon(0)\|_V^2 + k_3 s\int_0^s \alpha(\varepsilon)\|u''_\varepsilon(t)\|_V^2 dt + (l_1 s + l_2)\|u'_\varepsilon(0)\|_W^2 + l_3 s\int_0^s \|u''_\varepsilon\|_W^2 dt$$

où les constantes k_1, k_2, k_3, l_1, l_2 l_3, et K sont indépendantes de ε et ne dépendent que de c.

Mais, d'après (2, 54), $u'_\varepsilon(0) = h_\varepsilon(0)$ est borné dans V, et $u''_\varepsilon(0) = h'_\varepsilon(0) - B_\varepsilon(0)h_\varepsilon(0)$ est borné dans H, et d'après (2, 55) $\int_0^s |h''_\varepsilon(t)|^2 dt$ est également borné. On en déduit donc, en utilisant (2, 59′) pour minorer le premier membre de (2, 67)

$$2\int_0^s \{\alpha(\varepsilon)\|u''_\varepsilon(t)\|_V^2 + \|u''_\varepsilon(t)\|_W^2\}dt \leqslant K_1 + K_2\left(\int_0^s \|u''_\varepsilon(t)\|_W^2 dt\right)^{1/2} + K_3\, s\int_0^s \alpha(\varepsilon)\|u''_\varepsilon(t)\|_V^2 dt + K_4 s\int_0^s \|u''_\varepsilon(t)\|_W^2 dt$$

où les constantes K_1, K_2, K_3, K_4, ne dépendent que de c, et sont indépendantes de ε.

Il est donc possible de trouver s_0, *dépendant uniquement de* c, indépendant de ε, tel que

$$(2,\ 68)\qquad \int_0^{s_0} (\alpha(\varepsilon)\, \|u_\varepsilon''(t)\|_V^2 + \|u_\varepsilon''(t)\|_W^2)\, dt \leqslant C(s_0)$$

$C(s_0)$ étant indépendante de ε.

On en déduit, en utilisant $u_\varepsilon(0) = 0$

$$(2,\ 69)\qquad \int_0^{s_0} (\|u_\varepsilon'(t)\|_W^2 + \|u_\varepsilon(t)\|_W^2)\, dt \leqslant C_1(s_0)$$

où $C_1(s_0)$ ne dépend pas de ε.

Remarque. — Pour établir (2, 68) et (2, 69), nous n'avons pas utilisé les hypothèses (2, 63) et (2, 64), ni d'ailleurs, (2, 60) et (2, 62).

D'après (2, 68) et (2, 69), de toute suite u_{ε_i} on peut extraire une sous-suite $u_{\varepsilon j}$, telle que $u_{\varepsilon j}$, $u'_{\varepsilon j}$, $u''_{\varepsilon j}$, convergent dans $L^2((0, s_0);\ W)$ faible vers w, w' w''. Alors w est une fois continûment différentiable de $(0, s_0)$ dans W, et pour tout $t \in (0, s_0)$, $u_{\varepsilon_j}(t) \to w(t)$ dans W faible, et $u'_{\varepsilon_j}(t)$ converge vers $w'(t)$ dans W faible.

Mais on a

$b(\varepsilon_j;\ t;\ u_{\varepsilon_j}(t),\ v) + (u'_{\varepsilon j}(t),\ v) = (h_{\varepsilon_j}(t),\ v)$ pour tout $v \in V$.

Donc, par passage à la limite, en tenant compte de (2, 63), pour le premier membre [58] et de (2, 57) pour le second :

$$b(t;\ w(t),\ v) + (w'(t),\ v) = (h(t),\ v)$$

pour tout $v \in V$ donc pour tout $v \in \overline{V}_{(W)}$.

Par suite $w(t) = u(t)$.

Nous avons donc montré, sans utiliser l'hypothèse (2, 64) que u_ε, u'_ε et u''_ε convergent, dans $L^2((0, s_0);\ W)$ faible, respectivement vers u, u' et u''. Montrons maintenant que $u_\varepsilon \to u$ dans $L^2((0, s_0);\ W)$. D'après les hypothèses (2, 64) et (2, 60), il nous suffit pour cela, de montrer que

$$\int_0^{s_0} \mathrm{Re}\big(b(\varepsilon;\ t,\ u_\varepsilon(t),\ u_\varepsilon(t)) - b(t;\ u_\varepsilon(t),\ u_\varepsilon(t)) \\ + b(t;\ u_\varepsilon(t) - u(t),\ u_\varepsilon(t) - u(t)\big)\, dt$$

converge vers 0, avec ε.

[58] Il est facile de voir que pour chaque t, $|b(\varepsilon;\ t;\ u_\varepsilon(t),\ u_\varepsilon(t))|$ est borné.

Or,

$$\int_0^{s_0} \mathrm{Re}\big(b(\varepsilon;\ t,\ u_\varepsilon(t),\ u_\varepsilon(t)\big) - b(t;\ u_\varepsilon(t),\ u_\varepsilon(t))$$
$$+ b(t; u_\varepsilon(t) - u(t), u_\varepsilon(t) - u(t))\,dt = \int_0^{s_0} \mathrm{Re}\{h_\varepsilon(t) - h(t), u_\varepsilon(t))$$
$$+ b(t;\ u(t) - u_\varepsilon(t),\ u(t)) + (u'(t) - u'_\varepsilon(t),\ u_\varepsilon(t))\}\ dt$$
$$\leqslant \int_0^{s_0} \mathrm{Re}\{(h_\varepsilon(t) - h(t),\ u_\varepsilon(t)) + b(t;\ u(t) - u_\varepsilon(t),\ u(t))$$
$$+ (u'(t) - u'_\varepsilon(t),\ u(t))\}\ dt$$
$$\left(\text{car} \int_0^{s_0} \mathrm{Re}(u'(t) - u'_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - u(t))\,dt = -\frac{1}{2}|u_\varepsilon(s_0) - u(s_0)|^2 \leqslant 0\right)$$

et le second membre tend vers 0, quand $\varepsilon \to 0$, d'après (2, 55) et les convergences faibles dans $L^2((0,\ s_0);\ W)$ de u_ε, u'_ε vers u et u'.

Le théorème est donc démontré pour $t \in (0,\ s_0)$.

Désignons par $u_1^\varepsilon(t)$ (resp. $u_1(t)$) la solution une fois continûment différentiable de $(0,\ s_0)$ dans V (resp. $\overline{V}_{(W)}$) de (2, 65) (resp. (2, 66)) pour $t \in (0,\ s_0)$. Reprenons la fonction $p(t)$ de la p. 66, et soit $u_2^\varepsilon(t)$ la solution une fois continûment différentiable de $t \geqslant s_0/2$, dans V, de

$$\text{(2, 70)}\qquad \begin{aligned} &B_\varepsilon(t)u_2^\varepsilon(t) + Du_2^\varepsilon(t) = h_2^\varepsilon(t);\\ &u_2^\varepsilon(t) \in N_\varepsilon(t) \qquad \text{pour} \qquad t > s_0/2\\ u_2^\varepsilon(s_0/2) = 0 \qquad &\text{avec} \qquad h_2^\varepsilon(t) = h_\varepsilon(t)\,(1 - p(t)) - p'(t)u_1^\varepsilon(t). \end{aligned}$$

et $u_2(t)$ la solution une fois continûment différentiable de $t \geqslant s_0/2$ dans $\overline{V}_{(W)}$ de

$$\text{(2, 71)}\qquad \begin{aligned} &B(t)u_2(t) + Du_2(t) = h_2(t);\\ &u_2(t) \in N_B(t) \qquad \text{pour} \qquad t > s_0/2\\ u_2(s_0/2) = 0 \qquad &\text{avec} \qquad h_2(t) = h(t)\,(1 - p(t)) - p'(t)u_1(t). \end{aligned}$$

Or, $h_2(t) \in \mathcal{C}_2(s_0/2)$ avec $h_2(s_0/2) \in N_B(s_0/2)$ et il est très facile de vérifier que $h_2^\varepsilon(t)$ vérifie $\mathcal{C}_2(s_0/2,\ h_2)$. Par suite u_2^ε (resp. $u_2^{\varepsilon\prime}$ et $u_2^{\varepsilon\prime\prime}$) convergent dans $L^2((s_0/2,\ 3s_0/2);\ W)$ fort (resp. faible) vers u_2 (resp. u'_2 et u''_2). En recommençant le processus, si $3s_0/2 < c$, on montre finalement le théorème dans $(0,\ c)$ C.Q.F.D.

De toute évidence, le théorème 2. 8 correspond au théorème 2. 5. Étudions maintenant le théorème correspondant au théorème 2. 6.

Posons :

$$b(\varepsilon;\ t;\ u,\ v) = b_0(\varepsilon;\ t;\ u,\ v) + b_1(\varepsilon;\ t;\ u,\ v)$$

avec $b_0(\varepsilon;\ t;\ u,\ v) = \overline{b_0(\varepsilon;\ t;\ v,\ u)}$ pour tout $u, v \in V$

et

$$b(t; u, v) = b_0(t; u, v) + b_1(t; u, v) \quad \text{avec} \quad b_0(t; u, v) = \overline{b_0(t; v, u)}$$

pour tout $u, v \in W$.

Nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME 2. 9. — *Soit* $h(t) \in \mathcal{C}_1$ *avec* $h(0) \in V$, *et une famille* $h(t) \in \mathcal{C}_1$, *vérifiant* $\mathcal{C}_1(0; h)$. *Sous les hypothèses* (2, 51), (2, 59) et (2, 60), (2, 61) *et* (2, 62), *et*

(2, 72) *pour tout* $c > 0$, *il existe des constantes* $\tau_1(c) = \tau_1$, $\tau_2(c) = \tau_2$ *telles que pour* $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $t \in (0, c)$, *et* u, $v \in V$ *on ait :*

$$|\mathrm{Re}\, b_1(\varepsilon; t; u, v)| \leqslant \tau_1 \alpha(\varepsilon) \,||u||_V\, |v| + \tau_2 ||u||_W\, |v|$$

et

(2, 73) *pour tout* $c > 0$, *il existe une constante* $\tau(c) = \tau$ *telle que pour tout* $t \in (0, c)$, *et tout* u, $v \in W$, *on ait*

$$|\mathrm{Re}\, b_1(t; u, v)| \leqslant \tau ||u||_W\, |v|$$

ainsi que (2, 63) *et* (2, 64), *soit* $u_\varepsilon(t)$ (*resp.* $u(t)$) *la solution continue de* $t \geqslant 0$ *dans* V (*resp.* $\overline{V}_{(W)}$), *une fois continûment différentiable de* $t \geqslant 0$ *dans* H, *de* (2, 65) (*resp.* (2, 66)). *Alors, quand* $\varepsilon \to 0$, *pour tout* $s > 0$, $u_\varepsilon \to u$ *dans* $L^2((0, s); W)$ $u'_\varepsilon \to u'$ *dans* $L^2((0, s); W)$ *faible, et* $u''_\varepsilon \to u''$ *dans* $L^2((0, s); H)$ *faible. Il en résulte que pour chaque* $t \geqslant 0$, $u_\varepsilon(t) \to u(t)$ *dans* W, *et* $u'_\varepsilon(t) \to u'(t)$ *dans* H *faible.*

Il est inutile de refaire toute la démonstration. On opère comme dans la démonstration du théorème 2. 8, en utilisant cette fois, les inégalités à priori (2, 47) et (2, 49).

Opérateurs du deuxième ordre en: $B_\varepsilon(t) + D^2$.

Reprenons l'hypothèse (2, 51) et les notations du début du nº 3. Posons-la

Définition 2. 3. — Soit $h \in \mathcal{C}_2(t_0)$. Nous dirons qu'une famille $h_\varepsilon \in \mathcal{C}_2(t_0)$ vérifie la propriété $\mathcal{C}'_2(t_0; h)$, si lorsque $\varepsilon \to 0$, nous avons (2, 55) et

(2, 54′) $h_\varepsilon(t_0)$ (resp. $h'_\varepsilon(t_0)$) est borné dans V(resp. H).

Nous avons essentiellement deux théorèmes :

Théorème 2. 10. — *(Théorème de convergence faible) : Sous l'hypothèse* (2, 51), *soit* $h \in \mathcal{C}_2$ *avec* $h(0) \in V$, *et une famille* $h_\varepsilon(t) \in \mathcal{C}_2$ *vérifiant la propriété* $\mathcal{C}_2'(0; h)$. *Sous les hypothèses* (2, 59) *et* (2, 60), (2, 72) *et* (2, 73) *et*

(2, 74) *pour* $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $u, v \in V$, $t \to b(\varepsilon; t; u, v)$ *est trois fois continûment différentiable avec* (2, 61) *et pour tout* $c > 0$, *il existe des constantes* $\omega_1(c) = \omega_1$ *et* $\omega_2(c) = \omega_2$ *telles que, pour tout* $t \in (0, c)$, *tout* $u, v \in V$ *et* $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, *on ait :*

$$|b'''(\varepsilon; t; u, v)| \leqslant \omega_1 \alpha(\varepsilon) \, ||u||_V \, ||v||_V + \omega_2 \, ||u||_W \, ||v||_W$$

et

(2, 75) *pour* $u, v \in W$, $t \to b(t; u, v)$ *est trois fois continûment différentiable*

ainsi que (2, 63), *soit* $u_\varepsilon(t)$ *(resp.* $u(t)$*) la* ([59]) *solution une fois continûment différentiable de* $t \geqslant 0$ *dans* V *(resp.* $\overline{V}_{(W)}$*) deux fois continûment différentiable de* $t \geqslant 0$ *dans* H, *de*

(2, 76) $$B_\varepsilon(t) u_\varepsilon(t) + D^2 u_\varepsilon(t) = h_\varepsilon(t); \quad u_\varepsilon(t) \in N_\varepsilon(t) \quad \textit{pour} \quad t > 0$$
$$u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon'(0) = 0.$$

(resp.

(2, 77) $$B(t) u(t) + D^2 u(t) = h(t); \quad u(t) \in N_B(t) \quad \textit{pour} \quad t > 0$$
$$u(0) = u'(0) = 0).$$

Alors quand $\varepsilon \to 0$, *pour tout* $s > 0$, u_ε, u_ε', u_ε'' *convergent dans* $L^2((0, s); W)$ *faible respectivement vers* u, u', *et* u'', *et* u_ε''' *converge vers* u''' *dans* $L^2((0, s); H)$ *faible. Il en résulte que pour tout* $t \geqslant 0$, $u_\varepsilon(t)$, $u_\varepsilon'(t)$ *convergent dans* W *faible, respectivement vers* $u(t)$, $u'(t)$ *et* $u_\varepsilon''(t)$ *converge vers* $u''(t)$ *dans* H *faible.*

Théorème 2. 11. — *(Théorème de convergence forte) Sous les hypothèses du théorème* 2. 10, *avec, en outre*

(2, 72') *Pour tout* $c > 0$, *il existe une constante* $\tau(c) = \tau$ *telle que, pour tout* $t \in (0, c)$, *tout* $u, v \in V$, *et tout* $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, *on ait :*

$$|\mathrm{Re}\{b_1(\varepsilon; t; u, v) - b_1(t; u, v)\}| \leqslant \tau \alpha(\varepsilon) ||u||_V \, |v|$$

([59]) Pour l'existence et l'unicité voir Lions [6] p. 7 et aussi Trèves [1].

et

(2, 61′) *Pour tout* $c > 0$, *il existe une constante* $\lambda(c) = \lambda$, *telle que pour tout* $t \in (0, c)$, *tout* $u, v \in V$ *et tout* $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, *on ait :*

$$|b_0'(\varepsilon; t; u, v) - b_0'(t; u, v)| \leqslant \lambda\alpha(\varepsilon) ||u||_V ||v||_V$$

et

(2, 64′) *Pour tout* $c > 0$, *il existe des constantes* $\delta_1(\varepsilon, c) = \delta_1(\varepsilon)$ *et* $\delta_2(c) = \delta_2$ $\delta_1(\varepsilon) \to 0$ *avec* ε, $\delta_2 > 0$ *telles que*

$$b_0(\varepsilon; t; u, u) - b_0(t; u, u) + \delta_1(\varepsilon) b_0(t; u, u) \geqslant \delta_2 \alpha(\varepsilon) ||u||_V^2$$

pour tout $u \in V$, *tout* $t \in (0, c)$ *et* $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

Alors $u_\varepsilon \to u$ *dans* $L^2((0, s); W)$ *et* $u_\varepsilon' \to u'$ *dans* $L^2((0, s); H)$, *pour tout* $s > 0$. *Il en résulte que, pour tout* $t \geqslant 0$, $u_\varepsilon(t) \to u(t)$ *dans* W *et* $u_\varepsilon'(t) \to u'(t)$ *dans* H. *De plus* $(\alpha(\varepsilon)^{1/2} u_\varepsilon)$ $\big($*resp.* $(\alpha(\varepsilon))^{1/2} u_\varepsilon'\big)$ *et* $(\alpha(\varepsilon)^{1/2} u_\varepsilon'')$ *converge fortement (resp. faiblement) vers* 0, *dans* $L^2((0, s); V)$ *pour tout* $s > 0$.

Démonstration du théorème 2. 10. — Nous ne donnons pas la démonstration complète. La méthode est toujours la même. (Cf. Théorème 2. 8). Il nous suffit de montrer le théorème dans $(0, c)$, c fixé à l'avance. Il nous suffit même de montrer qu'il existe alors s_0, ne dépendant que de c, tel que le théorème soit vrai dans $(0, s_0)$. Or, il est facile de montrer, en utilisant les inégalités à priori établies dans Lions [6], p. 10 à 20, et en particulier (5, 14) et (5, 15), p. 14, qu'il existe s_0, ne dépendant que de c, tel que l'on ait :

$$(2, 78) \quad \int_0^{s_0} \{ |u_\varepsilon'''(t)|^2 + \alpha(\varepsilon) ||u_\varepsilon''(t)||_V^2 + ||u''(t)||_W^2 \} \, dt \leqslant C_1$$

et

$$(2, 79) \quad \int_0^{s_0} \{ \alpha(\varepsilon)(||u_\varepsilon'(t)||_V^2 + ||u_\varepsilon(t)||_V^2) + ||u_\varepsilon'(t)||_W^2 + ||u_\varepsilon(t)||_W^2 \} \, dt \leqslant C_2$$

C_1 et C_2 étant indépendante de.

On en déduit alors facilement, en utilisant (2, 63), que u_ε, u_ε' et u_ε'' convergent dans $L^2((0, s_0); W)$ faible vers u, u', u'' et que u_ε''' converge dans $L^2((0, s_0); H)$ faible vers u'''.

Démonstration du théorème 2. 11. — Soit $c > 0$ fixé. On va montrer qu'il existe s_0 ne dépendant que de c, tel que le théorème soit vrai dans $(0, s_0)$.

D'après (2, 60), (2, 64') et les convergences faibles établies au théorème (2, 10) on a pour $s \in (0, c)$

(2, 80)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^s \{ \delta_2 \alpha(\varepsilon) \|u_\varepsilon(t)\|_V^2 + \gamma \|u_\varepsilon(t) - u(t)\|_W^2 + |u'_\varepsilon(t) - u'(t)| \} \, dt$$

$$\leqslant \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{s_0} \{ b_0(\varepsilon; t; u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)) - b_0(t; u(t), u(t)) + |u'_\varepsilon(t)|^2 - |u'(t)|^2 \} \, dt$$

Or, on a

$$b(\varepsilon; t; u_\varepsilon(t), u'_\varepsilon(t)) + (u''_\varepsilon(t), u'_\varepsilon(t)) = (h_\varepsilon(t), u'_\varepsilon(t))$$

et

$$b(t; u(t), u'(t)) + (u''(t), u'(t)) = (h(t), u'(t))$$

d'où, en soustrayant membre à membre, en prenant les parties réelles, en multipliant par $(s - t)$, en intégrant de 0 à s, (en tenant compte de $u_\varepsilon(0) = u'_\varepsilon(0) = u(0) = u'(0) = 0$)

(2, 81)

$$\int_0^s \{ b_0(\varepsilon; t; u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)) - b_0(t; u(t), u(t)) + |u'_\varepsilon(t)|^2 - |u'(t)|^2 \} \, dt$$

$$= \int_0^s (s-t) \{ 2 \operatorname{Re} [(h_\varepsilon(t), u'_\varepsilon(t)) - (h(t), u'(t)) - b_1(\varepsilon; t; u_\varepsilon(t), u'_\varepsilon(t))$$
$$+ b_1(t; u(t), u'(t))] + b'_0(\varepsilon; t; u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)) - b'_0(t; u(t), u(t)) \} \, dt$$

Mais, d'après (2, 55) et les convergences faibles établies au théorème 2. 10,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^s (s - t) \operatorname{Re} \{ (h_\varepsilon(t), u'_\varepsilon(t)) - (h(t), u'(t)) \} \, dt = 0.$$

De plus

$$\int_0^s (s-t) 2 \operatorname{Re} [b_1(\varepsilon; t; u_\varepsilon(t), u'_\varepsilon(t)) - b_1(t; u(t), u'(t)) \, dt$$

$$= \int_0^s (s-t) 2 \operatorname{Re} [b_1(\varepsilon; t; u_\varepsilon(t), u'_\varepsilon(t)) - b_1(t; u_\varepsilon(t), u'_\varepsilon(t)) + b_1(t; u_\varepsilon(t), u'_\varepsilon(t)) - b_1(t; u(t), u'(t))] \, dt.$$

Mais d'après l'hypothèse (2, 72')

$$|\operatorname{Re} \{ b_1(\varepsilon; t; u_\varepsilon(t), u'_\varepsilon(t)) - b_1(t; u_\varepsilon(t), u'_\varepsilon(t)) \}| \leqslant \tau_1 \alpha(\varepsilon) \|u_\varepsilon(t)\|_V |u'_\varepsilon(t)|.$$

Comme u'_ε (resp. $\sqrt{\alpha(\varepsilon)}u_\varepsilon$) est borné dans $L^2((0, s); H)$ (resp. $(L^2((0, s); V))$

$$2\int_0^s (s-t)\,\mathrm{Re}[b_1(\varepsilon;\ t;\ u_\varepsilon(t),\ u'_\varepsilon(t)) - b_1(t;\ u_\varepsilon(t),\ u'_\varepsilon(t))]\,dt \to 0.$$

De plus d'après les convergences faibles établies au théorème 2. 10 :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^s (s-t)2\,\mathrm{Re}\{b_1(t;\ u_\varepsilon(t),\ u'_\varepsilon(t)) - b_1(t;\ u(t),\ u'(t))\}\,dt$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^s (s-t)2\,\mathrm{Re}\{b_1(t;\ u_\varepsilon(t)-u(t),\ u'_\varepsilon(t)-u'(t))\}\,dt$$
$$\leqslant Ks\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^s \|u_\varepsilon(t)-u(t)\|_W^2 + |u'_\varepsilon(t)-u'(t)|^2\,dt$$

où K ne dépend que de c.

De la même façon, d'après (2, 61′) et les convergences faibles :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^s (s-t)\{b'_0(\varepsilon;\ t;\ u_\varepsilon(t),\ u_\varepsilon(t)) - b'_0(t;\ u(t),\ u(t))\}\,dt$$
$$\leqslant K_1 s\int_0^s \{\alpha(\varepsilon)\|u_\varepsilon(t)\|_V^2 + \|u_\varepsilon(t) - u(t)\|_W^2\}\,dt$$

où K_1 ne dépend que de c.

Portant tous ces résultats dans (2, 80) on voit qu'il existe s_0 ne dépendant que de c, tel que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{s_0} \{\alpha(\varepsilon)\|u_\varepsilon(t)\|_V^2 + \|u_\varepsilon(t) - u(t)\|_W^2 + |u'_\varepsilon(t) - u'(t)|^2\}\,dt = 0.$$

ce qui démontre le théorème.

Cas particulier où $b(\varepsilon;\ u,\ v)$ est linéaire en ε.

Les notations sont celles du début du n° 3. Reprenons l'hypothèse (2, 51), puis, sur V (resp. W) une famille de formes sesqui-linéaires continues $a(t;\ u,\ v)$ (resp. $b(t;\ u,\ v)$), $t \geqslant 0$. Posons

(2, 82) $\quad b(\varepsilon;\ t;\ u,\ v) = \varepsilon a(t;\ u,\ v) + b(t;\ u,\ v).$

Supposons

(2, 60) $\quad b(t;\ u,\ v)$ vérifie (2, 31) sur W.

(2, 83) $\varepsilon a(t;\ u,\ v) + b(t;\ u,\ v)$ vérifie (2, 31) sur V pour ε assez petit.

Lemme 2. 5. — *Si* $a(t; u, v)$ *et* $b(t; u, v)$ *vérifient* (2, 60) *et* (2, 83), *alors* $b(\varepsilon; t; u, v)$, *donné par* (2, 82) *vérifie les hypothèses* (2, 59), (2, 63) *et* (2, 64′), *avec* $\alpha(\varepsilon) = k\varepsilon$.

Nous ne donnons pas la démonstration, qui est implicitement contenue dans les formules des pages 20 et 21.

Supposons maintenant qu'on ait (2, 62) (resp. (2, 75)) et

(2, 84) (resp. (2, 85)) pour $u, v \in V$, $t \to a(t; u, v)$ est deux (resp. trois) fois continûment différentiable.

On a alors le résultat évident suivant :

Lemme 2. 6. — *Sous les hypothèses* (2, 62) *et* (2, 84) (*resp.* (2, 75) *et* (2, 85)) $b(\varepsilon; t; u, v)$ *donné par* (2, 82) *vérifie les hypothèses* (2, 61) *et* (2, 61′) (*resp.* (2,74) *et* (2, 61′)), *avec* $\alpha(\varepsilon) = k\varepsilon$.

Enfin supposons que l'on ait (2, 73) et

(2,86) pour tout $c > 0$, il existe une constante λ telle que pour tout $u, v \in V$ et tout $t \in (0, c)$ on ait

$$|Re\, a_1(t; u, v)| \geqslant \lambda \|u\|_V |v|.$$

On a alors le

Lemme 2. 7. — *Sous les hypothèses* (2, 73) *et* (2, 86), $b(\varepsilon; t; u, v)$ *donné par* (2, 82) *vérifie* (2, 72) *et* (2, 72′), *avec* $\alpha(\varepsilon) = k\varepsilon$.

Ces lemmes permettent de simplifier beaucoup, dans ce cas, les énoncés des théorèmes 2, 8; 2, 9 et 2, 11. Donnons, par exemple, l'énoncé explicite, corrrespondant au théorème 2, 11.

Théorème 2. 12. — *Sous l'hypothèse* (2, 51), *soit* $h \in \mathcal{C}_2$ *avec* $h(0) \in V$, *et une famille* $h_\varepsilon(t) \in \mathcal{C}_2$, *vérifiant la propriété* $\mathcal{C}_2'(0; h)$. *Sous les hypothèses* (2, 60), (2, 83) (2, 75) *et* (2, 85), (2, 73) *et* (2, 86), *et si* $b(\varepsilon; t; u, v)$ *est donné par* (2, 82) *la solution* u_ε *de* (2, 76) *converge dans* $L^2((0, s); W)$ *vers la solution* u *de* (2, 77), *pour tout* $s > 0$. *De plus, pour tout* $s > 0$, $u_\varepsilon' \to u'$ *dans* $L^2((0, s); H)$ *fort, et dans* $L^2((0, s); W)$ *faible,* $u_\varepsilon'' \to u''$ *dans* $L^2((0, s); W)$ *faible et* $u_\varepsilon''' \to u'''$ *dans* $L^2((0, s); H)$ *faible. De plus* $\varepsilon^{1/2}u_\varepsilon$ (*resp.* $\varepsilon^{1/2}u_\varepsilon'$ *et* $\varepsilon^{1/2}u_\varepsilon''$) *converge fortement* (*resp. faiblement*) *dans* $L^2((0, s); V)$ *vers* 0 [60].

[60] En faisant des hypothèses de différentiabilité en t de plus en plus fortes sur $a(t; u, v)$ et $b(t; u, v)$, $h_\varepsilon(t)$ et $h(t)$, on obtiendrait une convergence de plus en plus fine en t, de $u_\varepsilon(t)$. Il n'en est pas de même pour la variable d'espace comme le montrent les contre-exemples du chapitre I, n°5.

4. — Applications et exemples.

Problèmes mixtes dans les équations aux dérivées partielles. Nous faisons l'hypothèse (1, 33).

A chacun des théorèmes 2. 8, 2. 9, 2. 10 et 2. 11 correspondra un théorème pour les problèmes non homogènes. Nous nous bornerons, par souci de simplification à considérer le cas où l'on a (2, 82), *i.e.* $b(\varepsilon; t; u, v) = \varepsilon a(t; u, v) + b(t; u, v)$. Nous désignons par $A(t)$ l'opérateur défini par $a(t; u, v)$. Alors $B_\varepsilon(t) = \varepsilon A(t) + B(t)$.

1° Soit $k(t) \in \mathcal{C}_2$, avec $k(0) \in \left\{\bigcap_\varepsilon N_\varepsilon(0) \cap N_B(0)\right\}$. Soit $F(t)$ une fonction deux fois (resp. trois fois) continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans V (resp. H) telle que pour tout $t \geqslant 0$, $A(t)F(t) \in H$ et $B(t)F(t) \in H$, et telle que les applications $t \to A(t)F(t)$ et $t \to B(t)F(t)$ soient deux fois continûment différentiables de $t \geqslant 0$ dans H. Nous supposons, en outre que $B(0)F(0) + F'(0)$ et $A(0)F(0)$ sont dans $\left\{\bigcap_\varepsilon N_\varepsilon(0) \cap N_B(0)\right\}$. Dans ces conditions, du théorème 2. 8 se déduit le :

THÉORÈME 2. 13. — *Sous les hypothèses* (1, 33), (2, 51), (2, 60) *et* (2, 83), (2, 62) *et* (2, 84), *soit* $U_\varepsilon(t)$ (*resp.* $U(t)$) *la solution une fois continûment différentiable de* $t \geqslant 0$ *dans* V (*resp.* $\overline{V}_{(W)}$) *de*

$$\text{(2, 87)} \qquad \begin{aligned} &(\varepsilon A(t) + B(t))U_\varepsilon(t) + DU_\varepsilon(t) = k(t);\\ &U_\varepsilon(t) - F(t) \in N_\varepsilon(t) \quad \textit{pour} \quad t > 0;\ U_\varepsilon(0) = F(0) \end{aligned}$$

(*resp.*

$$\text{(2, 88)} \qquad \begin{aligned} &B(t)U(t) + DU(t) = k(t);\\ &U(t) - F(t) \in N_B(t) \quad \text{pour} \quad t > 0;\ U(0) = F(0)). \end{aligned}$$

Alors pour tout $s > 0$, $U_\varepsilon \to U$ *dans* $L^2((0, s); W)$ *et* U'_ε, U''_ε *convergent faiblement dans* $L^2((0, s); W)$ *vers* U' *et* U''. *De plus* $\varepsilon^{1/2}U_\varepsilon$ (*resp.* $\varepsilon^{1/2}U'_\varepsilon$) *converge dans* $L^2((0, s); V)$ *fort,* (*resp. faible*) *vers* 0.

2° Supposons maintenant $k(t) \in \mathcal{C}_1$ avec $k(0) \in V$. Soit $F(t)$ une fonction une fois (resp. deux fois) continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans V (resp. H) telle que pour tout $t \geqslant 0$,

$A(t)\,F(t)$ et $B(t)\,F(t)$ soient dans H, et telle que les applications $t \to A(t)\,F(t)$ et $t \to B(t)\,F(t)$ soient une fois continûment différentiables de $t \geqslant 0$ dans H. Supposons, en outre $A(0)\,F(0) \in V$ et $B(0)\,F(0) + F'(0) \in V$.

Dans ces conditions, on déduit du théorème 2. 9 le

THÉORÈME 2. 14. — *Sous les hypothèses* (1, 33), (2, 51), (2, 60) *et* (2, 83), (2, 62) *et* (2, 84), (2, 73) *et* (2, 86), *la solution* U_ε *de* (2, 87) *converge*, dans $L^2((0, s); W)$, *pour tout* $s > 0$, *vers la solution* U *de* (2, 88). *De plus* U'_ε (*resp.* U''_ε) *converge faiblement dans* $L^2((0, s); W)$ (*resp.* $L^2((0, s); H)$) *vers* U' (*resp.* U''). *En outre* $\varepsilon^{1/2}U_\varepsilon$ (*resp.* $\varepsilon^{1/2}\,U'_\varepsilon$) *converge dans* $L^2\,((0, s);\ V)$ *fort* (*resp. faible*) *vers* 0.

Démonstration des théorèmes 2. 13 *et* 2. 14. — Posons

$$u_\varepsilon(t) = U_\varepsilon(t) - F(t), \quad \text{et} \quad u(t) = U(t) - F(t).$$

Alors (2, 87) (resp. (2, 88)) se ramène à (2, 65) (resp. (2, 66)) où

$$h(t) = k(t) - (B(t)F(t) + F'(t))$$
$$h_\varepsilon(t) = k(t) - \big((\varepsilon A(t) + B(t))F(t) + F'(t)\big).$$

Moyennant les conditions sur $F(t)$ et $k(t)$, on vérifie facilement que $h(t)$ et $h_\varepsilon(t)$ vérifient les hypothèses du théorème 2. 8 dans le premier cas et celles du théorème 2. 9 dans le second.

3° Soit $k(t) \in \mathcal{C}_2$, avec $k(0) \in V$. Soit $F(t)$ une fonction quatre fois continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans V, $A(t)F(t)$ et $B(t)\,F(t)$ étant dans H pour tout $t \geqslant 0$, et les applications $t \to A(t)F(t)$ et $B(t)F(t)$ étant deux fois continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans H, et $B(0)F(0) + F''(0) \in V$ et $A(0)F(0) \in V$. Dans ces conditions, on déduit du théorème 2, 12 le

THÉORÈME 2. 15. — *Sous les hypothèses* (1, 33), (2, 51), (2, 60) *et* (2, 83), (2, 75) *et* (2, 85), (2, 73) *et* (2, 86), *soit* $U_\varepsilon(t)$ (*resp.* $U(t)$) *la solution une fois continûment différentiable de* $t \geqslant 0$ *dans* V (*resp.* $\overline{V}_{(W)}$), *deux fois continûment différentiable de* $t \geqslant 0$ *dans* H *de*

$$(2,\ 89)\quad (\varepsilon A(t) + B(t))U_\varepsilon(t) + D^2U_\varepsilon(t) = k(t);\ U_\varepsilon(t) - F(t) \in N_\varepsilon(t) \quad \textit{pour tout } t \geqslant 0;\ U_\varepsilon(0) = F(0);\ U'_\varepsilon(0) = F'(0)$$

(*resp.* $B(t)U(t) + D^2U(t) = k(t);\ U(t) - F(t) \in N_B(t)$ *pour* $t > 0$;

$$(2,\ 90)\qquad U(0) = F(0);\ U'(0) = F'(0)).$$

Alors, pour tout $s > 0$, $U_\varepsilon \to U$ *dans* $L^2((0, s); W)$ *et* $U'_\varepsilon \to U'$ *dans* $L^2((0, s); H)$. *On a de plus les convergences faibles*, $U'_\varepsilon \to U'$, $U''_\varepsilon \to U''$ *dans* $L^2((0, s); W)$ *et* $U'''_\varepsilon \to U'''$ *dans* $L^2((0, s); H)$. *En outre* $\varepsilon^{1/2}U_\varepsilon$ (*resp.* $\varepsilon^{1/2}U'_\varepsilon$ *et* $\varepsilon^{1/2}U''_\varepsilon$) *convergent fortement* (*resp. faiblement*) *dans* $L^2((0, s); V)$, *vers* 0.

Démonstration. — En posant

$$u_\varepsilon(t) = U_\varepsilon(t) - F(t) \qquad \text{et} \qquad u(t) = U(t) - F(t),$$

(2,89) et (2, 90) se ramènent à (2, 76) et (2, 77) avec

$$\begin{aligned} h_\varepsilon(t) &= k(t) - \big((\varepsilon A(t) + B(t))F(t) + F''(t)\big) \\ h(t) &= k(t) - B(t)F(t) - F''(t) \end{aligned}$$

et il suffit de vérifier que $h(t)$ et $h_\varepsilon(t)$ vérifient les propriétés du théorème 2. 12.

Perturbation singulière de semi-groupes.

Nous reprenons, V, W et H avec (2, 51). Puis nous prenons sur V (resp. W) une forme sesqui-linéaire continue $a(u, v)$ (resp. $b(u, v)$) qui définit l'opérateur A (resp. B). Nous prenons $b(\varepsilon; u, v) = \varepsilon a(u, v) + b(u, v)$.

Nous supposons :

(2, 91) il existe des constantes $\lambda > 0$ et $\gamma > 0$ telles que pour tout $u \in W$, on ait :

$$b_0(u, u) + \lambda|u|^2 \geqslant \gamma\|u\|^2_W.$$

(2, 92) Il existe des constantes $\mu > 0$ et $\alpha > 0$ telles que, pour tout $u \in V$ et tout $\varepsilon \leqslant 1$, on ait

$$\varepsilon a_0(u, u) + b_0(u, u) + \mu|u|^2 \geqslant \alpha\varepsilon\|u\|^2_V$$

(2, 93) $\Phi = \left\{\bigcap_\varepsilon N_\varepsilon \cap N_B\right\}$ est dense dans H.

Remarque. — L'hypothèse (2, 93) est en particulier vérifiée, si on prend $\mathcal{D}(\Omega) \subset V \subset W \subset H$, $\mathcal{D}(\Omega)$ dense dans H, ou $(\mathcal{D}(\Omega))^N \subset V \subset W \subset H(\mathcal{D}'(\Omega))^N$ avec $(\mathcal{D}(\Omega))^N$ dense dans H.

Si on considère $(-B)$ (resp. $(-B_\varepsilon)$ $\varepsilon \leqslant 1$) comme opérateur non continu de domaine de définition N_B (resp. N_ε) muni de la topologie induite par H, à valeurs dans H, sous les hypothèses (2, 91) et (2, 93) (resp. (2, 92) et (2, 93)) $(-B)$

(resp. $(-B_\varepsilon)$) est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $t \to X(t)$ (resp. $t \to X_\varepsilon(t)$) représentation continue de $t \geqslant 0$ dans $\mathcal{L}_s(H; H)$ ([61]).

Théorème 2. 16. — *Sous les hypothèses* (2, 91), (2, 92) (2, 93) (*resp.* (2, 91), (2, 92) (2, 93)) *et*

(2, 94) *il existe des constantes* τ *et* ν *telles que*

$$|Re a_1(u, v)| \leqslant \tau \|u\|_V |v| \quad \textit{pour tout} \quad u, v \in V$$
$$(|Re b_1(u, v)| \leqslant \nu \|u\|_W |v| \quad \textit{pour tout} \quad u, v \in W)$$

et si pour $f \in \Phi$, Af ([62]) *et* Bf *sont dans* Φ (*resp.* V), *alors, quand* $\varepsilon \to 0$, *pour tout* $t \geqslant 0$, $X_\varepsilon(t) \to X(t)$ *dans* $\mathcal{L}_s(H, H)$, *et pour* $f \in \Phi$, $X_\varepsilon(t)f \to X(t)f$ *dans* W.

Démonstration. — Montrons tout d'abord que pour $t \geqslant 0$, on a

$$\|X_\varepsilon(t)\|_{\mathcal{L}_b(H;\, H)} \leqslant e^{\xi_0 t} \tag{2, 95}$$

ξ_0 étant positive et indépendante de ε.

Soit $R_\varepsilon(p)$, $p = \xi + i\eta$ le résolvant de $X_\varepsilon(t)$. Soit f donnée dans H. Alors $u_\varepsilon = R_\varepsilon(p)\, f$ est la solution dans N_ε de

$$B_\varepsilon u_\varepsilon + p u_\varepsilon = f$$

d'où l'on tire

$$\varepsilon a_0(u_\varepsilon, u_\varepsilon) + b_0(u_\varepsilon, u_\varepsilon) + \xi |u_\varepsilon|^2 = Re(f, u_\varepsilon).$$

En tenant compte de (2, 92), on en déduit qu'il existe ξ_0, indépendant de ε tel que

$$\frac{|u_\varepsilon|}{|f|} \leqslant \frac{1}{\xi - \xi_0} \qquad \xi > \xi_0$$

d'où (2, 95) par application du théorème de Hille Yosida ([63]).

Il résulte de (2, 95) que, pour t donné, les $X_\varepsilon(t)$ forment un ensemble équicontinu de $\mathcal{L}(H; H)$. Pour démontrer le théorème 2. 16, il nous suffit donc de montrer que pour $f \in \Phi$, $X_\varepsilon(t)\, f \to X(t)\, f$ dans W.

Désormais, t est fixé et f est donnée dans Φ. Posons $u_\varepsilon(t) = X_\varepsilon(t)\, f$ et $u(t) = X(t)\, f$.

([61]) Voir la démonstration dans Lions [1] p. 122.

([62]) Il est facile de voir que $f \in \Phi$ entraîne $f \in N_A$ et $B_\varepsilon f = \varepsilon A f + Bf$, $\varepsilon \leqslant 1$.

([63]) Voir Hille [1], Yosida [1] et Phillips [1].

Alors, sous les hypothèses (2, 91), (2, 92) et (2, 93) et si Af et Bf sont dans Φ (resp. (2, 91), (2, 92), (2, 93) et (2, 94) et si Af et Bf sont dans V) $u_\varepsilon(t)$ est la [64] fonction une fois continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans V (resp. continue de $t \geqslant 0$ dans V, une fois continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans H) solution de

$$(2, 96) \quad B_\varepsilon u_\varepsilon(t) + Du_\varepsilon(t) = 0; \qquad u_\varepsilon(t) \in N_\varepsilon \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0$$
$$u_\varepsilon(0) = f$$

et $u(t)$ est la fonction une fois continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans $\overline{V}_{(W)}$ (resp. continue de $t \geqslant 0$ dans $\overline{V}_{(W)}$, une fois continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans H) solution de

$$(2, 97) \quad Bu(t) + Du(t) = 0; \qquad u(t) \in N_B \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0$$
$$u(0) = f.$$

Posons $U_\varepsilon(t) = u_\varepsilon(t) - f$, et $U(t) = u(t) - f$.

Alors $U_\varepsilon(t)$ (resp. $U(t)$) est solution de

$$(\varepsilon A + B)\, U_\varepsilon(t) + DU_\varepsilon(t) = -(\varepsilon A + B) f = h_\varepsilon; \quad U_\varepsilon(t) \in N_\varepsilon$$

pour $t \geqslant 0$.

$$U_\varepsilon(0) = 0.$$

(resp.

$BU(t) + DU(t) = -Bf = h$; $U(t) \in N_B$ pour $t \geqslant 0$ $U(0)=0$).

Le théorème 2. 16 résulte donc des théorèmes 2. 8 et 2. 9 (les démonstrations de ceux-ci se simplifiant dans ce cas particulier où les formes sont indépendantes du temps, cf. p. 70) et des lemmes 2, 5 et 2, 7.

Exemples. — On prend un ouvert Ω de R^n, de frontière Γ régulière. On désigne par x, la variable dans R^n.

1° On prend $H = L^2(\Omega)$, $W = H^1(\Omega)$ et

$$b(u, v) = ((u, v))_1 + (u, v)_0 \text{ qui définit } -\Delta + 1.$$

On désigne par $\mathcal{V}$, l'espace défini au chapitre I, n° 3, des $u \in L^2(\Omega)$ tels que $\Delta u \in L^2(\Omega)$, muni de la norme $(|u|_0^2 + |\Delta u|_0^2)^{1/2}$. On prend sur $\mathcal{V}$

$$b(\varepsilon; u, v) = \varepsilon(\Delta u, \Delta v)_0 - \varepsilon^2((u, v))_1 + ((u, v))_1 + (u, v)_0$$

qui définit $\varepsilon\Delta^2 + (\varepsilon^2 - 1)\Delta + 1$.

[64] Cf. théorème 2. 7.

Exemple 2. 3. — Prenons $V = H_0^2(\Omega)$. Alors $\overline{V}_{(W)} = H_0^1(\Omega)$. Soit $t \to h(x, t)$ une fonction une fois continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans $L^2(\Omega)$, avec $h(x, 0) \in H_0^2(\Omega)$, (*i.e.* $h(x, 0)|_\Gamma = 0$ et $\left(\frac{\partial}{\partial \nu} h(x, 0)\right)_\Gamma = 0$.

Soit $u_\varepsilon(x, t)$ (resp. $u(x, t)$) la solution de

$$\varepsilon\Delta^2 u_\varepsilon(x, t) + (\varepsilon^2 - 1)\Delta u(x, t) + u_\varepsilon(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon(x, t) = h(x, t)$$

avec les conditions aux limites :

$$u_\varepsilon(x, t)|_\Gamma = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial}{\partial \nu} u_\varepsilon(x, t)\right)_\Gamma = 0 \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0$$

et les conditions initiales :

$$u_\varepsilon(x, 0) = 0$$

(resp. $\qquad - \Delta u(x, t) + u(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = h(x, t)$

avec les conditions aux limites

$$u(x, t)|_\Gamma = 0 \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0$$

et les conditions initiales

$$u(x, 0) = 0).$$

Alors, d'après le théorème 2. 5, $u_\varepsilon(x, t)$ (resp. $u(x, t)$) est une fois continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans $H_0^2(\Omega)$ (resp. $H_0^1(\Omega)$) et, d'après le théorème 2. 8, pour chaque $t \geqslant 0$, $u_\varepsilon(x, t) \to u(x, t)$ dans $H^1(\Omega)$, et $\frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon(x, t) \to \frac{\partial}{\partial t} u(x, t)$ dans L^2 (Ω) faible.

Exemple 2. 4. — On prend $V = \mathfrak{V}$ donc $\overline{V}_{(W)} = H^1(\Omega)$. Soit $t \to h(x, t)$ une fonction deux fois continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans $L^2(\Omega)$ avec, $h(x, 0) \in \mathfrak{V}$.

Soit $u_\varepsilon(x, t)$ la solution de

$$\varepsilon\Delta^2 u(x, t) + (\varepsilon^2 - 1)\Delta u(x, t) + u(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_\varepsilon(x, t) = h(x, t)$$

avec les conditions aux limites pour tout $t \geqslant 0$

$$u_\varepsilon(x, t) \in N_\varepsilon \ \textit{i.e.} \left\{\frac{\partial}{\partial \nu} (\varepsilon\Delta u_\varepsilon(x, t) + (\varepsilon^2 - 1) u_\varepsilon(x, t))\right\}_\Gamma = 0$$

et $$u_\varepsilon(x, t)|_\Gamma = 0$$

et les conditions initiales :

$$u_\varepsilon(x, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon(x, 0) = 0.$$

Soit $u(x, t)$ la solution de

$$-\Delta u(x, t) + u(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = h\,(x, t)$$

avec les conditions aux limites

$$u(x, t) \in N_B \ \text{i.e.} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} u(x, t)\right)_\Gamma = 0 \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0$$

et les conditions initiales

$$u(x, 0) = \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = 0.$$

Alors $u_\varepsilon(x, t)$ (resp. $u(x, t)$) est une fois continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans $\mathcal{V}$ (resp. $H^1(\Omega)$) deux fois continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans $L^2(\Omega)$, et d'après le théorème 2. 11, pour chaque $t \geqslant 0$, $u_\varepsilon(x, t) \to u(x, t)$ dans $H^1(\Omega)$ et

$$\frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon(x, t) \to \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega)$$ [65].

2° Nous supposons toujours la frontière de Γ régulière. Nous prenons $H = L^2(\Omega)$ puis $W = H^{m'}(\Omega)$. Soit, sur $H^{m'}(\Omega)$

$$b(t;\ u, \nu) = \sum_{|p|, |q| \leqslant m'} \int_\Omega b_{pq}(x, t) D_x^q u(x) \overline{D_x^p\ \nu(x)}\, dx$$

où $t \to b_{pq}(x, t)$ est pour $|p|$, $|q| \leqslant m'$, une application de $t \geqslant 0$ dans $L^\infty(\Omega)$, trois fois continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans $L^\infty(\Omega)$ muni de la topologie faible de dual de $L^1(\Omega)$.

Nous supposons

$$b(t;\ u, \nu) = \overline{b(t;\ \nu, u)} \quad \text{pour } u, \nu \in H^{m'}(\Omega)$$

et :

pour tout $c > 0$, il existe des constantes $\lambda(c) = \lambda$ et $\gamma(c) = \gamma > 0$, telles que, pour tout u, $\nu \in H^{m'}$ et tout $t \in (0, c)$ on ait :

$$b(t;\ u, u) + \lambda |u|_0^2 \geqslant \gamma \|u\|_{m'}^2.$$

(65) Cf. exemple 2. 2.

Nous considérons d'autre part, sur $H^m(\Omega)$, $m > m'$,

$$a(t;\ u,\ v) = \sum_{|p|,|q| \leqslant m} \int_\Omega a_{pq}(x,\ t)\ D_x^q u(x) \overline{D^p v(x)}\ dx$$

où $t \to a_{pq}(x,\ t)$ est une application de $t \geqslant 0$ dans $L^\infty(\Omega)$, trois fois continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans $L^\infty(\Omega)$ muni de la topologie faible de dual de $L^1(\Omega)$.

Nous supposons : $a(t; u, v) = \overline{a(t; v, u)}$ pour tout $u, v \in H^m(\Omega)$ et, Pour tout $c > 0$, il existe des constantes $\mu(c) =$ et $\alpha(c) = \alpha > 0$ telles que

$$a(t;\ u,\ u) + b(t;\ u,\ u) + \mu|u|_0^2 \geqslant \alpha||u||_m^2$$

pour tout $u,\ v \in H^m(\Omega)$, et tout $t \in (o,\ c)$.

Il en résulte que $\varepsilon a(t,\ u,\ v) + b(t;\ u,\ v)$ vérifie (2, 28), sur $H^m(\Omega)$, pour $\varepsilon \leqslant 1$.

Soit $t \to h(x,\ t)$ une fonction deux fois continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans $L^2(\Omega)$, avec $h(x,\ 0) \in H^m(\Omega)$.

Nous prenons pour V des sous-espaces V_i de $H^m(\Omega)$. En supposant $h(x,\ 0) \in V_i$, soit $u_\varepsilon^i(x,\ t)$ la solution dans V_i de

$$\varepsilon \sum_{|p||q| \leqslant m} (-1)^{|p|} D_x^p(a_{pq}(x,\ t) D_x^q u_\varepsilon^i(x,\ t))$$
$$+ \sum_{|p||q| \leqslant m'} (-1)^{|p|} D_x^p(b_{pq}(x,\ t)\, D_x^q u_\varepsilon^i(x,\ t)) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_\varepsilon^i(x,\ t) = h(x,\ t).$$

avec les conditions aux limites :

$$u_\varepsilon^i(x,\ t) \in N_\varepsilon^i(t) \quad \text{pour tout } t \geqslant 0$$

et les conditions initiales

$$u_\varepsilon^i(x,\ 0) = \frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon^i(x,\ 0) = 0.$$

et soit $u^i(x,\ t)$ la solution dans $\overline{V}_{i(W)}$ de

$$\sum_{|p|,|q| \leqslant m'} (-1)^{|p|} D_x^p(b_{pq}(x,\ t) D_x^q u^i(x,\ t)) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} u^i(x,\ t) = h(x,\ t)$$

avec les conditions aux limites :

$$u^i(x,\ t) \in N_B^i(t) \text{ pour tout } t \geqslant 0$$

et les conditions initiales

$$u^i(x,\ 0) = \frac{\partial}{\partial t} u(x,\ 0) = 0.$$

Nous sommes dans les conditions d'applications du théorème 2. 12, donc, pour chaque $t \geqslant 0$, $u_\varepsilon^i(x, t) \to u^i(x, t)$ dans $H^{m'}(\Omega)$, et $\frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon^i(x, t) \to \frac{\partial}{\partial t} u^i(x, t)$ dans $L^2(\Omega)$. De plus $\varepsilon^{1/2} u_\varepsilon^i(x, t) \to 0$ dans $H^m(\Omega)$.

Il nous reste à expliciter, dans quelques exemples, les conditions aux limites.

Exemple 2. 5. — On prend $V_1 = H_0^m(\Omega)$ donc, $\overline{V}_{1(w)} = H_0^{m'}(\Omega)$. Les conditions aux limites sont pour $u_\varepsilon^1(x, t)$ et pour $u^1(x, t)$ les conditions de Diritchlet, *i.e.*, pour tout $t \geqslant 0$:

$$\frac{\partial^p}{\partial \nu^p} u_\varepsilon^1(x, t)\Big|_\Gamma = 0 \qquad \text{pour} \qquad p = 0, 1, \ldots, m-1$$

et

$$\frac{\partial^p}{\partial \nu^p} u^1(x, t)\Big|_\Gamma = 0 \qquad \text{pour} \qquad p = 0, 1, \ldots, m'-1.$$

Exemple 2. 6. — On prend $V_2 = H^m(\Omega)$, donc $\overline{V}_{2(w)} = H^{m'}(\Omega)$.

Les conditions aux limites sont pour $u_\varepsilon^2(x, t)$ et $u^2(x, t)$ les conditions de Neumann, qui se traduisent, pour $t \geqslant 0$, par des conditions de la forme ([66])

$$(\varepsilon S_k(t) + T_k(t))u_\varepsilon^2(x, t)\,|_\Gamma = 0 \quad k = 0, 1, \ldots, m'-1$$
$$S_k(t)u_\varepsilon^2(x, t)\,|_\Gamma = 0 \quad \text{pour } k = m', m'+1, \ldots m-1$$

et

$$T_k(t)u^2(x, t)\,|_\Gamma = 0 \quad \text{pour } k = 0, \ldots, m'-1.$$

On pourrait aussi considérer des problèmes de Dirichlet-Neumann mêlés, ou des problèmes de dérivées obliques. Voir exemples 1. 8 et 1. 9.

Remarquons enfin que les résultats du nº 3 sont valables pour des problèmes mixtes, relatifs à des systèmes différentiels.

([66]) Cf. exemple 1-7.

BIBLIOGRAPHIE

Bourbaki.

[1] Espaces vectoriels topologiques, livre V, Hermann, Paris.

Browder.

[1] On the regularity properties of solutions of elliptic differential equations, *Comm. pure and appl. Math.*, t. 9, 1956, pp. 351-361.

Courant Hilbert.

[1] *Methods of mathematical physics.*

Faedo.

[1] Un nouvo metodo per l'analisi esistenziale e quantitativa dei problemi di propagazione, *Annali della scuola Norm. Sup. Pisa*, I, 1949, pp. 1-40.

Friedrichs.

[1] On the differentiability of the solutions of linear elliptic equations, *Comm. pure and appl. Math.*, t. 6, 1953, pp. 299-326.

[2] Asymptotic phenomena in mathematical physics, *Bull. Amer. Math Soc.*, 61, 6, 1955, pp. 485-504.

Garding.

[1] Dirichlet problem for linear elliptic differential equations *Math. Scand.*, 1, 1953, pp. 55-72.

Glasko.

[1] Dokladi, 1956, 108, nº 5.

Hille.

[1] Functional analysis and semi-groups, *Amer. Math. Soc. Coll. Publi.* XXXI, New-York, 1948.

Huet D..

[1] Phénomènes de perturbation singulière, *Comptes rendus Acad. Sc.* Paris, t. 244, 1957, pp. 1438-1440; t. 246, 1958, pp. 2096-2098; t. 247, 1958, pp. 2273-2276,; *t.* 248, 1959, pp. 58-60.

[2] Perturbations singulières d'opérateurs elliptiques, *Séminaire Lelong*, 1958-1959, Paris, pp. 13-01, 13-07.

Kato.

[1] Perturbation theory of semi-bounded operators. *Math. Annalen*, 125, 1953, pp. 435-447.

Kostomarov.

[1] Dokladi, 1957, 115, nº 2.

Lions.

[1] Problèmes aux limites en théorie des distributions, *Acta Math.*, t. 94, 1955, pp. 13-153.

[2] Sur les problèmes aux limites de dérivées obliques, *Annals of Math.*, t. 64, 1956, pp. 207-239.

[3] On elliptis partial differential equations, cours professé à Bombay 1957.
[4] Sur quelques problèmes aux limites, *Bull. Sic. Math. de France*, t. 83, 1955.
[5] Problèmes aux limites de type mixte, *Coll. sur les équations aux dérivées partielles*, Bruxelles 1954, pp. 25-36.
[6] Boundary value problems, *Technical reports*, Lawrence, Kansas, 1957.
[7] Opérateurs de Delsarte et problèmes mixtes, *Bull. Soc. Math. de France*, t. 84, 1956, pp. 10-95.

Lions-Schwartz
[1] Pb aux limites sur des espaces fibrés. *Acta Math.*, t. 94, pp. 143-147.

Morgenstern.
[1] Singuläre Störungtheorie partieller Differentialgleichungen, *Jour. Rat. mech. and Anal.* 5, 1956, pp. 204-216.

Moser.
[1] Singular perturbation of eigenvalue problems for linear differential equations of even order, *Comm. Pure and appl. Math.*, 8, 1955, pp. 251-278.

Nirenberg.
[1] Remarks on strongly elliptic partial diff. Equations, *Comm. Pure and applied Math.*, t. 8, 1955, pp. 641-675.

Phillips.
[1] Perturbation theory for semi-groups of linear operators, *Trans. of the amer. Math. Soc.*, 74, nº 2, 1953, pp. 199-221.

Schwartz.
[1] *Théorie des distributions*, tome I, et II, Hermann, Paris.
[2] *Séminaire*, Paris, 1954-1955.
[3] *Séminaire*, Paris, 1955-1956.
[4] Théorie des Noyaux, à paraître.
[5] Ecuaciones diferenciales parciales elipticas, Bogota, 1956.
[6] *Séminaire*, Paris, 1958-1959.
[7] Transformation de Laplace des distributions, Lund, tome Supp. 1952.
[8] Lectures on mixed problems in partial differential equations and representations of semi-groups, Bombay, 1958.
[9] Distributions à valeurs vectorielles, *Ann. Inst. Fourier*, 1957.

Trèves.
[1] Relations de domination entre opérateurs différentiels, *Acta Math.*, 101, 1-2, 1959, p. 1.

Visik.
[1] Le problème de Cauchy avec des opérateurs comme coefficients, ..., *Math. Sbornik*, 39, 1956, pp. 51-148.

Visik Ladysenskaya.
[1] Problèmes aux limites pour équations aux dérivées partielles.. *Ouspeki. Math. Naouk*, XI, 1956, pp. 41-97.

Visik-Liousternik.

[1] Dégénérescence régulière pour les équations différentielles linéaires, avec un petit paramètre, *Ouspeki Mat. Naouk*, XII, 1957, pp. 1-121.

Yosida.

[1] On the differentiability and the représentation of one parameter semi-group of linear operators, *Journ. of the Math. Soc. of Japan*, 1948, 1, pp. 15-21.

(*Thèse, Fac. Sciences*, Paris, 1959).

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
10 (1960), 151-270.

SUR LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE DES G-STRUCTURES

par Daniel. BERNARD (Strasbourg).

INTRODUCTION

L'objet de ce travail est l'élaboration d'une théorie générale des G-structures réelles et complexes du premier ordre que soit à la fois simple et aussi complète que possible. Nous ne nous sommes donc pas attachés au cas de certains groupes G pour lesquels les propriétés sont particulièrement riches — et bien connues — mais au contraire, nous nous sommes efforcés de dégager ce qu'il y a de commun à ces structures pour des groupes G différents, ou tout au moins pour certaines grandes classes qui s'introduisent naturellement.

Soit G un sous-groupe du groupe linéaire réel (ou complexe) à m variables L_m (ou CL_m). Une G-structure sur la variété X de dimension m est déterminée par un *espace de repères*, sous-espace fibré principal de l'espace E des repères réels (ou E^C des repères complexes) de X. C'est pourquoi le chapitre premier est consacré à l'étude des sous-espaces fibrés principaux (s.e.f.p.). Certaines définitions et constructions classiques sur les espaces fibrés (topologiques) sont d'abord rappelées sous une forme adaptée à notre objet (§ 1, 2). Puis les G'-s.e.f.p. d'un espace fibré H(X, G) sont définis et caractérisés (prop. I, 3, 1); ils correspondent biunivoquement aux sections de H/G' (prop. I, 3, 3). Au § 5 est analysée la notion de s.e.f.p. dans le cas différentiable (prop. I, 5, 1) et sont caractérisées

les parties H' de $H(X, G)$ qui admettent une structure de s.e.f.p. différentiable. En vue de l'étude des structures subordonnées communes à deux G-structures (ch. III) nous étudions l'intersection d'un G'- et d'un G''-s.e.f.p. dans le cas topologique (§ 4) puis dans le cas différentiable (§ 6). On peut dire en gros que l'intersection est un Γ-s.e.f.p. ($\Gamma = G' \cap G''$) sous la seule condition, évidemment nécessaire, que sa projection soit X, dès que G'/Γ (ou G''/Γ) est compact et que, dans le cas différentiable la propriété est d'ailleurs vraie pour « presque tous les couples de sous-groupes G' et G''».

Le chapitre II introduit d'abord (§ 1 et 2) l'outil qui sera principalement employé au chapitre III : les formes différentielles à valeurs vectorielles et le calcul sur ces formes (en particulier différents « produits » qui constituent l'extension à ces formes de lois de composition entre leurs espaces de valeurs). Au § 3 est analysée la notion de tenseur associé à une forme tensorielle sur un e.f.p. $H(X, G)$: c'est un tenseur sur le produit fibré $H \boxtimes E$ (E espace des repères de X) et non sur H lui-même. Les principales propriétés des connexions sont rappelées au § 4 à la fin duquel nous établissons les formules fondamentales de la géométrie différentielle par l'emploi exclusif de l'algorithme nouveau introduit au début du chapitre. L'extension de cet algorithme au cas des formes vectorielles complexes et en particulier de la notion de tenseur associé fait l'objet du dernier paragraphe.

Le chapitre III contient les résultats principaux de ce travail. Les espaces de repères et G-structures (réels et complexes) sont d'abord définis et plusieurs exemples analysés (§ 1). Une classe importante, qui contient les structures presque complexes, presque hermitiennes, riemaniennes... est celle des « structures définies par un tenseur», c'est-à-dire dont l'espace des repères distingués est le sous-espace des repères de E (resp. E^C) pour lesquels un certain tenseur sur E (resp. E^C) a une valeur déterminée (§ 2). Au § 3 sont étudiées les structures équivalentes et subordonnées : le théorème III, 3 simple application du chapitre premier, indique que la condition trivialement nécessaire pour que deux structures aient une structure subordonnée commune est en général suffisante. Les espaces de repères H sont caractérisés parmi les e.f.p. de base X par l'existence d'une 1-forme tensorielle « régulière »

à valeurs dans R^m ou C^m appelée 1-forme fondamentale de H. L'inclusion $H \subset E$ (resp. E^C) permet *dans le cas des espaces de repères* de définir un tenseur associé à toute forme tensorielle sur H à valeurs dans M qui soit un tenseur sur H lui-même (prop. III, 4, 2); la correspondance entre forme tensorielle et tenseur associé est biunivoque; le tenseur et la forme sont liés par une relation particulièrement simple (12, ch. III, § 4). Toutefois cette correspondance n'est définie d'une façon canonique que lorsque H est un espace de repères réels (et M quelconque), ou H un espace de repères complexes et M un espace vectoriel complexe : cette remarque est essentielle au § 6. Le § 5 est consacré aux propriétés particulières des connexions sur les espaces de repères : caractérisation d'une variété X admettant une G-structure par l'existence d'une connexion linéaire dont le groupe d'holonomie est un sous-groupe de G (th. III, 5, 1); caractérisation des connexions linéaires qui sont des S-connexions, S étant une G-structure « définie par un tenseur » (th. III, 5, 2); torsion; identité de Ricci généralisée dont la démonstration est faite uniquement à l'aide de la notion de tenseur associé et de l'algorithme du chapitre II; relation entre le tenseur associé à la différentielle absolue d'une q-forme et la « dérivée covariante » de cette forme (prop. III, 5). Le *tenseur de structure* d'une G-structure S (généralisant le « tenseur de torsion d'une structure presque complexe ») caractérise les 2-formes tensorielles sur H de type vectoriel à valeurs dans R^m ou C^m qui sont la torsion d'une S-connexion [théorème (III, 6, 1) et (III, 6, 2)]. Toutefois ce tenseur n'est défini que pour les G-*structures de première espèce* : c'est-à-dire réelles ou, si elles sont complexes, telles que G soit un sous-groupe de Lie complexe de CL_m. La particularité des structures complexes de deuxième espèce provient de la non-existence d'un tenseur associé canonique sur un espace de repères complexes pour une forme à valeurs dans un espace vectoriel réel. Les paragraphes 7 et 8 contiennent des calculs du tenseur de structure et leur identification avec des invariants connus dans le cas de structures classiques. Nous appelons *presque intégrable* une structure dont le tenseur de structure est nul : par exemple une structure presque hermitienne presque intégrable est kählerienne.

Dans le chapitre IV nous nous occupons des automorphismes

et automorphismes infinitésimaux d'une G-structure réelle. Au paragraphe 1 sont étudiées les *G-structures transitives* : les pseudogroupes de Lie du premier ordre correspondent biunivoquement aux classes de G-structures transitives équivalentes. Au § 2, nous montrons en particulier que les *conditions de Cartan* (définition IV, 2), conditions nécessaires d'existence d'une G-structure transitive de tenseur de structure donné (et qui sont suffisantes lorsque G est involutif) traduisent simplement le caractère tensoriel du tenseur de structure d'une part, l'identité de Bianchi d'autre part (prop. IV, 2, 2). Le § 3 est consacré aux G-structures involutives : alors si elles sont presque intégrables (resp. presque transitives) elles sont intégrables (resp. transitives) (th. IV, 3); puis nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour que deux pseudogroupes de Lie soient localement semblables (théorème IV, 3). Dans le dernier paragraphe sont posés deux problèmes relatifs aux automorphismes infinitésimaux qui sont étudiés à l'aide du lemme d'Hermann (prop. IV, 4, 2) dans des cas particuliers. Les principaux résultats sont ceux-ci : Si S est une G-structure sur X subordonnée à une structure Riemannienne et presque intégrable, les isométries infinitésimales sont aussi des automorphismes infinitésimaux de S dès que X est compacte ou n'admet pas de 2-forme à dérivée covariante nulle (th. IV, 4, 1). Le théorème (IV, 4, 2) donne des conditions dans lesquelles toute transformation infinitésimale affine pour une S-connexion est un automorphisme infinitésimal de S.

Ce bref résumé appelle quelques remarques. Au Colloque International de Géométrie différentielle du C.N.R.S. (Strasbourg 1953), trois conférences attiraient l'attention sur la notion générale de G-structure (S.S. Chern [9]) ou « structure infinitésimale régulière » (C. Ehresmann [14] et P. Libermann [19]) : un grand nombre de structures de la géométrie différentielle peuvent être définies par la donnée une G-structure d'une part; les pseudo-groupes de Lie (« groupes continus infinis » d'Elie Cartan) sont d'autre part commodément définis comme pseudo-groupes des automorphismes locaux de certaines d'entre elles. Il apparaissait donc utile d'élaborer une théorie générale des G-structures, et c'est ce que nous avons tenté de faire, en nous appuyant entre autres sur les résultats et les exemples des auteurs déjà cités. Ainsi, dans [9], S. S.

Chern introduit « les premiers invariants » de la structure — tandis que, dans [19], P. Libermann peut éviter de les utiliser, car pour les structures qu'elle étudie « on peut imposer canoniquement la torsion »: notre *tenseur de structure* (Ch. III, § 6) précise la nature des premiers invariants, leur donne une définition globale et permet de caractériser les formes de torsion des S-connexions. De même, de nombreux résultats sont des généralisations, apportant souvent des simplifications, de résultats connus d'autres auteurs.

Les G-structures auxquelles ce travail est consacré sont les G-structures du premier ordre, réelles et complexes : il convient de nous expliquer sur ce choix. L'exemple des structures presque complexes et des structures subordonnées pour lesquelles définitions et calculs sont grandement simplifiés par l'introduction de repères complexes, nous a conduits à définir et étudier les G-structures complexes. En même temps, un premier exemple de G-structures complexes non équivalentes au réel a été étudié par G. Legrand dans sa thèse [18]. Il ne s'est pas révélé de différence fondamentale entre les G-structures réelles et complexes — et ceci justifie *a posteriori* leur étude simultanée — si ce n'est dans la définition du tenseur de structure : alors que les G-structures complexes de première espèce se comportent comme les structures réelles, l'extension du procédé aux G-structures complexes de deuxième espèce conduit à des tenseurs qui ne suffisent pas à caractériser la torsion des S-connexions. Au contraire, le cadre naturel de l'étude des G-structures d'ordre supérieur (Cf. Y. Matsushima [24]) est certainement la *théorie des jets* de C. Ehresmann alors que les structures du premier ordre ont pu être étudiées à l'aide de méthodes plus classiques de géométrie différentielle (espaces fibrés, connexions, calcul différentiel extérieur) qui, convenablement adaptées par l'emploi en particulier de l'algorithme du chapitre II, conduisent à des calculs et à des formulations très simples : cette différence de méthodes justifiait déjà une étude autonome des structures du premier ordre, requise d'ailleurs à notre avis par leur importance propre.

Nous avons été amenés à considérer que toutes les G-structures équivalentes à une structure donnée S (espaces de repères déduits de celui de S par les translations à droite de E, ou E^C) définissent la même structure infinitésimale et nous avons

appelé $\mathcal{C}$-structure la classe des structures équivalentes à S, $\mathcal{C}$ désignant la classe des sous-groupes conjugués de G dans L_m (ou CL_m). La plupart des propriétés étudiées ici sont des propriétés des $\mathcal{C}$-structures. Nous avons pu définir un *faisceau des $\mathcal{C}$-structures* et c'est sans doute dans cette direction que ce travail aura ses premiers prolongements.

La bibliographie placée à la fin de ce travail n'est nullement exhaustive : nous avons pris pour principe de n'y porter que des travaux explicitement cités ici.

CHAPITRE I

ESPACES FIBRÉS SOUS-ESPACES FIBRÉS PRINCIPAUX

1. — Définitions et notations.

Nous appellerons *espace fibré principal* (e.f.p.) un espace fibré principal à groupe structural topologique localement trivial. Plus précisément :

Définition I, 1, 1 [1]. — *Un e.f.p.* H(X, G) *de base* X *et groupe structural* G *est défini ainsi*

a) H et X *sont des espaces topologiques* [2], G *un groupe topologique*,

b) H *est muni d'une application continue* p *de* H *sur* X *admettant un relèvement au voisinage de tout* $x \in$ X. Un tel relèvement, qui est une application continue σ d'un voisinage U de X dans H, telle que $p \circ \sigma$ soit l'identité de U, est appelée *section locale de* H *au-dessus de* U. $H_x = p^{-1}(x)$ est la fibre au-dessus de x.

c) G *opère à droite sur* H, c'est-à-dire que l'on a une application continue $H \times G \rightarrow H$, $(z, g) \rightarrow z.g$, telle que $(z.g).g' = z.(gg')$ et $z.e = z$ (g, $g' \in$ G, e identité de G) : l'application partielle Dg de H sur lui-même $z \rightarrow z.g$, ou translation à droite par g, est par suite un homéomorphisme de H tel que $Dg' \circ Dg = Dgg'$. *Les translations à droite de* G *respectent les fibres et sont simplement transitives sur les fibres.*

d) *L'application continue biunivoque* Φ_U *de* $U \times G$ *sur*

(1) C'est la définition classique, de Steenrod [26], mise sous une forme commode pour la suite.

(2) Un espace topologique sera toujours supposé séparé.

$H_U = p^{-1}(U)$, $(x, g) \to \sigma(x).g$ *associée à une section locale* σ *au-dessus de* U *est un homéomorphisme appelé carte locale de* H *au-dessus de* U *associée à* σ.

Nous appellerons *espace fibré* (e. f.) un espace fibré localement trivial à groupe structural topologique qui peut être défini ainsi :

DÉFINITION I, 1, 2. — E(X, G, F) *est un e.f. de base* X, *groupe structural* G, *fibre* F *si*

a) E, X *et* F *sont des espaces topologiques et* G *un groupe topologique opérant à gauche et effectivement sur* F *par* $(g, y) \to g.y$ $(g \in G, y \in F)$; *l'application partielle de* F *dans* F $y \to g.y$ *étant encore notée* g, *on a* $g \circ g' = gg'$;

b) E *est muni d'une application continue* p *de* E *sur* X [3]; $E_x = p^{-1}(x)$ est la *fibre* au-dessus de x;

c) *tout* $x \in X$ *possède un voisinage ouvert* U *muni d'une carte locale* Φ_U c'est-à-dire d'un homéomorphisme de $U \times F$ sur $E_U = p^{-1}(U)$ tel que $p \circ \Phi_U(x, y) = x$, $x \in X$, $y \in F$;

d) *si* U *et* V *sont des ouverts de* X *munis de cartes locales* Φ_U *et* Φ_V, *et si* $U \cap V \neq \emptyset$, *il existe une application continue* s *de* $U \cap V$ *dans* G *telle que le changement de carte* $\Phi_V^{-1} \circ \Phi_U$ *soit l'application de* $(U \cap V) \times F$ *sur lui-même* $(x, y) \to (x, s(x).y)$.

On dira brièvement que $p : E \to X$ est une fibration si E est un e.f., au sens précis qui vient d'être défini, de base X et de projection p. Un e.f.p. est évidemment un e.f., G-groupe opérant sur G-fibre par translation à gauche; g désignera aussi bien l'élément $g \in G$ que l'opération translation à gauche par g, celle-ci étant toutefois notée L_g quand il y aura un risque d'ambiguïté : $L_g.g' = g.g'$ $(g, g' \in G.)$

2. — Constructions diverses d'espaces fibrés.

Soient E un e.f. et Φ_U^x la restriction à $\{x\} \times G$ de la carte locale Φ_U; nous appellerons *repère au point* x *de la structure fibrée de* E l'un quelconque des homéomorphismes de F sur E_x :

$$h = \Phi_U^x \circ g \quad g \in G \quad x \in X.$$

[3] La projection d'un e.f. E sur sa base sera généralement notée p, même s'il est question simultanément de plusieurs e.f.; lorsqu'il y aura un risque d'ambiguïté on précisera en la notant p_E.

De l'axiome *d*) de la définition (I, 1, 2) découle que cette définition est indépendante du choix de la carte locale Φ_U car si $x \in U \cap V$

$$\Phi_U^x = \Phi_V^x \circ s(x) \quad \text{et} \quad h = (\Phi_V^x \circ s(x)) \circ g = \Phi_V^x \circ (s(x)g), \quad s(x) . g \in G.$$

Soit $\hat{E}_x$ l'ensemble des repères en x de E, et $\hat{E} = \bigcup_{x \in X} \hat{E}_x$; il est classique — et immédiat à l'aide de la définition (I, 1, 1) — que les cartes $\hat{\Phi}_U$ associées aux cartes locales Φ_U de E

$$\hat{\Phi}_U : U \times G \to \hat{E} \quad (x, g) \to \Phi_U^x \circ g \quad x \in X, \ g \in G$$

définissent sur $\hat{E}$ une structure d'e.f.p. $\hat{E}(X, G)$. Remarquons simplement que la translation à droite par g sur $\hat{E}$ est $D_g . h = h \circ g$. $\hat{E}$ muni de cette structure est *l'e.f.p. associé à* E.

Cette construction s'applique en particulier à un e.f.p. H. Φ_U étant la carte de H associée à la section locale σ, un repère en x de H est une application $\Phi_U^x \circ g = \Phi_U^x \circ L_g$ $(g \in G)$ de G sur H_x. Or

$$\Phi_U^x \circ L_g(g') = \Phi_U^x(gg') = \Phi_U(x, gg')$$
$$= \sigma(x) . gg' = (\sigma(x) . g) . g' = \Phi_U(x, g) . g',$$

c'est-à-dire, puisque $\Phi_U^x \circ g = \hat{\Phi}_U(x, g)$:

$$\hat{\Phi}_U(x, g) . g' = \Phi_U(x, g) . g'.$$

Le point désignant au premier membre l'opération (à gauche) du repère sur la fibre-type G, et dans le second l'opération (à droite) de G sur H. Cette remarque montre qu'il existe une application bijective de H sur $\hat{H}$ qui peut être définie dans tout couple de cartes associées par

$$\Phi_U(x, g) \to \hat{\Phi}_U(x, g)$$

et qui est par suite un homéomorphisme; c'est d'ailleurs un G-isomorphisme d'e.f.p. (Cf. I, 3) et ceci permet d'identifier $\hat{H}$ à H, $h \in H$ étant identifié au repère $\hat{h} \in \hat{H}$: $g \in G \to h . g \in H$. La notation $\hat{h}$ sera parfois employée dans la suite quand il sera nécessaire de distinguer $\hat{h}$ de h.

Soit un e.f. E(X, G, F) et l'e.f.p. associé $H = \hat{E}$. $h \in H$ est un homéomorphisme de F sur E_{ph}, $y \in F \to h . y \in E_{ph}$. Alors, pour $h \in H$, $g \in G$, $y \in F$, on a

$$(h . g) . y = (D_g h) . y = (h \circ g) y = h . (g . y)$$

ce qui entraîne en particulier

$$(h.g).(g^{-1}.y) = h.[g.(g^{-1}y)] = h.y.$$

Cette remarque permet d'identifier E au quotient de F $\times$ H par la relation d'équivalence

$$(y,h) \sim (g.y,\ h.g^{-1}) \quad y \in \mathrm{F},\ h \in \mathrm{H},\ g \in \mathrm{G}.$$

Et par conséquent de construire E à partir de F et H.

Plus généralement, soit F un espace topologique sur lequel G opère par $\mathcal{R}(\mathrm{G})$. G n'étant pas supposé effectif sur F, soit N le sous-groupe distingué fermé des éléments de G qui laissent invariants tous points de F : G/N est effectif sur F.

Définition I, 2. — *Soit* F(H) *le quotient de* F $\times$ H *par la relation d'équivalence*

$$(y,\ h) \sim (\mathcal{R}(g).y, h.g^{-1}) \quad y \in \mathrm{F},\ h \in \mathrm{H},\ g \in \mathrm{G}$$

il a une structure fibrée F(H)[X, G/N, F]; *on dira que c'est l'e.f. obtenu par modelage de* F *sur* H [4], ou *l'e.f. associé à* H *de type* (F, $\mathcal{R}$(G)).

Soit α la projection canonique de F $\times$ H sur F(H); la projection de F(H) sur X est définie par

$$p_{\mathrm{F(H)}}(\alpha(y,\ h)) = p_{\mathrm{H}}\ (h)$$

et la structure fibrée de F(H) par les cartes Ψ_{U} associées aux sections σ de H au-dessus de U :

$$\Psi_{\mathrm{U}}(x,\ y) = \alpha(y,\ \sigma(x)) \quad x \in \mathrm{U} \subset \mathrm{X},\ y \in \mathrm{F};$$

l'e.f.p. $\widehat{\mathrm{F(H)}}$ est isomorphe à l'e.f.p. quotient H/N (voir ci-dessous).

Soient H un e.f.p. de groupe G et G$' \subset$ G un sous-groupe fermé; la relation

$$h \sim h' \quad \text{si} \quad h' = h.g', \qquad h \in \mathrm{H}, \quad h' \in \mathrm{H}, \quad g' \in \mathrm{G}'$$

est une relation d'équivalence dans H. Soient H/G$'$ l'espace topologique quotient de H par cette relation et π l'application canonique H $\to$ H/G$'$. H/G$'$ est naturellement muni d'une projection sur X définie par

$$p_{\mathrm{H/G'}}(\pi(h)) = p_{\mathrm{H}}(h)$$

[4] Cf. Aragnol [1] Ch. I, § 2; avec la terminologie de Aragnol on dirait que X $\times$ F est modelé sur H.

G opérant naturellement sur $L = G/G'$, on peut modeler L sur H; soient α la projection canonique de $L \times H$ sur $L(H)$ et y_0 le point de L défini par la classe G'. Comme

$$\alpha(y_0, h.g') = \alpha(g'y_0, hg'.g'^{-1}) = \alpha(y_0, h), \qquad g' \in G', \quad h \in H$$

la relation
$$f(\pi(h)) = \alpha(y_0, h)$$

définit une application de H/G' dans $L(H)$. On démontre que f, qui est bijective et respecte les projections, est un homéomorphisme, d'où :

Proposition I, 2, 1. — *Soit* G' *un sous-groupe fermé du groupe structural* G *d'un e.f.p.*H. *L'espace quotient* H/G', G' *opérant sur* H *par les translations à droite de* G, *s'identifie à l'e.f.* $L(H)$, *modelé sur* H *de l'espace homogène* $L = G/G'$ *sur lequel* G *opère naturellement.*

Si N est un sous-groupe distingué de G, la structure fibrée de H/N précisée par la proposition (I, 2, 1) est une structure fibrée principale de groupe G/N, et l'application canonique π de H sur H/N est un homomorphisme d'e.f.p. compatible avec l'homomorphisme canonique ρ de G sur G/N (cf. I, 3). Ainsi G' n'étant pas un sous-groupe distingué de G, et G'_0 étant le plus grand sous-groupe de G' invariant dans G, H/G'_0 est un e.f.p. de groupe G/G'_0 qui s'identifie à l'e.f.p. $\widehat{H/G'}$ associé à H/G'.

La proposition (I, 2, 1) peut être complétée, si l'on fait l'hypothèse supplémentaire que la projection canonique $G \to G/G'$ est une fibration; nous dirons brièvement que G' *est un sous-groupe* (L. T.) *de* G; il est nécessairement fermé.

Proposition I, 2, 2 (théorème de surfibration). — *Soient* G *un groupe topologique,* G' *et* G'' *des sous-groupes tels que* $G'' \subset G' \subset G$, H *un e.f.p. de groupe* G. *Si* G' *est un sous-groupe* (L. T.) *de* G, *dans le diagramme commutatif ci-dessous, chaque application est une fibration :*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\pi''"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "\pi'" near start] & H/G'' \arrow[d, "q"] \arrow[dl, "p''"' near start] \\ X & H/G' \arrow[l, "p'"] \end{tikzcd}$$

Cette proposition résulte de la précédente et de la démonstration de la propriété pour la seule application q.

Nous aurons enfin besoin de la notion de produit fibré :

Définition I, 2, 2. — *Soient* E(X, G, F) *et* E′(X, G′, F′) *deux e.f. Leur* produit fibré $E \boxtimes E'$ *est le sous-espace de* $E \times E'$ *qui se projette sur la diagonale de* $X \times X$; *il est muni d'une structure naturelle d'e.f. de base* X *et de groupe* $G \times G'$ *opérant trivialement sur la fibre* $F \times F'$.

En particulier, si E et E′ sont des e.f.p., il en est de même de $E \boxtimes E'$.

3. — Homomorphismes et sous-espaces d'espaces fibrés principaux.

Soient H(X, G) et H′(X, G′) des e.f.p. de même base X. Un *X-homomorphisme* f de H dans H′ compatible avec un homomorphisme ρ du groupe topologique G dans le groupe topologique G′ est une application continue de H dans H′ telle que $p_{H'} \circ f = p_H$ et

(1) $$f(z.g) = f(z).\rho(g), \quad z \in H, \quad g \in G.$$

Le plus souvent, nous dirons simplement homomorphisme. Si $G' = G$, ρ étant la représentation identique de G, f sera un G-*isomorphisme*. Si $H' = H$, f est alors un automorphisme de H(X, G).

Si f satisfait simplement à (1), c'est une *représentation* de H dans H′ compatible avec ρ; une G-*représentation* si $G' = G$, ρ étant l'identité de G. Comme $p_{H'}f(z.g) = p_{H'}f(z)$, à f est alors associée une application continue μ de X dans lui-même définie par $p_{H'} \circ f = \mu \circ p_H$: on dit que f induit μ sur la base.

Définition I, 3, 1. — *Soit* G′ *un sous-groupe topologique de* G. *Un* G′*-sous-espace fibré principal* (G′ -*s.e.f.p.*) *de* H(X, G) *est un e.f.p.* H′(X, G′) *dont*

1° *l'espace* H′ *est un sous-espace de* H, *muni de la topologie induite,*

2° *la projection* p' *est la restriction à* H′ *de* p,

3° *la translation à droite par* $g' \in G'$ *est la restriction à* H' *de la translation à droite* $D_{g'}$ *opérant sur* H.

La caractérisation suivante sera utile pour la suite :

PROPOSITION I, 3, 1. — *Pour qu'une partie* H' *de* H *soit un* G'*-s.e.f.p. de* H, *il faut et suffit que la restriction* p' *de* p *à* H' *jouisse des propriétés suivantes :*

1° $p'(H') = X$.

2° $p'^{-1}(x) = z.G'$ si $z \in H'$ et $x = p'.z$.

3° p' *admet un relèvement local au voisinage de tout* $x \in X$ (*continu pour la topologie induite*).

Ces conditions, évidemment nécessaires, sont suffisantes en effet : soit H' une partie de H satisfaisant à ces propriétés; munissons la de la topologie induite. Alors l'axiome *a*) de la définition (I, 1, 1,) est vérifié de même que *b*) puisque p', restriction d'une application continue à un sous-espace, est continue et jouit de la propriété 3°. Quant à l'axiome *c*), il est vérifié parce que l'application de $H' \times G'$ sur H'

$$(z, g') \to z.g' \quad z \in H', \ g' \in G'$$

qui est bien définie d'après la propriété 2°, est encore continue comme restriction à un sous-espace d'une application continue. Enfin l'axiome *d*) est vérifié car, si σ est une section locale de H' au-dessus de U, c'est aussi une section locale de H de sorte que l'application de $U \times G$ sur H_U : $(x, g) \to \sigma(x).g$ est une carte locale de H et que sa restriction à $U \times G'$ — restriction d'un homéomorphisme à un sous-espace — est encore un homéomorphisme.

On déduit de cette proposition le

COROLLAIRE. — *L'image d'un e.f.p.* $H'(X, G')$ *par un homomorphisme* f *de* H *dans* $H(X, G)$ *compatible avec la représentation* ρ *de* G' *dans* G, *est un* $\rho(G')$*-s.e.f.p. de* H.

PROPOSITION I, 3, 2. — *Pour qu'un* G'*-s.e.f.p.* H' *soit fermé dans* $H(X, G)$, *il faut et il suffit que* G' *soit fermé dans* G.

En effet, si H' est fermé, $H'_x = H_x \cap H'$ est fermé dans $H_x (x \in X)$; or, G est homéomorphe à H_x dans l'homéomorphisme $\hat{z}$:

$$g \to z.g, \qquad (z \in H', \ g \in G)$$

qui transforme G' en H'_x, de sorte que G' est fermé dans G. La réciproque s'obtient immédiatement à l'aide des cartes locales de H.

Proposition I, 3, 3. — *Si* G' *est un sous-groupe* (L. T.) *de* G, *les* G'*-s.e.f.p. d'un e.f.p.* H(X, G) *correspondent biunivoquement aux sections de* H/G'.

Gardons les notations de la proposition (I, 2, 1) et soit donné $H'(X, G') \subset H(X, G)$. H' définit une application f de X dans H/G' par $f(x) = \pi(H'_x)$ puisque, si $z_1 \in H'_x$ et $z_2 \in H'_x$, $z_2 = z_1 . g'$ $g' \in G'$ et $\pi(z_1) = \pi(z_2)$. f est continue, car dans un ouvert U muni d'une section locale σ_U, f se factorise en un produit d'applications continues: $f = \pi \circ \sigma_U$; c'est donc une section de H/G'. Soit réciproquement f une telle section et $H' = \bigcup_{x \in X} \pi^{-1}(f(x))$; la partie $H' \subset H$ munie de la topologie induite satisfait d'une façon évidente aux propriétés 1° et 2° de la proposition (I, 3, 1). Pour montrer que H' est un G'-s.e.f.p. de H, il reste à montrer que p' admet des relèvements locaux au voisinage de tout $x \in X$. Or, si σ_U est une section de H et ρ l'application canonique de G sur $L = G/G'$, on a la carte locale Ψ_U de H/G':

$$(x, y) \to \Psi_U(x, y) = \pi(\sigma_U(x) . g) \quad \text{si} \quad x \in X,\ y \in L,\ \rho(g) = y.$$

Il existe donc sur U une fonction continue à valeurs dans L, $y \to y(x)$, telle que

$$f(x) = \Psi_U(x, y(x)) \quad x \in U.$$

Soient $x_0 \in U$, O un voisinage de $y(x_0)$ dans L muni d'un relèvement $y \to s(y) \in G$, qui existe puisque G' est un sous-groupe (L.T.). $V = y^{-1}(O) \cap U$ est un voisinage ouvert de x_0, et pour $x \in V$ on a $y(x) = \rho[s(y(x))]$ d'où

$$f(x) = \Psi_U(x, \rho[s(y(x))]) = \pi[\sigma_U(x) . s(y(x))]$$

c'est-à-dire que, pour $x \in V$, $\sigma_V(x) = \sigma_U(x) . s(y(x)) \in H'_x$; σ_V étant manifestement continue, elle constitue un relèvement de p' au-dessus de V., c.q.f.d.

Cette proposition n'est qu'une autre forme d'un théorème bien connu de C. Ehresmann [12] (5) car la notion de G'-s.e.f.p. est en fait équivalente à celle de restriction à G' du groupe structural

(5) Voir aussi J. Frenkel [15], § 16.

G. En effet, de l'existence d'un G'-s.e.f.p. $H'(X, G') \subset H(X, G)$ découle la possibilité de restreindre à G' le groupe structural de H. Réciproquement si cette opération est possible, cela signifie qu'il existe un e.f.p. $K'(X, G')$ qui, par accroissement à G du groupe structural donne un e.f.p. $K(X, G)$ « équivalent » à H : mais ceci signifie dans notre langage que $K'(X, G')$ est un G'-s.e.f.p. de $K(X, G)$, et que celui-ci est G-isomorphe à $H(X, G)$; alors l'image par cet isomorphisme de $K'(X, G')$ est un G'-s.e.f.p. de H.

4. — Intersection des sous-espaces fibrés principaux.

Soient G' et G'' des sous-groupes de G, $H'(X, G')$ et $H''(X, G'')$ des s.e.f.p. de l'e.f.p. $H(X, G)$. Étudions leur intersection.

Proposition I, 4, 1. — *Si* $z' \in H'_x$ *et* $z'' = z'.g \in H''_x$ $(x \in X, g \in G)$, *pour que* $H_x \cap H''_x \neq \emptyset$, *il faut et suffit que* $g \in G'.G''$. *Alors, si* $z \in H'_x \cap H''_x$, *on a* $H'_x \cap H''_x = z.\Gamma$ *ou* $\Gamma = G' \cap G''$.

En effet, si $H'_x \cap H''_x \neq \emptyset$, soit $z \in H'_x \cap H''_x$; comme $z \in H'_x$, $z = z'.g'$ $(g' \in G')$ et comme $z \in H''_x$, $z = z''.g''$ $(g'' \in G'')$; alors $z''.g'' = z'.g'$ soit $z'' = z'.(g'.g''^{-1})$; d'où $g = g'.g''^{-1} \in G'.G''$ et réciproquement. D'autre part, si $z_1, z_2 \in H'_x \cap H''_x$, $z_2 = z_1.\gamma$: puisque $z_1, z_2 \in H'_x$ (resp. H''_x) $\gamma \in G'$ (resp. G'') de sorte que $\gamma \in \Gamma$ et réciproquement; donc $H'_x \cap H''_x = z_1.\Gamma$.

Supposons, pour simplifier l'exposé, que $p(H' \cap H'') = X$; alors $K = H' \cap H''$ satisfait aux conditions 1° et 2° de la proposition (I, 3, 1) et pour que K soit un Γ-s.e.f.p. de H, il faut et suffit qu'il admette des sections locales au voisinage de tout $x \in X$. Soit U un ouvert de X muni de sections locales σ' (resp. σ'') de H' (resp. H''); on a

$$\sigma''(x) = \sigma'(x).g(x) \quad x \in U$$

où $x \rightarrow g(x)$ est une application continue de U dans G, à valeurs dans $G'.G''$ puisque $H'_x \cap H''_x \neq \emptyset$. Si K est un s.e.f.p., U admet un recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}$ muni de sections locales ρ_α de K au-dessus de U_α : ρ_α est aussi une section locale de $H' \supset K$ (resp. H''), de sorte qu'il existe une fonction continue g'_α (resp. g''_α), $U_\alpha \rightarrow G'$ (resp. G''), telle que

$$\rho_\alpha(x) = \sigma'(x).g'_\alpha(x) = \sigma''(x).g''^{-1}_\alpha(x) \quad x \in U_\alpha$$

d'où

$$(1) \qquad g(x) = g'_\alpha(x) . g''_\alpha(x).$$

Réciproquement, si U admet un recouvrement $\{U_\alpha\}$ muni de fonctions continues g'_α(resp. g''_α) à valeurs dans G′ (resp. G″) satisfaisant à (1) on a dans U_α

$$\sigma''(x) = \sigma'(x) . g'_\alpha(x) . g''_\alpha(x)$$

de sorte que

$$\rho_\alpha(x) = \sigma'(x) . g'_\alpha(x) = \sigma''(x) . g''^{-1}_\alpha(x)$$

est une section locale commune à H′ et H″ au-dessus de U_α, c'est-à-dire une section locale de K. Ceci nous conduit à poser

Définition I, 4, 1. — *Une application continue f d'un espace topologique* Y *dans le groupe topologique* G *à valeurs dans* G′.G″ (G′ *et* G″ *sous-groupes de* G) *est dite* localement factorisable *dans* G′.G″ *s'il existe un recouvrement ouvert* $\{Y_\alpha\}$ *de* Y *muni d'applications continues* g'_α (*resp.* g''_α) *de* Y_α *dans* G′ (*resp.* G″) *telles que, pour* $y \in Y_\alpha$, *on ait* $f(y) = g'_\alpha(y) . g''_\alpha(y)$.

Nous avons établi

Proposition I, 4, 2. — *Soient* H′(X, G′) *et* H″(X, G″) *des s.e.f.p. de* H(X, G) *et* $\{U_A\}$ *un recouvrement ouvert de* X *muni de sections locales* σ'_A (*resp.* σ''_A) *de* H′ (*resp.* H″), *liées par* $\sigma''_A(x) = \sigma'_A(x) . g_A(x)$. *Pour que* $K = H' \cap H''$ *soit un s.e.f.p. de* H, *il faut et suffit que les fonctions* g_A *prennent leurs valeurs dans* G′.G″ *et soient localement factorisables.*

Il en sera toujours ainsi, sous la seule réserve que

$$p(H' \cap H'') = X,$$

si G′ et G″ satisfont à la propriété suivante.

Définition I, 4, 2. — *Un couple* G′, G″ *de sous-groupes du groupe topologique* G *est dit* régulier *si toute application continue d'un espace topologique dans* G, *à valeurs dans* G′.G″, *est localement factorisable.*

Proposition I, 4, 3. — *Étant donnés un groupe topologique* G *et deux sous-groupes* G′ *et* G″, *pour que l'intersection d'un* G′-*s.e.f.p.* H′ *et d'un* G″-*s.e.f.p.* H″ *d'un e.f.p.* H(X, G) *soit un s.e.f.p., dès que* $p(H' \cap H'') = X$ — et ceci quels que soient

X, H, H', H'' — *il faut et suffit que le couple* G', G'' *soit un couple régulier de sous-groupes de* G.

La condition, suffisante d'après la proposition (I, 4, 2), est nécessaire en effet soient donnés un espace topologique X et une fonction continue $g: X \to G'.G''$; soient $H = X \times G$, $\sigma'(x) = (x, e)$; σ' est une section de H et $H'(X, G') = \bigcup_{x \in X} \sigma'(x).G'$ un s.e.f.p. (prop. I, 3, 1). σ'' défini par $\sigma''(x) = \sigma'(x).g(x)$ est une section de H, et $H''(X, G'') = \bigcup_{x \in X} \sigma''(x).G''$ un s.e.f.p. Alors, $p(H' \cap H'') = X$ puisque $g(x) \in G'.G''$ quel que soit $x \in X$. Si $H' \cap H''$ est un s.e.f.p., d'après la proposition (I, 4, 2) g est localement factorisable : X et g étant arbitraires la proposition est établie.

Nous allons chercher maintenant dans quelles conditions un couple de sous-groupes est régulier. Soit G', G'' un couple régulier de sous-groupes du groupe topologique G; l'application identique de G'.G'' est, en particulier, localement factorisable, et il existe un recouvrement ouvert $\{\mathcal{O}_\alpha\}$ de G'.G'' et des applications continues g'_α (resp. g''_α) de $\mathcal{O}_\alpha$ dans G' (resp. G'') telles que, pour $g \in \mathcal{O}_\alpha$, on ait

$$g = g'_\alpha(g).g''_\alpha(g).$$

Alors soit f une application continue de l'espace topologique Y dans G'.G'', les $Y_\alpha = f^{-1}(\mathcal{O}_\alpha)$ forment un recouvrement ouvert de Y muni des applications continues $\overline{g'_\alpha} = g'_\alpha \circ f$ (resp. $\overline{g''_\alpha} = g''_\alpha \circ f$) dans G' (resp. G''), et, pour $y \in Y_\alpha$ $f(y) = \overline{g'_\alpha}(y).\overline{g''_\alpha}(y)$. C'est-à-dire que le couple G', G'' est régulier dès que l'application identique de G'.G'' est localement factorisable.

G'.G'' est un sous-espace saturé de G pour la relation d'équivalence à gauche modulo G'' et, si l'application canonique π de G sur G/G'' est une fibration, G'.G'' admet par restriction à $B = \pi(G'.G'')$ de la structure fibrée de G, une structure fibrée principale de groupe G''. Soit V un ouvert de B muni d'une section locale s, $y \to s(y) \in G'.G''$; le couple G', G'' étant régulier s est localement factorisable, et, localement dans V,

$$s(y) = g'(y).g''(y), \qquad g'(y) \in G', \qquad g''(y) \in G''$$

les fonctions g' et g'' étant continues. Or,

$$y = \pi(s(y)) = \pi(g'(y).g''(y)) = \pi(g'(y))$$

de sorte que g' est une section locale à valeurs dans G'. Réciproquement, supposons que la structure fibrée de $G'.G''$ admette dans un voisinage U de $y_0 = \pi(e)$ une section locale s à valeurs dans G', dont on peut supposer que $s(y_0) = e$. Il existe une telle section au voisinage de tout $y_1 \in B$. En effet, $y_1 = \pi(g'_1.g''_1) = \pi(g'_1)$ $(g'_1 \in G', \ g''_1 \in G'')$ et la translation à gauche $g \to g'_1.g$ est un homéomorphisme de G qui conserve $G'.G''$ et dont la restriction à $G'.G''$, qui est muni de la topologie induite, est encore un homéomorphisme; de même l'application $y \to g'_1.y (y \in B)$ est un homéomorphisme de B. $V = g'_1.U$ est un voisinage de y_1 et l'application de V dans $G'.G''$

$$y \in V \to g_1'^{-1}.y \in U \to s(g_1'^{-1}.y) \to g'_1.s(g_1'^{-1}.y) = t(y)$$

est continue et à valeurs dans G'. Comme

$$\pi(t(y)) = g'_1.\pi(s(g_1'^{-1}.y)) = g'_1.(g_1'^{-1}.y) = y$$

t est la section locale annoncée au-dessus de V. Alors l'application Φ_V de $V \times G''$ sur $\pi^{-1}(V)$

$$(y, \ g'') \to t(y).g'', \qquad y \in V, \quad g'' \in G''$$

est une carte locale de la structure fibrée de $G'.G''$, de sorte qu'il existe une fonction continue g''_V sur $\pi^{-1}(V)$ à valeurs dans G'', telle que

$$g = \Phi_V(\pi(g), \ g''_V(g)) = t(\pi(g)).g''_V(g), \quad g \in \pi^{-1}(V)$$

t prenant ses valeurs dans G', ceci signifie que l'application identique de $G'.G''$ est factorisable dans $\pi^{-1}(V)$, et, les $\pi^{-1}(V)$ recouvrant $G'.G''$, que le couple G', G'' est régulier. Ainsi :

Proposition I, 4, 4. — *Pour qu'un couple* G', G'' *de sous-groupes du groupe topologique* G *soit régulier, il faut et suffit que l'application identique de* $G'.G''$ *soit localement factorisable. Si l'un des sous-groupes* G'' (*resp.* G') *est* (L.T.), *il faut et suffit que la fibration de* $G'.G''$ *par les classes à gauche modulo* G'' (*resp. à droite modulo* G') *admette une section locale à valeurs dans* G' (*resp.* G'').

Cette dernière condition exprime que la restriction π' de π à G' admet des relèvements locaux. Soit $x \in B$, $g' \in \pi'^{-1}(x)$, $g'_1 \in \pi'^{-1}(x)$; alors $g'_1 = g'.g''$, $g'' \in G''$ d'où $g'' \in G' \cap G'' = \Gamma$; comme réciproquement, $\pi'(g'.\Gamma) = \pi'(g') = y$, $\pi'^{-1}(y) = g'.\Gamma$

$(y \in \mathrm{B})$ est une classe à gauche modulo Γ. Ainsi se trouve définie une application biunivoque f' de G'/Γ sur B par

$$f'(g'.\Gamma) = \pi'(g') = g'.\mathrm{G}''$$

de sorte que, si q est l'application canonique de G' sur G'/Γ, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{G}' \arrow[dl, "\pi'"'] \arrow[dr, "q"] & \\ \mathrm{B} & & \mathrm{G}'/\Gamma \arrow[ll, "f'"'] \end{tikzcd}$$

q étant ouverte et π' continue, f' est continue. Si σ est un relèvement de π' au-dessus de $\mathrm{V} \subset \mathrm{B}$, $\sigma \circ f'$ est un relèvement de q au-dessus de $f'^{-1}(\mathrm{V})$ ouvert de G'/Γ, de sorte que q est une fibration. Réciproquement, si q admet des relèvements locaux, et si de plus f' est un homéomorphisme, ce que l'on ne peut en général affirmer, π' admettra des relèvements locaux et le couple G', G'' sera régulier. On en déduit, f'' désignant l'application biunivoque de G''/Γ sur $\mathrm{G}'.\mathrm{G}''/\mathrm{G}'$ définie de façon analogue à f' :

Théoreme I, 4. — *Pour qu'un couple* G', G'' *de sous-groupes* (L.T.) *d'un groupe topologique* G *soit régulier, il faut que* $\Gamma = \mathrm{G}' \cap \mathrm{G}''$ *soit un sous-groupe* (L.T.) *de* G' *et* G''. *Si l'une des applications* f' *ou* f'' *définies ci-dessus est un homéomorphisme, cette condition est suffisante; il en est ainsi en particulier dans les deux cas suivants :*

1° G' (*ou* G'') *est ouvert dans G*, 2° G'/Γ (*ou* G''/Γ) *est compact.*

Pour achever la démonstration, il reste à montrer que f' ou f'' est bicontinue dans les deux cas indiqués : montrons-le pour f'.

1° pour que f'^{-1} soit continue, il faut et suffit que π' soit ouverte, ou encore que le saturé par G'' d'un ouvert de G' soit ouvert dans $\mathrm{G}'.\mathrm{G}''$: ce sera le cas si un ouvert de G' est un ouvert de G, c'est-à-dire si G' est ouvert dans G. 2° G'' étant un sous-groupe (L.T.) de G est fermé, donc G/G'' et $\mathrm{B} \subset \mathrm{G}/\mathrm{G}''$ sont séparés; alors si G'/Γ est compact, f' application biunivoque continue d'un compact sur un espace séparé est bicontinue.

5. — Espaces fibrés principaux et sous-espaces dans le cas différentiable.

Différentiable signifiera toujours « d'une classe de différentiabilité arbitraire — y compris analytique — compatible avec les données », la classe n'étant précisée qu'en cas de nécessité.

Définition I, 5, 1. — *Un espace fibré principal différentiable* (*resp. un e.f. différentiable*) *est défini par la définition* (I, 1, 1) (*resp.* I, 1, 2) *où l'on suppose de plus que la base* X, *ainsi que les composantes connexes de* H *et* F *sont des variétés différentiables, et* G *un groupe de Lie*; *toutes les applications intervenant dans la définition sont différentiables*; *les homéomorphismes sont différentiables et réguliers* (*à Jacobien* $\neq 0$).

Remarque I, 5. — Soient H un *ensemble* muni d'une projection p sur la variété différentiable X, $\mathfrak{R}$ un recouvrement ouvert de X et pour tout $U \in \mathfrak{R}$ une application biunivoque Φ_U de $U \times G$ sur $p^{-1}(U)$ telle que

a) $p \circ \Phi_U(x, g) = x$, $x \in U$, $g \in G$.

b) pour tout couple $U \in \mathfrak{R}$, $V \in \mathfrak{R}$, $U \cap V \neq \emptyset$ il existe une fonction différentiable $s_{u,v}$ sur $U \cap V$ à valeurs dans G telle que

$$\Phi_V^{-1} \circ \Phi_U(x, g) = (x, s_{u,v}(x) \cdot g).$$

Alors, il existe une structure unique d'e.f.p. différentiable H(X, G) de projection p, telle que les Φ_U soient des cartes locales.

Les constructions du paragraphe I, 2 (e.f.p. associé, modelé, quotient par un sous-groupe fermé du groupe structural, produit fibré) conduisent à des e.f. différentiables; le théorème de surfibration (prop. I, 2, 2) est valable pour des sous-groupes fermés $G'' \subset G' \subset G$ sans hypothèse supplémentaire, les espaces et applications du diagramme étant tous différentiables. Enfin, les homomorphismes d'e.f.p. sont définis comme au paragraphe (I, 3), f étant simplement supposée différentiable et régulière.

Toutefois, la notion la plus naturelle de s.e.f.p. différentiable diffère de celle de s.e.f.p. dans le cas topologique (déf. I, 3, 1)

dans la mesure où une sous-variété diffère d'un sous-espace : elle est en général munie d'une topologie différente de la topologie induite. D'une façon précise, *sous-variété* désignera dans la suite une variété régulièrement plongée sans point double ([6]) et l'on dira qu'une *sous-variété est propre* si sa topologie coïncide avec la topologie induite. De même nous appellerons *sous-groupe de Lie* d'un groupe de Lie G, un sous-groupe abstrait G′ de G qui soit lui-même un groupe de Lie et dont la composante connexe de l'identité G'_0 (pour la topologie propre de G′) est un sous-groupe analytique de G ([7]); si G′ est une sous-variété propre de G, G′ est alors un *sous-groupe de Lie propre.*

Définition I, 5, 2. — *Soient* H(X, G) *un e.f.p. différentiable et* G′ *un sous-groupe de Lie de* G. *Un* G′*-s.e.f.p. différentiable de* H(X, G) *est un e.f.p. différentiable* H′(X, G′) *dont*

a) *la variété différentiable sous-jacente* H′ *est une sous-variété de* H (ou si H et H′ ne sont pas connexes, chaque composante connexe de H′ est une sous-variété d'une composante connexe de H.),

b) *la projection p′ est la restriction à* H′ *de la projection p,*

c) *la translation à droite par* $g' \in$ G′ *est la restriction à* H′ *de la translation à droite* $D_{g'}$, *opérant sur* H.

Dans cette définition, G′ est muni d'une structure déterminée de sous-groupe de Lie de G associée à une topologie $\mathfrak{T}$; soit $\mathfrak{T}_1$, une topologie moins fine que $\mathfrak{T}$ pour laquelle G′ est encore un sous-groupe de Lie de G et soit ρ l'homomorphisme identique de G′ muni de $\mathfrak{T}$ sur G′ muni de $\mathfrak{T}_1$ (noté G'_1) : c'est un homomorphisme continu de groupes de Lie, donc analytique. *Il existe sur* H′ *une structure unique d'e.f.p. différen-*

([6]) On peut prendre, par exemple, la définition donnée par Chevalley ([11], p. 85, déf. 1) pour les sous-variétés analytiques, en supposant les données simplement différentiables.

([7]) On peut déduire d'un théorème de Yamabe [27] sur les sous-groupes connexes par arcs d'un groupe de Lie la construction de toutes les topologies d'un sous-groupe abstrait G′ de G pour lesquelles il est sous-groupe de Lie de G : ces topologies correspondent biunivoquement aux sous-groupes distingués K de G′ connexes par arcs dans G; K étant donné, la topologie correspondante $\mathfrak{T}(G', K)$ de G′ admet pour système fondamental de voisinages de l'identité *e* les composantes connexes par arcs de *e* dans les voisinages ouverts de *e* pour la topologie induite sur K. Une de ces topologies est moins fine que toutes les autres : celle qui s'obtient en prenant pour K la composante connexe par arcs de *e*, G'_0 de G′ pour la topologie induite. Cette dernière coïncide en particulier avec la topologie induite si G′ est fermé.

tiable $H'(X, G'_1)$ *telle que l'application identique de* H' *soit un homomorphisme d'e.f.p. différentiables compatibles avec* ρ *de* $H'(X, G')$ *sur* $H'(X, G'_1)$, *et pour cette structure* H' *est encore un s.e.f.p. différentiable de* H. Soit en effet $\{\Phi_U\}$ une famille de cartes couvrant H' pour la structure $H'(X, G')$: pour que l'application identique f de H' soit un homomorphisme, il faut que les Φ_U — exactement les $f \circ \Phi_U$ — soient encore des cartes pour $H'(X, G'_1)$ car on doit avoir

$$f \circ \Phi_U(x, g) = f[\Phi_u(x, e) . g] = f[\Phi_U(x, e)] . g.$$

Comme f est différentiable, $f[\Phi_u(x, e)]$ est une section locale différentiable sur U de $H(X, G'_1)$ et

$$\Phi_{1,U} : \qquad (x, g) \to f[\Phi_u(x, e)] . g$$

doit alors être une carte locale d'après l'axiome *d*) de la définition (I, 1, 1). Or, si $s_{U,V}$ est la fonction sur $U \cap V$ à valeurs dans G', associée au changement de coordonnées locales $\Phi_V^{-1} \circ \Phi_U = \Phi_{1,V}^{-1} \circ \Phi_{1,U}$ (cf. remarque I, 5, 1) c'est encore une application différentiable dans G'_1 puisque ρ est analytique, de sorte que les cartes $\{\Phi_{1,U}\}$ définissent effectivement sur H' une structure $H'(X, G'_1)$. Pour montrer que $H'(X, G'_1)$ est un s.e.f.p. différentiable de H, il reste à montrer que H' muni de la structure différentiable sous-jacente à $H'(X, G'_1)$ est une sous-variété; soit j l'application identique de H' dans H; l'application σ_U de U dans H définie par $\sigma_U(x) = j \circ \Phi_U(x, e)$ est une section locale différentiable de H et

$$\tilde{\Phi}_U : \qquad (x, g) \to \sigma_U(x) . g \quad x \in U, \; g \in G$$

est une carte locale de H dont la restriction à $U \times G'$ est $j \circ \Phi_U$, d'après l'axiome *c*) de la définition (I, 5, 2). Dans les cartes Φ_U (ou $\Phi_{1,U}$) et $\tilde{\Phi}_U$, j est l'application

$$(x, g') \in U \times G' \to (x, g') \in U \times G$$

application qui est différentiable et régulière aussi bien pour G'_1 que pour G', puisque G'_1 est un sous-groupe de Lie de G. Ceci achève la démonstration. Les cartes associées Φ_U et $\tilde{\Phi}_U$ montrent de plus, puisque $p'^{-1}(U)$ (resp. $p^{-1}(U)$) est un ouvert de $H'(X, G')$ (resp. de $H(X, G)$), que H' est une sous-variété propre de H si et seulement si G' est un sous-groupe de Lie propre de G.

En particulier, en prenant pour $\mathcal{T}_1$ la moins fine des topologies de G′ pour lesquelles il est un sous-groupe de Lie de G [8], on obtient pour H′ *une structure minimale de s.e.f.p. différentiable de* H. Cette dernière topologie de G′ n'étant pas en général la topologie induite, l'e.f.p. topologique sous-jacent à $H'(X, G'_1)$ n'est pas en général un s.e.f.p. topologique de l'e.f.p. topologique sous-jacent à H. Comme le sous-espace H′ de H satisfait manifestement aux hypothèses de la proposition (I, 3, 1), les sections locales différentiables de $H'(X, G'_1)$ fournissant des relèvements locaux de p' continus pour la topologie induite, H′ admet aussi une structure de s.e.f.p. topologique de H : cette dernière coïncide avec la structure sous-jacente à $H'(X, G'_1)$ si et seulement si H′ est une sous-variété propre de H, ou G′ un sous-groupe de Lie propre de G. Il en est ainsi en particulier si H′ est fermé dans H, puisque d'après la proposition (I, 3, 2) G′ est alors fermé dans G. D'où :

Proposition I, 5, 1. — *Soit* H′(X, G′) un *s.e.f.p. différentiable de* H(X, G) *muni de sa structure minimale: pour que, sur* H′, *la structure d'e.f.p. topologique sous-jacente à* H(X, G′) *coïncide avec la structure de s.e.f.p. topologique de* H(X, G), *il faut et suffit que* G′ *soit un sous-groupe de Lie propre de* G (*ou, ce qui est équivalent, que* H′ *soit une sous-variété propre de* H); *on dira alors que* H′ *est un s.e.f.p. propre de* H; *il en est ainsi en particulier si* H′ *est fermé.*

Nous allons maintenant établir l'analogue de la proposition (I, 3, 1).

Proposition I, 5, 2. — *Soit* G′ *un sous-groupe de Lie de* G *et* H(X, G) *un e.f.p. différentiable. Pour qu'une partie* H′ *de* H *admette une structure de* G′*-s.e.f.p. de* G, *il faut et suffit que la restriction* p' *de* p *à* H′ *jouisse des propriétés suivantes* :

1° $p'(H') = X$.

2° $p'^{-1}(x) = z.G'$ si $z \in H'$ et $x = p.z$.

3° p' *admet des relèvements locaux qui sont des sections différentiables de* H.

Montrons que ces conditions sont suffisantes; soit $\mathfrak{R}$ un recouvrement ouvert de X, où chaque $U \in \mathfrak{R}$ est muni d'une section locale différentiable σ_U à valeurs dans H′. Pour $x \in U \cap V$,

[8] Voir note [7] page 27.

$U \in \mathfrak{R}$, $V \in \mathfrak{R}$, $\sigma_U(x) = \sigma_V(x) . s_{U,V}(x)$; $s_{U,V}$ est une application différentiable de $U \cap V$ dans G, qui d'après l'hypothèse 2° prend ses valeurs dans G′ : c'est une application différentiable dans G′[9]. Soit Φ_U l'application de $U \times G'$ sur $p'^{-1}(U)$:

$$\Phi_U(x, g') = \sigma_U(x) . g', \qquad g' \in G', \quad x \in U;$$

le changement de cartes $\Phi_V^{-1} \circ \Phi_U$ est l'application

$$(x, g') \to (x, s_{U,V}(x) . g'), \qquad x \in U, \quad g' \in G'$$

et par conséquent, la collection $\{\Phi_U\}$ définit sur H′ une structure d'e.f.p. différentiable H′(X, G′) de projection p'. Pour établir complètement la proposition il reste à établir que H′ est, avec cette structure, une sous-variété de H, ce qui découle de la considération des cartes de H associées aux mêmes sections σ_U de H.

Les sous-groupes G′ d'un groupe de Lie pour lesquels $G \to G/G'$ est une fibration analytique étant identiques à ses sous-groupes fermés, on déduit de la proposition (I, 5, 2) la proposition suivante par la même démonstration qui a permis d'établir la proposition (I, 3, 3) à partir de (I, 3, 1) :

Proposition I, 5, 3 [10]. — *Les s.e.f.p. différentiables* fermés *d'un e.f.p. différentiable* H(X, G) *correspondent biunivoquement aux sections différentiables des espaces* H/G′, *où* G′ *est un sous-groupe fermé quelconque de* G.

6. — Intersection des sous-espaces fibrés principaux différentiables fermés.

La même analyse qu'au début du paragraphe I, 4 conduit aux définitions et propositions suivantes :

Définition I, 6, 1. — *Une application différentiable d'une variété* Y *dans un groupe de Lie* G *à valeurs dans* G′.G″ (G′ *et* G″ *sous-groupes de Lie de* G) *est dite différentiablement localement factorisable dans* G′.G″, *si elle est localement factorisable au*

[9] Ceci découle du lemme (I, 6, 2) où G′ est considéré comme intégrale du système de Pfaff constitué par le champ de plans engendré par translation à gauche à partir de l'algèbre de Lie $\underline{G'}$ de G′.

[10] Cf. J. Frenkel [15], proposition 19, 2.

sens de la définition (I, 4, 1), *les facteurs* g'_α (*resp.* g''_α) *étant des applications différentiables dans* G′ (*resp.* G″).

Proposition I, 6, 1. — *Soient* H′(X, G′) *et* H″(X, G″) *des s.e.f.p. différentiables de* H(X, G) *et* $\{V_A\}$ *un recouvrement ouvert de* X *muni de sections locales différentiables* σ'_A *de* H′ (*resp.* σ''_A *de* H″) *liées par* $\sigma''_A(x) = \sigma'_A(x) . g_A(x)$ $(x \in V_A)$. *Pour que* K = H′ ∩ H″ *soit un s.e.f.p. différentiable de* H, *il faut et suffit que les fonctions* g_A *prennent leurs valeurs dans* G′.G″ *et soient différentiablement localement factorisables.*

Reprenons la démonstration de la proposition (I, 4, 2) avec ses notations et nos nouvelles hypothèses. Si l'on suppose K s.e.f.p. différentiable, ρ_α est une section locale différentiable de H à valeurs dans H′ (resp. H″) et les fonctions g'_α (resp. g''_α) des applications différentiables dans G à valeurs dans G′ (resp. G″) : alors g'_α (resp. g''_α) sont des applications différentiables dans G′ (resp. G″) [11] et g est donc différentiablement localement factorisable. La réciproque découle de la proposition (I, 5, 2).

Définition I, 6, 2. — *Un couple* G′, G″ *de sous-groupes de Lie de* G *est dit* générique *si toute application différentiable dans* G, *à valeurs dans* G′.G″ *est différentiablement localement factorisable.*

Proposition I, 6, 2. — *Étant donné un couple de sous-groupes de Lie* G′, G″ *de* G, *pour que l'intersection de deux s.e.f.p. différentiables* H′(X, G′) *et* H″(X, G″) *de l'e.f.p. différentiable* H(X, G) *soit un s.e.f.p. de* H *dès que* p(H′ ∩ H″) = X — et ceci quels que soient X, H, H′, H″ — *il faut et suffit que le couple* G′, G″ *soit un couple générique de sous-groupes de* G.

Nous allons maintenant établir des conditions suffisantes pour qu'un couple de sous-groupes fermés d'un groupe de Lie G soit générique. Nous aurons besoin, pour celà, du

Lemme I, 6, 1. — *Soient* V_n *une sous-variété propre d'une variété différentiable* W_m *et* g *une application différentiable d'une variété* U_p *dans* W_m *prenant ses valeurs dans* V_n : *alors* g *est une application différentiable de* U_p *dans* V_n.

En effet, si l'on suppose seulement que V_n est une sous-

[11] Cf. note (9) page 30.

variété pas nécessairement propre, pour tout $q \in V_n$ il existe un voisinage $\mathcal{O}$ sur V_n (pour la topologie propre de V_n) muni de coordonnées locales X^i ($i = 1, 2, \ldots, n$) et cubique pour ces coordonnées ($|X^i - X^i_0| < b$), et un voisinage $\mathcal{O}'$ sur W_m muni de coordonnées locales $z^\alpha(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$ et cubique pour les $z^\alpha(|z^\alpha - z^\alpha_0| < b)$, tels que $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ et que la restriction à $\mathcal{O}$ de l'application identique f de V_n dans W_m soit

$$z^i = X^i, \qquad z^{n+k} = 0. \quad (k = 1, \ldots, m - n).$$

Si de plus V_n est une sous-variété propre, tout ouvert de V_n étant la trace sur V_n d'un ouvert de W_m, on peut restreindre $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ de telle sorte que $\mathcal{O} = \mathcal{O}' \cap V_n$. Soit alors $r \in U_p$, $g(r) = q$, et g_1 l'application dans V_n définie par g. $g^{-1}(\mathcal{O}')$ étant un ouvert de U_p, il existe un voisinage ouvert ω de r sur U_p muni de coordonnées locales $x^a(a = 1, \ldots, p)$ tel que $g(\omega) \subset \mathcal{O}'$. Comme $g(\omega) \subset V_n$, $g(\omega) \subset V_n \cap \mathcal{O}' = \mathcal{O}$ et la restriction de g à ω s'exprime par

$$z^i = g^i(x^1, \ldots, x^p)\,(i = 1, \ldots, n); \qquad z^{n+k} = 0(k = 1, \ldots, m - n)$$

les fonctions g^i étant différentiable pour $|x^a - x^a_0| < b$. Alors $g_1(\omega) = g(\omega) \subset \mathcal{O}$, et la restriction de g_1 à ω s'exprime par

$$X^i = g^i(x^1, x^2, \ldots, x^p)\,(i = 1, 2, \ldots, n) \quad \text{c.q.f.d.}$$

Reprenons, avec les hypothèses actuelles, les notations de I, 4. La projection naturelle q de G' sur G'/Γ définit sur G' une structure d'e.f.p. analytique $G'(G'/\Gamma, \Gamma)$. Le fibré associé de fibre G'', Γ opérant sur G'' par translation à gauche, est l'e.f. analytique $G''(G')$ obtenu en prenant le quotient de $G'' \times G'$ par la relation d'équivalence ρ (déf. I, 2, 1) :

$$(g'', g') \sim (\gamma \cdot g'', g' \cdot \gamma^{-1}), \qquad g' \in G', \quad g'' \in G'', \quad \gamma \in \Gamma.$$

L'application de $G'' \times G'$ dans G

$$(g'', g') \to g' \cdot g''$$

passe au quotient puisque $(g'\gamma^{-1}) \cdot (\gamma g'') = g' \cdot g''$. Si α est l'application naturelle de $G'' \times G'$ sur $G''(G')$ l'application obtenue f de $G''(G')$ dans G

$$\alpha(g'', g') \to g' \cdot g''$$

est une bijection sur $G' . G''$, ce qui définit en particulier sur

cet ensemble une structure de variété analytique. Soit p la projection de $G''(G')$ sur sa base G'/Γ :

$$p\circ\alpha(g'', g') = q(g') = g'.\Gamma$$

d'où
$$f'\circ p\circ\alpha(g'', g') = f'(g'.\Gamma) = g'G''.$$

D'autre part $\pi\circ f\circ\alpha(g'', g') = \pi(g'g'') = g'.G''$, c'est-à-dire que

$$\pi\circ f = f'\circ p.$$

On a ainsi, i désignant l'injection de G' dans G, le diagramme commutatif

$$(\mathrm{D})\qquad \begin{tikzcd} & G''(G') \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G' \arrow[rru, "i"] \arrow[r, "q"'] & G'/\Gamma \arrow[r, "f'"] & G/G'' \end{tikzcd}$$

f' étant injective définit aussi sur son image $B = \pi(G'.G'')$ une structure de variété analytique. Nous allons montrer que f et f' *sont des applications analytiques partout régulières et que par suite* $G'.G''$ (*resp.* B) *est une sous-variété analytique de* G (*resp.* G/G'').

Soit $x_0 = q(e)$ et U un voisinage ouvert de x_0 muni d'une section analytique s de la fibration q, avec $s(x_0) = e$. Dans U, $f' = \pi\circ i\circ s$: c'est un produit d'applications analytiques et f' est analytique dans U. Nous noterons $\underline{\varphi}$ l'application linéaire tangente à une application φ, T_{x_0} l'espace vectoriel tangent à G'/Γ en x_0, $\underline{G}$ (resp. $\underline{G}'$, $\underline{G}''$, $\underline{\Gamma}$) les espaces tangents en e à G (resp. G', G'', Γ). Soit n la dimension de T_{x_0} ; de $q\circ s =$ identité de U découle que $\underline{s}(T_{x_0})$ est de dimension n et supplémentaire à $\underline{\Gamma}$; $\underline{i}$ étant injective, identifions $\underline{G}'$ et $\underline{i}(\underline{G}')$; $\underline{s}(T_{x_0}) \subset \underline{G}'$ entraîne $\underline{s}(T_{x_0}) \cap \underline{G}'' \subset \underline{G}' \cap \underline{G}'' = \underline{\Gamma}$ d'où $\underline{s}(T_{x_0}) \cap \underline{G}'' \subset \underline{s}(T_{x_0}) \cap \underline{\Gamma}$, qui est nul puisque $\underline{s}(T_{x_0})$ est supplémentaire à $\underline{\Gamma}$: donc $\underline{s}(T_{x_0}) \cap \underline{G}'' = 0$ et $\underline{G}''$ étant le noyau de $\underline{\pi}$, $\dim \underline{\pi}(\underline{s}(T_{x_0})) = \dim \underline{s}(T_{x_0}) = n$; c'est-à-dire, en revenant aux notations complètes, que $\underline{f}'(T_{x_0}) = \underline{\pi}\circ\underline{i}\circ\underline{s}(T_{x_0})$ est de dimension n. f' est donc régulière au point x_0. Par homogénéité, on en déduit que f' est partout analytique et régulière : en effet, G' opère à la fois sur G'/Γ et G/G'', transitivement sur G'/Γ, ses opérations étant des isomorphismes analytiques des deux espaces qui commutent avec f'.

A la section s de G' sur U est associée la carte analytique Φ de $G''(G')$ (cf. déf. I, 2, 1):

$$U \times G'' \to G''(G') \qquad (x, g'') \to \Phi(x, g'') = \alpha(g'', s(x))$$

d'où

$$(1) \qquad f \circ \Phi(x, g'') = s(x) . g''$$

ce qui montre que f est analytique dans l'ouvert $\Phi(U \times G'')$. Si T_e est l'espace tangent à $G''(G')$ au point $\Phi(x_0, e) = f^{-1}(e)$, il découle de (1)

$$(2) \qquad \underline{f}(T_e) = \underline{s}(T_{x_0}) + \underline{G}''.$$

Or, nous avons montré que $\underline{s}(T_{x_0})$ est transversal à $\underline{G}''$ et le second membre de (2) est une somme directe d'où

$$\dim \underline{f}(T_e) = \dim T_{x_0} + \dim \underline{G}'' = \dim G''(G')$$

ce qui montre que f est régulière au point $f^{-1}(e)$. D'autre part, comme $\underline{G}' = \underline{s}(T_{x_0}) + \underline{\Gamma}$ et $\underline{\Gamma} \subset G''$, on voit

$$(3) \qquad \underline{f}(T_e) = \underline{G}' + G''.$$

Enfin, pour montrer que f est partout analytique et régulière, nous montrerons que l'isomorphisme analytique φ de G

$$g \to \varphi(g) = g'_1 . g . g''_1 \quad g'_1 \in G', \quad g''_1 \in G'' \text{ fixés}, \quad g \in G$$

qui laisse $G'.G''$ invariant, induit sur $G''(G')$ un isomorphisme analytique. La restriction à $\Phi(U \times G'')$ de la transformation induite $f^{-1} \circ \varphi \circ f$ est définie d'après (1) par

$$(4) \quad f^{-1} \circ \varphi \circ f \circ \Phi(x, g'') = f^{-1} \circ \varphi(s(x) . g'') = f^{-1}(g'_1 . s(x) . g . g''_1).$$

Soient σ la section de $G' \to G'/\Gamma$ au-dessus de $V = g'_1 . U$

$$y \to \sigma(y) = g'_1 . s(g'^{-1}_1 . y)$$

et Ψ la carte associée de $G''(G')$

$$(y, g'') \to \Psi(y, g'') = \alpha(g'', \sigma(y)) \; y \in V, \quad g'' \in G''.$$

Alors, $f \circ \Psi(y, g'') = \sigma(y) . g''$ et si $x \in U$

$$(5) \quad f \circ \Psi(g'_1 . x, g'' . g''_1) = \sigma(g'_1 . x) . g'' . g''_1 = g'_1 . s(x) . g'' . g''_1.$$

En rapprochant (4) et (5) il vient

$$f^{-1} \circ \varphi \circ f \circ \Phi(x, g'') = \Psi(g'_1 . x, g'' . g''_1)$$

ce qui signifie que, dans les cartes analytiques Φ et Ψ de $G''(G')$, $f^{-1} \circ \varphi \circ f$ s'exprime par

$$(x,\ g'') \to (g'_1 . x,\ g''. g''_1)$$

qui est manifestement un isomorphisme analytique, c.q.f.d.

La proposition suivante nous servira à établir les deux théorèmes que nous avons en vue :

Proposition I, 6, 3. — *Toute application différentiable dans* $G'.G''$, *muni de la structure analytique qui vient d'être définie, est différentiablement localement factorisable.*

Une telle application h est une application différentiable d'une variété W dans $G''(G')$. Soit $\{\mathcal{O}_a\}$ un recouvrement ouvert de G'/Γ, chaque $\mathcal{O}_a$ étant muni d'une section locale analytique σ_a de $G' \to G'/\Gamma$, et $G''(G')$ de la carte associée Ψ_a

$$(x,\ g'') \to \Psi_a(x,\ g'') = \alpha(g'',\ \sigma_a(x)), \qquad x \in \mathcal{O}_a, \quad g'' \in G''.$$

Les $W_a = h^{-1} \circ p^{-1}(\mathcal{O}_a)$ constituent un recouvrement ouvert de W; la restriction h_a de h à W_a est une application différentiable dans $p^{-1}(\mathcal{O}_a)$, c'est-à-dire qu'il existe des applications différentiables x_a de W_a dans $\mathcal{O}_a$ (resp. g''_a de W_a dans G'') telles que

$$h_a(z) = \Psi_a(x_a(z),\ g''_a(z)) \qquad \text{pour} \qquad z \in W_a.$$

Alors, $f(h_a(z)) = f[\alpha(g''_a(z)),\ \sigma_a(x_a(z))] = \sigma_a(x_a(z)) . g''_a(z)$, σ_a étant une application analytique dans G', $g'_a = \sigma_a \circ x_a$ est une application différentiable dans G', ce qui établit la proposition.

Considérons à nouveau le diagramme (D); p et π étant des applications ouvertes, et l'image par f d'un ensemble saturé pour p étant saturée pour π, il est évident que, si f est un homéomorphisme (sur un sous-espace) il en est de même de f'. Réciproquement supposons que f' est un homéomorphisme; soit s une section de $G' \to G'/\Gamma$ au-dessus d'un ouvert U; $V = f'(U)$ est un ouvert relatif de $B = \pi(G'.G'')$ et $\sigma = i \circ s \circ f'^{-1}$ est un relèvement de π au-dessus de V continu pour la topologie induite; c'est donc une section locale de la restriction à B de l'e.f.p. topologique sous-jacent à $G \to G/G''$; dans les cartes locales associées à s et σ, f se traduit par

$$(x,\ g'') \to (f'(x),\ g'') \quad x \in U,\ g'' \in G''$$

et par suite f est un homéomorphisme. Lorsque f et f' sont

ainsi des homéomorphismes, $G'.G''$ est une sous-variété propre de G et (lemme I, 6, 1) une application différentiable g d'une variété W dans G, à valeurs dans $G'.G''$ est une application différentiable dans $G'.G''$ (exactement, $h = f^{-1} \circ g$ est une application différentiable dans $G''(G')$) : par suite de la proposition (I, 6, 3) g est différentiablement localement factorisable. Nous avons démontré :

Théorème I, 6, 1. — *Soient* G' *et* G'' *des sous-groupes fermés du groupe de Lie* G. *Si* $G'.G''$ *est une sous-variété propre de* G, *le couple* G', G'' *est générique; il en est ainsi en particulier dans les deux cas suivants :*

1° G' (*ou* G'') *est ouvert dans* G, 2° G'/Γ (*resp.* G''/Γ) *est compact.*

Les doubles classes $V_g = G'.g.G''$ ($g \in G$) sont aussi des sous-variétés analytiques de G puisque $V_g = g.(g^{-1}.G'.g).G''$. L'espace tangent en e à $(g^{-1}.G'.g).G''$ est d'après la formule (3) $\underline{(\mathrm{adj}\ g^{-1})G'} + \underline{G''}$, et l'espace tangent en g à V_g est donc

$$(6)\quad T_g = \underline{L_g}\,(\underline{\mathrm{adj}\,g^{-1}}.\underline{G'} + \underline{G''})$$
$$= \underline{D_g}.\underline{G'} + \underline{L_g}.\underline{G''} = \underline{G'}.g + g.\underline{G''}$$

avec des notations qui sont claires. Elles constituent un feuilletage analytiques $\mathcal{F}$ de V. Un point $g_0 \in G$ sera dit *régulier pour le feuilletage* $\mathcal{F}$ s'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{O}$ de g_0 tel que $\dim V_g = \dim V_{g_0}$, ou $\dim T_g = \dim T_{g_0}$, pour $g \in \mathcal{O}$. L'ensemble Ω des points réguliers est donc un ouvert. Il est saturé pour le feuilletage $\mathcal{F}$ car, si g_0 est régulier et $g_1 \in Vg_0$, il existe $g'_1 \in G'$ et $g''_1 \in G''$ tels que $g_1 = g'_1 . g_0 g''_1$; $\mathcal{O}_1 = g'_1.\mathcal{O}.g''_1$ est un voisinage ouvert de g_1 et, pour $g_2 \in \mathcal{O}_1$ il existe $g \in \mathcal{O}$ tel que $g_2 = g'_1.g.g''_1$ de sorte que $V_{g_2} = V_g$ et

$$\dim V_{g_2} = \dim V_{g_0} = \dim V_{g_1}.$$

La condition de régularité équivaut d'après (6) à

$$\dim \underline{(\mathrm{adj}\,g^{-1})}\,\underline{G'} \cap \underline{G''} = \dim \underline{(\mathrm{adj}\,g_0^{-1})}\,\underline{G'} \cap \underline{G''} \quad \text{pour} \quad g \in \mathcal{O}.$$

$\underline{(\mathrm{adj}\,g^{-1})}\,\underline{G'}$ dépend analytiquement de g; par conséquent une base étant choisie dans $\underline{G}$, la condition précédente signifie que le rang $r(g)$ d'un certain système linéaire homogène S, dont les coefficients sont des fonctions analytiques sur G est constant dans $\mathcal{O}$. Alors les mineurs d'ordre $r(g_0) + 1$ de S

sont des fonctions analytiques sur G nulles sur un ouvert $\mathcal{O}$: ils sont donc identiquement nuls sur la composante connexe C_{g_0} de G, de sorte que pour tout $g \in C_{g_0}$, on a $r(g) \leqslant r(g_0)$. Si $g_1 \in C_{g_0}$ est régulier, le même raisonnement montre que $r(g) \leqslant r(g_1)$ pour $g \in C_{g_0}$. Ces deux inégalités entraînent $r(g_0) = r(g_1)$, c'est-à-dire que, si g_0 est régulier

$$r(g_0) = \sup_{g \in C_{g_0}} r(g) = \rho \tag{7}$$

soit

$$\dim (\underline{\mathrm{adj}\, g_0^{-1}})\underline{G}' \cap \underline{G}'' = \inf_{g \in C_{g_0}} \dim (\underline{\mathrm{adj}\, g^{-1}})\underline{G}' \cap \underline{G}''. \tag{8}$$

Inversement, si g_0 satisfait à (7), il y a en g_0 un mineur de S d'ordre ρ qui n'est pas nul : ce mineur est différent de zéro dans un voisinage ouvert $\mathcal{O} \subset C_{g_0}$ de g_0, de sorte que, pour $g \in \mathcal{O}$, $r(g) \geqslant \rho$ et par suite de (7), $r(g) = \rho$. Il y a donc identité entre les points de $C_{g_0} \cap \Omega$ et ceux qui satisfont à (7) : ceci montre que Ω n'est pas vide, et que le complémentaire dans C_{g_0} de $C_{g_0} \cap \Omega$ est l'ensemble des zéros des mineurs d'ordre ρ de S, fonctions analytiques sur C_{g_0} non toutes identiquement nulles : $C_{g_0} \cap \Omega$ est donc dense dans C_{g_0}, et Ω partout dense dans G.

Supposons $e \in \Omega$: alors $G'.G'' \subset \Omega$ et Ω est un voisinage ouvert de $G'.G''$. Supposons aussi pour simplifier l'exposé que Ω et $G'.G''$ sont connexes — sinon les mêmes raisonnements s'appliquent aux composantes connexes — Ω ouvert connexe de G est une variété analytique dont $G'.G''$ est une sous-variété, et les $V_g\,(g \in \Omega)$ et leurs plans tangents T_g ont tous la même dimension. Comme d'après la formule (6) T_g dépend analytiquement de g, le champ de plans T, $g \in \Omega \to T_g$ définit sur Ω un système de Pfaff analytique complètement intégrable dont les V_g, et en particulier $V_e = G'.G''$, sont les intégrales maximales. Or,

Lemme I, 6, 2. — *Soient* T *un système de Pfaff analytique sur une variété analytique* Ω *et* V *une variété intégrale de* T *dénombrable à l'infini. Si* h *est une application différentiable de classe* $C^s (s = 1, 2, \ldots, \infty, \omega)$ *d'une variété* W *dans* Ω, *à valeurs dans* V : *alors* h *est une application différentiable* C^s *dans* V.

Cette proposition est démontrée dans Chevalley [11] (ch. III, § 9, p. 94, prop. 1) pour $s = \omega$: elle s'étend sans change-

ment pour s quelconque. G étant connexe est dénombrable à l'infini et sa sous-variété $G'.G''$ l'est aussi (ibid., prop. 2) : on peut donc appliquer le Lemme (I, 6, 2) à $V = G'.G''$; une application h différentiable C^s de W dans G à valeurs dans $G'.G''$ est une application différentiable dans Ω, et par suite dans $G'.G''$; la proposition (I, 6, 3) montre alors que h est différentiablement localement factorisable.

Enfin, soient $g_1 \in G$, et le couple de sous-groupes fermés $g_1^{-1}.G'.g_1$, G''; Soient V^1 les doubles classes, $\mathcal{F}^1$ le feuilletage et T^1 le champ de plans définis à partir de ce couple; $\mathcal{F}^1$ et T^1 se déduisent de $\mathcal{F}$ et T par translation à droite par g_1^{-1}

$$V^1_g = (g_1^{-1}.G'g_1).g.G'' = g_1^{-1}.V_{g_1g} \qquad \text{d'où} \qquad T^1_g = g_1^{-1}.T_{g_1g}.$$

Par suite, pour que e soit régulier pour $\mathcal{F}^1$, il faut et suffit que g_1 le soit pour $\mathcal{F}$. Ainsi se trouve établi :

Théorème I, 6, 2. — *Les couples de sous-groupes fermés du groupe de Lie* G *sont « presque toujours » génériques au sens suivant : soit* G', G'' *un couple de sous-groupes fermés; l'ensemble des* $g \in G$ *tels que le couple adj* $g^{-1}.G'$, G'' *soit générique contient un ouvert partout dense dans* G. *Pour que ce couple soit générique, il suffit que* g *soit régulier pour le feuilletage de* G *par les doubles classes* $G'.g.G''$.

Exemples. — Soient r, r', r'', les dimensions de G, G', G''. La condition de régularité est sûrement réalisée au point e si

a) en utilisant la condition (8), $\dim \underline{G'} \cap \underline{G''} = 0$ c'est-à-dire si $\Gamma = G' \cap G''$ est discret;

b) en utilisant la condition (7), $r(e) = (r - r') + (r - r'')$ soit $r' + r'' - (r - r(e)) = r$ c'est-à-dire

$$\dim \underline{G'} + \dim \underline{G''} - \dim \underline{G'} \cap \underline{G''} = \dim \underline{G}$$
$$\text{ou} \quad \dim (\underline{G'} + \underline{G''}) = \dim \underline{G} \quad \text{ou} \quad \underline{G'} + \underline{G''} = \underline{G};$$

c) l'un des groupes G'(ou G'') est distingué, auquel cas $(\underline{\text{adj } g^{-1}.G'}) \cap \underline{G''} = \underline{G'} \cap \underline{G''}$ à une dimension constante et $\Omega = G$;

d) $\Gamma = G' \cap G''$ est distingué, car alors $G' \supset \Gamma$ entraîne $\underline{(\text{adj } g^{-1})G'} \supset \underline{\Gamma}$, d'où $(\underline{\text{adj } g^{-1})G'} \cap \underline{G''}) \supset \underline{\Gamma}$ et

$$\dim \underline{(\text{adj } g^{-1})G'} \cap \underline{G''} \geqslant \dim (\underline{\Gamma} = \underline{G'} \cap \underline{G''})$$

qui entraîne la régularité de e d'après (8).

Remarque. — Le critère de généricité donné par le théorème (I, 6, 3) n'est nullement nécessaire. Soient par exemple [12], $G = CL_m$, $G'' = L_m$, $G' = CL(n_1, n_2)$ groupe des matrices

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \quad A \in CL_{n_1} \quad B \in CL_{n_2} \quad (n_1 + n_2 = m).$$

On voit facilement que le point e n'est pas régulier pour le feuilletage $\mathcal{F}$ associé au couple G', G''; pourtant

Proposition I, 6, 4. — *Le couple* L_m, $CL(n_1, n_2)(m = n_1 + n_2)$ *est un couple générique de sous-groupes de* CL_m.

Remarquons d'abord que, pour qu'un couple G', $G'' \subset G$ soit générique, il suffit qu'il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de e dans $G'.G''$ pour la topologie induite tel que toute application différentiable dans G à valeurs dans $\mathcal{O}$ soit localement différentiablement factorisable : en effet, si f est une application différentiable de Y dans G à valeurs dans $G'.G''$ et si $g'_1 . g''_1 \in f(Y)$ $V = g'_1 . \mathcal{O} . g''_1$ est un voisinage de $g'_1 . g''_1$ et $W = f^{-1}(V)$ un ouvert de Y. Soit φ la restriction de f à W et $\psi = L_{g'_1}^{-1} \circ D_{g''_1}^{-1} \circ \varphi$: c'est une application différentiable dans G à valeurs dans $\mathcal{O}$; il existe donc deux fonctions différentiables g' (resp. g'') sur W à valeurs dans G' (resp. G'') telles que, pour $y \in W$, $\psi(y) = g'(y) . g''(y)$. Alors, $\varphi(y) = g'_1 . g'(y) . g''_1(y) . g''$ ce qui montre que φ est différentiablement factorisable. Comme les voisinages W recouvrent Y, f est différentiablement localement factorisable et le couple G', G'' générique.

Revenons au cas où les groupes sont ceux qui ont été indiqués au début de cette remarque. L'ensemble $\mathcal{O}$ des matrices

$$g = \begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix} \in CL_m \qquad \text{où} \qquad C \in CL_{n_1} \quad \text{et} \quad F \in CL_{n_2}$$

est un voisinage de l'identité. Soit f une application différentiable dans G à valeurs dans $\mathcal{O} \cap G'.G''$: $f(y) = \begin{pmatrix} C(y) & D(y) \\ E(y) & F(y) \end{pmatrix}$, les quatre matrices partielles étant des fonctions différentiables.

[12] Nous utiliserons en général, pour les groupes classiques les notations de C. Chevalley [11]. Toutefois le groupe Gl (n, R) (resp. Gl (n, C)) sera noté L_n (resp. CL_n).

Quel que soit $y \in Y$, il existe $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \in CL(n_1, n_2)$ et $\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \in L_m$ telles que

$$\begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AP & BQ \\ AR & BS \end{pmatrix}$$

d'où $C = AP$ (P est donc une matrice régulière) et $E = AR$ de sorte que $C^{-1}E = P^{-1}R$ c'est-à-dire que $C^{-1}E$ est réelle. De même $F^{-1}D = S^{-1}Q$ est réelle. Or, on a

$$\begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & O \\ O & F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{n_1} & F^{-1}D \\ C^{-1}E & E_{n_2} \end{pmatrix}.$$

Au second membre, les deux matrices sont différentiables et appartiennent respectivement à $CL(n_1, n_2)$ et L_m ce qui établit la proposition.

CHAPITRE II

FORMES DIFFÉRENTIELLES A VALEURS DANS UN ESPACE VECTORIEL CONNEXIONS

Pour tout ce qui concerne ce chapitre, le lecteur pourra se reporter à A. Lichnerowicz [22] dont nous adoptons la plupart des définitions et des notations, ainsi qu'à A. Aragnol [1]. Nous pensons que l'emploi systématique des formes à valeurs vectorielles définies globalement sur un espace fibré principal et des opérations que l'on peut définir sur ces formes permet un exposé particulièrement simple des questions de géométrie différentielle liées à la théorie des connexions. Sans donner ici un exposé en forme de ces méthodes, nous avons voulu en développer certaines règles suffisamment en détail et avec suffisamment de rigueur — bien que d'un point de vue volontairement « naïf » — pour pouvoir les employer le plus souvent possible dans la suite de ce travail.

Pour simplifier l'exposé, nous emploierons dans ce chapitre la même notation pour une application différentiable et son application linéaire tangente. D'autre part, dans tout ce travail, la sommation par rapport à des indices répétés ne sera pas en général indiquée.

1. — Formes à valeurs dans un espace vectoriel.

Soient V une variété différentiable, T_x l'espace vectoriel tangent à V au point x et T_x^* son dual. Soit, d'autre part, M un espace vectoriel réel de dimension finie m. Une *forme*

extérieure à valeurs dans M *au point* x est une application linéaire φ_x de $\wedge T_x$ dans M, c'est-à-dire un élément de l'espace vectoriel $M \otimes \wedge T_x^*$. Une base $\{e_A\}$ $(A = 1, 2, \ldots, m)$ étant choisie dans M, φ_x peut s'écrire

$$(1) \qquad \varphi_x = \sum_{A=1,2,\ldots,m} e_A \otimes \varphi_x^A = e_A \otimes \varphi_x^A$$

où les φ_x^A appartiennent à $\wedge T_x^*$, c'est-à-dire sont des formes extérieures scalaires sur T_x que nous appellerons *composantes de* φ_x *dans la base* $\{e_A\}$. Réciproquement toute somme finie telle que (1) détermine une forme extérieure à valeurs dans M, même si les vecteurs e_A ne constituent pas une base de M. Soient

$$e_A = e_{A'} M_A^{A'}, \qquad e_{A'} = e_A M_{A'}^A$$

les formules de passage de la base $\{e_A\}$ à la base $\{e_{A'}\}$, où la matrice $(M_{A'}^A)$ est par conséquent l'inverse de $(M_A^{A'})$. D'après la bilinéarité du produit tensoriel

$$\varphi_x = e_A \otimes \varphi_x^A = e_{A'} M_A^{A'} \otimes \varphi_x^A = e_{A'} \otimes M_A^{A'} \varphi_x^A$$

d'où la relation entre les composantes de φ_x dans les deux bases

$$(2) \qquad \varphi_x^{A'} = M_A^{A'} \varphi_x^A.$$

Une forme extérieure à valeurs dans M, φ_x, étant définie en tout point $x \in V$, si de plus ses composantes φ_x^A dépendent différentiablement de x et sont de classe C^s — ce qui d'après (2) est indépendant de la base choisie dans M — nous dirons que la collection $\{\varphi_x\}$ définit une *forme différentielle extérieure* φ *à valeurs dans* M *de classe* C^s *sur* V et nous écrirons encore,

$$(3) \qquad \varphi = e_A \otimes \varphi^A$$

φ^A étant la forme différentielle extérieure (scalaire) dont la restriction à T_x est φ_x^A. On aura encore entre les formes différentielles $\varphi^{A'}$ et φ^A, composantes de φ dans les bases $\{e_{A'}\}$ et $\{e_A\}$ la relation

$$(4) \qquad \varphi^{A'} = M_A^{A'} \varphi^A.$$

Nous utiliserons maintenant la même notation φ, φ^A pour φ_x, φ_x^A. Si les φ^A sont homogènes et de même degré q, ce qui est une propriété intrinsèque d'après (4), φ est une *q-forme à*

valeurs dans M. Si φ n'est pas homogène, la décomposition $\varphi = \Sigma\varphi_q$ en somme de formes homogènes obtenue en opérant cette décomposition sur les composantes a encore un caractère intrinsèque; on désignera par $\bar{\varphi}$ la forme $\bar{\varphi} = \Sigma(-1)^q \varphi_q$.

La valeur de la forme φ pour $\mathfrak{T} \in \wedge T_x$ est

(5) $$\varphi(\mathfrak{T}) = e_A \langle \varphi^A, \mathfrak{T} \rangle$$

où $\langle , \rangle$ désigne la forme bilinéaire canonique sur $(\wedge T_X) \times (\wedge T_X^*)$. Par abus de langage, il sera parfois commode de noter

(6) $$\varphi(\mathfrak{T}) = \langle \varphi, \mathfrak{T} \rangle.$$

Pour un q-vecteur décomposable, $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1 \wedge \mathfrak{T}_2 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{T}_q$ on notera aussi

(7) $$\varphi(\mathfrak{T}) = \varphi(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_q).$$

Soit μ une application différentiable de W dans V; on peut définir *l'image réciproque* $\mu^*\varphi$ comme étant la forme sur W à valeurs dans M telle que

(8) $$\mu^*\varphi = e_A \otimes \mu^*\varphi^A$$

et il découle de (4) que cette définition est intrinsèque. Alors si $\mathfrak{T}_y \in \wedge T_y$, $y \in W$, on a d'après (5) et (6)

$$\langle \mu^*\varphi, \mathfrak{T}_y \rangle = e_A \langle \mu^*\varphi^A, \mathfrak{T}_y \rangle = e_A \langle \varphi^A, \mu \mathfrak{T}_y \rangle$$

soit

(9) $$\langle \mu^*\varphi, \mathfrak{T}_y \rangle = \langle \varphi, \mu \mathfrak{T}_y \rangle.$$

Enfin soit d le symbole de différentiation extérieure; il découle encore de (4) que la forme à valeurs dans M

(10) $$d\varphi = e_A \otimes d\varphi^A$$

ne dépend pas de la base $\{e_A\}$: c'est la *différentielle extérieure de* φ.

Les opérateurs μ^* et d sont linéaires sur R, et satisfont, d'après leur définition dans une base de M, aux relations habituelles :

(11) $$(\mu_2 \circ \mu_1)^* = \mu_1^* \mu_2^*.$$
(12) $$d\mu^* = \mu^* d.$$
(13) $$d.d = 0.$$

2. — Composition des formes a valeurs vectorielles.

A) Soient L, M, P trois espaces vectoriels de dimension finie, et une application bilinéaire de L $\times$ M dans P notée

$$l,\ m \rightarrow (l,\ m) \qquad l \in \mathrm{L}, \quad m \in \mathrm{M}.$$

A tout couple d'une forme φ à valeurs dans M et d'une forme Φ à valeurs dans L, on peut associer canoniquement une forme (Φ, φ) à valeurs dans P de telle façon que, si

$$\varphi = e_i \otimes \varphi^i \qquad e_i \in \mathrm{M} \text{ en nombre fini}$$

et
$$\Phi = h_\alpha \otimes \Phi^\alpha \quad h_\alpha \in \mathrm{L} \text{ en nombre fini},$$

on ait

$$(1) \qquad (\Phi,\ \varphi) = (h_\alpha,\ e_i) \otimes \Phi^\alpha \wedge \varphi^i.$$

Il suffit en effet de prendre pour $\{e_i\}$ (resp. $\{h_\alpha\}$) une base de M (resp. L) ainsi qu'une base $\{f_a\}$ de P; si $(h_\alpha, e_i) = \mathrm{C}^a_{\alpha i} f_a$, (Φ, φ) est nécessairement d'après (1)

$$(2) \qquad (\Phi,\ \varphi) = f_a \otimes \mathrm{C}^a_{\alpha i} \Phi^\alpha \wedge \varphi^i$$

et l'on vérifie par changement de bases le fait que (Φ, φ) ainsi définie ne dépend bien que de Φ et φ. L'opération (Φ, φ) jouit de propriétés évidentes sur (2) par exemple :

a) elle satisfait bien à la formule (1) pour toute décomposition de φ et Φ en sommes de produits tensoriels;

b) si Φ est une q-forme et φ une q'-forme, (Φ, φ) est une $(q + q')$-forme;

c) elle est bilinéaire

$$(3) \quad (\lambda_1\Phi_1 + \lambda_2\Phi_2,\ \varphi) = \lambda_1(\Phi_1,\ \varphi) + \lambda_2(\Phi_2,\ \varphi).$$
$$(4) \quad (\Phi,\ \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = \lambda_1(\Phi,\ \varphi_1) + \lambda_2(\Phi,\ \varphi_2) \quad \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathrm{R};$$

d) pour une application différentiable μ de W dans V

$$(5) \qquad \mu^*(\Phi,\ \varphi) = (\mu^*\Phi,\ \mu^*\varphi)$$

e)

$$(6) \quad d(\Phi,\ \varphi) = (d\Phi,\ \varphi) + (\overline{\Phi},\ d\varphi) = (d\Phi,\ \varphi) + (-1)^q(\Phi,\ d\varphi)$$

si Φ est une q-forme.

Nous allons maintenant étudier l'opération (Φ, φ) pour différentes applications bilinéaires $l, m \rightarrow (l, m)$: ces opérations

jouiront donc des propriétés *a*), *b*), *c*), *d*), *e*), ci-dessus que nous ne rappellerons pas.

B) *Produit d'une forme vectorielle par une forme homomorphisme.* — Soient M et P comme ci-dessus et $L = \mathfrak{L}(M, P) = P \otimes M^*$ l'espace vectoriel des applications linéaires de M dans P. Notons $h.X$ le transformé de $X \in M$ par $h \in L$: l'application $h, X \to h.X$ est une application bilinéaire de $L \times M$ dans P et si φ (resp. Φ) est une forme à valeurs dans M (resp. dans $\mathfrak{L}(M, P)$), la forme $\Phi.\varphi$ est une forme à valeurs dans P bien définie par l'alinéa A).

M (resp. P) étant rapporté à la base $\{e_A\}$ (resp. $\{f_a\}$), rapportons $\mathfrak{L}(M, P)$ à sa base $\{\varepsilon_a^A\}$ associée aux deux précédentes et définie par

$$(7) \qquad \varepsilon_a^A . e_B = \delta_B^A f_a \qquad (\delta_B^A \text{ symbole de Kronecker}).$$

On a donc pour toute forme φ (resp. Φ)

$$\varphi = e_B \otimes \varphi^B, \qquad \Phi = \varepsilon_a^A \otimes \Phi_A^a$$

d'où

$$\Phi.\varphi = \varepsilon_a^A . e_B \otimes \Phi_A^a \wedge \varphi^B = \delta_B^A f_a \otimes \Phi_A^a \wedge \varphi^B$$

soit

$$(8) \qquad \Phi.\varphi = f_a \otimes \Phi_A^a \wedge \varphi^A.$$

Cas où Φ *est une* O-*forme.* Soit une décomposition quelconque en sommes de produits tensoriels

$$\Phi = h_\alpha \otimes \Phi^\alpha \qquad \text{et} \qquad \varphi = e_i \otimes \varphi^i.$$

D'après les formules (1) et (5, § 1) il vient pour $\mathfrak{T}_x \in T_x$

$$\langle \Phi.\varphi, \mathfrak{T}_x \rangle = h_\alpha . e_i \langle \Phi_x^\alpha \wedge \varphi_x^i, \mathfrak{T}_x \rangle$$

et comme les Φ_x^α sont des scalaires

$$\langle \Phi.\varphi, \mathfrak{T}_x \rangle = (h_\alpha \Phi_x^\alpha) . e_i \langle \varphi_x^i, \mathfrak{T}_x \rangle = \Phi_x . \langle \varphi, \mathfrak{T}_x \rangle$$

c'est-à-dire, avec les notations les plus simples,

$$(9) \qquad \langle \Phi.\varphi, \mathfrak{T}_x \rangle = \Phi_x . \varphi(\mathfrak{T}_x).$$

Si de plus Φ est une O-forme constante, c'est-à-dire un homomorphisme déterminé de M dans P, il sera commode par la suite d'utiliser la notation particulière

$$h.\varphi = h(\varphi)$$

et les formules (1), (5), (6) deviennent respectivement

$$(10)\qquad h(e_i\otimes\varphi^i)=h(e_i)\otimes\varphi^i$$

d'où d'après (5, § 1)

$$\langle h(\varphi),\mathfrak{T}\rangle,=h(e_i)\langle\varphi^i,\mathfrak{T}\rangle=h(\varphi(\mathfrak{T}))$$

$$(11)\qquad \mu^*h(\varphi)=h(\mu^*\varphi)$$

$$(12)\qquad dh(\varphi)=h(d\varphi).$$

C) *Cas où* P = M *et* L = $\mathfrak{L}$ (M) espace vectoriel des endomorphismes de M. Si g et $h\in\mathfrak{L}(M)$, le produit $g.h$ des endomorphismes est une fonction bilinéaire à valeurs dans $\mathfrak{L}(M)$: l'alinéa A) permet donc de définir le produit $\Psi.\Phi$ de deux formes Ψ et Φ à valeurs dans $\mathfrak{L}(M)$, produit qui est encore à valeurs dans $\mathfrak{L}(M)$. Si l'on rapporte M à une base $\{e_A\}$ et $\mathfrak{L}(M)$ à la base correspondante $\{\varepsilon^A_B\}$ telle que

$$(13)\qquad \varepsilon^A_B.e_C=\delta^A_C.e_B$$

on a $\Phi=\varepsilon^A_B\otimes\Phi^B_A$ — nous dirons que (Φ^B_A) est la matrice de Φ dans la base $\{e_A\}$ — et $\Psi=\varepsilon^C_D\otimes\Psi^D_C$, et de la table de multiplication dans $\mathfrak{L}(M)$

$$(14)\qquad \varepsilon^C_D.\varepsilon^A_B=\delta^C_B\varepsilon^A_D$$

on déduit la règle de calcul de $\Psi.\Phi$ à l'aide des composantes de Ψ et Φ

$$(15)\qquad \Psi.\Phi=\varepsilon^A_D\otimes\Psi^D_B\wedge\Phi^B_A$$

c'est-à-dire que la matrice du produit est le produit des matrices. Outre les propriétés habituelles de l'alinéa A), ce produit est doublement associatif :

$$(16)\qquad \Psi.(\Phi.\varphi)=(\Psi.\Phi).\varphi$$

$$(17)\qquad \Theta.(\Psi.\Phi)=(\Theta.\Psi).\Phi$$

où φ est à valeurs dans M; Θ, Ψ, Φ à valeurs dans $\mathfrak{L}(M)$. On a bien entendu un produit ayant des proriétés analogues $\Phi_2.\Phi_1$, d'une forme Φ_1 à valeurs dans $\mathfrak{L}(M, P)$ par une forme Φ_2 à valeurs dans $\mathfrak{L}(P, Q)$.

D) *Cas où* M *est une algèbre de Lie* L. — Le crochet de l'algèbre L étant une fonction bilinéaire à valeurs dans L, l'alinéa A) permet d'étendre l'opération crochet aux formes à valeurs dans L. Si

$$\Phi=\varepsilon_A\otimes\Phi^A\quad\text{et}\quad\Psi=\varepsilon_B\otimes\Psi^B,$$

la formule (1) devient

$$(18) \qquad [\Phi, \Psi] = [\varepsilon_A, \varepsilon_B] \otimes (\Phi^A \wedge \Psi^B).$$

En dehors des propriétés de l'alinéa A) ce crochet jouit d'une propriété de commutation :

$$(19) \qquad [\Phi, \Psi] = (-1)^{qq'+1} [\Psi, \Phi]$$

et satisfait à une identité de Jacobi généralisée :

(20)

$$(-1)^{qq''}[\Phi, [\Psi, \Theta]] + (-1)^{q'q}[\Psi, [\Theta, \Phi]] + (-1)^{q'q''}[\Theta, [\Phi, \Psi]] = 0$$

où q, q', q'', sont les degrés respectifs de Φ, Ψ, Θ.

Considérons en particulier $L = \mathfrak{L}(M)$; en gardant les notations de l'alinéa précédent on a

$$\Phi = \varepsilon_B^A \otimes \Phi_A^B \qquad \Psi = \varepsilon_D^C \otimes \Psi^D$$

$$[\Phi, \Psi] = [\varepsilon_B^A, \varepsilon_D^C] \otimes (\Phi_A^B \wedge \Psi_C^D)$$

or d'après (14)

$$[\varepsilon_B^A, \varepsilon_D^C] = \delta_D^A \varepsilon_B^C - \delta_B^C \varepsilon_D^A$$

d'où

$$[\Phi, \Psi] = \varepsilon_B^C \otimes (\Phi_A^B \wedge \Psi_C^A) - \varepsilon_D^A \otimes (\Phi_A^B \wedge \Psi_B^D)$$

soit d'après (15)

$$(21) \qquad [\Phi, \Psi] = \Phi . \Psi - (-1)^{qq'} \Psi . \Phi.$$

En particulier si Φ est une forme de degré impair, on a

$$(22) \qquad [\Phi, \Phi] = 2\Phi . \Phi.$$

Soit enfin h une représentation fixe de l'algèbre de Lie L dans l'algèbre de Lie L_1 : c'est en particulier un homomorphisme d'espaces vectoriels et il satisfait aux propriétés de l'alinéa B). De plus, d'après (10) et (18)

$$h([\Phi, \Psi]) = h([\varepsilon_A, \varepsilon_B]) \otimes \Phi^A \wedge \Psi^B = [h(\varepsilon_A), h(\varepsilon_B)] \otimes \Phi^A \wedge \Psi^B$$
$$= [h(\varepsilon_A) \otimes \Phi^A, \; h(\varepsilon_B) \otimes \Psi^B]$$

c'est-à-dire

$$(23) \qquad h([\Phi, \Psi]) = [h(\Phi), h(\Psi)]$$

E) Soit enfin $\omega = e_i \otimes \omega^i$ une 1-forme à valeurs dans M. Nous désignerons par $\overset{q}{\wedge} \omega$ la q-forme à valeurs dans $\overset{q}{\wedge} M$ dont

la restriction à T_x est $\overset{q}{\wedge}\omega_x$. Pour calculer ses composantes, il suffit de calculer sa valeur pour un q-vecteur décomposable. Or, par définition de la puissance extérieure d'une application linéaire

$$\begin{aligned}\overset{q}{\wedge}\omega(\mathfrak{T}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{T}_q) &= \omega(\mathfrak{T}_1) \wedge \ldots \wedge \omega(\mathfrak{T}_q) \\ &= \omega^{i_1}(\mathfrak{T}_1)\,\omega^{i_2}(\mathfrak{T}_2)\ldots\omega^{i_q}(\mathfrak{T}_q)\, e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_q} \\ &= \frac{1}{q!}\varepsilon^{i_1 \ldots i_q}_{l_1 \ldots l_q}\omega^{l_1}(\mathfrak{T}_1)\ldots\omega^{l_q}(\mathfrak{T}_q)\, e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_q} \\ &= \frac{1}{q!}\langle \omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_q},\ \mathfrak{T}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{T}_q\rangle\, e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_q} \\ &= \sum_{i_1 < \cdots < i_q} \langle \omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_q}.\ \mathfrak{T}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{T}_q\rangle\, e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_q}\end{aligned}$$

ce qui montre d'après (5, § 1) que les composantes de $\overset{q}{\wedge}\omega$ dans la base $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_q} (i_1 < \cdots < i_q)$ de $\overset{q}{\wedge} M$ sont $\omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_q}$; on a donc

$$\begin{aligned}\overset{q}{\wedge}\omega &= \sum_{i_1 < \cdots < i_q} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_q} \otimes \omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_q} \\ &= \frac{1}{q!} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_q} \otimes \omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_q}.\end{aligned} \tag{24}$$

3. — Tenseurs et formes tensorielles sur un espace fibré principal.

Nous utiliserons la terminologie de A. Lichnérowicz que nous rappellerons d'abord brièvement. Soient H(X, G) un e.f.p., M un espace vectoriel et $\mathcal{R}$ une représentation linéaire de G dans M. Un tenseur sur H de type $\mathcal{R}$(G) à valeurs dans M est une fonction continue t sur H à valeurs dans M telle que

$$t(z.g) = \mathcal{R}(g^{-1}).t(z), \qquad g \in G, \quad z \in H.$$

Il y a un isomorphisme canonique entre l'espace vectoriel des tenseurs sur H de type $\mathcal{R}$(G) à valeurs dans M, et l'espace vectoriel des sections de l'e.f. M(H) obtenu par modelage de M sur H, G opérant sur M par $\mathcal{R}$ (G)(cf. déf. I, 2). La section correspondant à t dans cet isomorphisme est

$$x \to \alpha(t(z), z), \qquad (pz = x)$$

qui est bien définie puisque

$$(t(z.g),\ z.g) = (\mathcal{R}(g^{-1})\,t(z),\ z.g) \sim (t(z),\ z).$$

Si de plus H(X, G) est un e.f.p. différentiable notons Θ_h (resp. V_h) l'espace vectoriel tangent en $h \in H$ à H (resp. à la fibre H_{ph} de h). Une q-forme Λ sur H à valeurs dans M est dite de type $\mathcal{R}(G)$ si

(1) $$D_g^*\Lambda = \mathcal{R}(g^{-1}).\Lambda.$$

C'est une q-forme tensorielle de type $\mathcal{R}(G)$ si de plus

(2) $$\Lambda(\mathfrak{T}) = 0 \quad \text{dès que} \quad p\mathfrak{T} = 0, \quad \mathfrak{T} \in \overset{q}{\wedge}\Theta_h$$

p représentant ici le q^e puissance extérieure de l'application linéaire tangente à p au point h, notation simplifiée qui sera systématiquement utilisée dans ce paragraphe pour toutes les applications linéaires et leurs puissances extérieures. Considérons un tenseur sur H comme une o-forme, et soit $\{U_\alpha\}$ un recouvrement ouvert de H muni de sections locales s_α, telles que

(3) $$s_\beta(x) = s_\alpha(x).g_{\alpha\beta}(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in U_\alpha \cap U_\beta$$

où $g_{\alpha\beta}$ est une application différentiable dans G. On établit que les formes (resp. fonctions) locales sur X à valeurs dans M

(4) $$\Lambda_\alpha = s_\alpha^*\Lambda$$

sont liées dans $U_\alpha \cap U_\beta$ par

(5) $$\Lambda_\beta = \mathcal{R}(g_{\alpha\beta}^{-1}).\Lambda_\alpha$$

réciproquement une famille de formes locales Λ_α satisfaisant à (5) détermine une forme unique Λ sur H à valeurs dans M et de type $\mathcal{R}(G)$ par la seule condition (4). Cette propriété consiste à remarquer qu'une forme tensorielle est bien déterminée par la forme qu'elle induit sur les sous-variétés transversales aux fibres que constituent les images des sections. On voit plus généralement qu'elle est bien déterminée par la forme tensorielle qu'elle induit sur un s.e.f.p. $H' \subset H$.

Soit f un X-homomorphisme de H'(X, G') dans H(X, G) compatible avec un homomorphisme $\rho : G' \to G$; $f^*\Lambda$ est une q-forme tensorielle sur H' à valeurs dans M et de type $\mathcal{R}'(G')$ où $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \circ \rho$. Réciproquement étant donnée sur H' une forme

tensorielle Ψ de type $\mathfrak{R}'(G')$ à valeurs dans M, s'il existe une représentation linéaire $\mathfrak{R}$ de G dans M telle que $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} \circ \rho$ — et il suffit pour cela si ρ est surjective que le noyau de $\mathfrak{R}'$ contienne celui de ρ — il existe une forme tensorielle Λ sur H bien déterminée de type $\mathfrak{R}(G)$ telle que $\Psi = f^*\Lambda$. Nous dirons que Ψ est *projetable sur* H suivant Λ (bien que H′ se projette seulement *dans* H).

Nous allons maintenant préciser la notion de *tenseur associé à une forme tensorielle* Λ. Soit E l'e.f.p. des repères linéaires de la variété X (cf. ch. III, § 1) de groupe structural $L_n = Gl(n, R)$; $z \in E$ est un isomorphisme de R_n sur T_x. Soit $(h, z) \in H \boxtimes E$ ($p_H h = p_E z = x$) (déf. I, 2, 2,); Λ définit une application linéaire $t(h, z)$ de $\overset{q}{\wedge} R_n$ dans M par

$$(6) \qquad \begin{cases} t(h, z).u = \Lambda(\mathfrak{T}_h) \\ \text{si} \quad \mathfrak{T}_h \in \overset{q}{\wedge} \Theta_h, \quad u \in \overset{q}{\wedge} R_n, \quad z.u = p.\mathfrak{T}_h. \end{cases}$$

Cette application est bien définie puisque, d'après (2) la valeur de $\Lambda(\mathfrak{T}_h)$ ne dépend que de celle de $p\mathfrak{T}_h$, et que p est surjective. Sa linéarité étant évidente, $t(h, z) \in M \otimes \overset{q}{\wedge} R_n^*$. Je dis que la fonction t, $(h, z) \to t(h, z)$, est un tenseur sur $H \boxtimes E$; calculons en effet $t(h.g,\ z.l)$ $l \in L_n$, $g \in G$:

$$\begin{cases} t(h.g,\ z.l).u = \Lambda(\mathfrak{T}_{hg}) \\ u \in \overset{q}{\wedge} R_n, \quad \mathfrak{T}_{hg} \in \overset{q}{\wedge} \Theta_{hg}, \quad (z.l).u = p\mathfrak{T}_{hg}. \end{cases}$$

Soit $v = l.u \in \overset{q}{\wedge} R_n$; alors $z.v = p.\mathfrak{T}_{hg} = p.D_g^{-1}\mathfrak{T}_{hg}$ où $D_g^{-1}.\mathfrak{T}_{hg} \in \Theta_h$; par conséquent, d'après (6),

$$t(h,z).v = \Lambda(D_g^{-1}.\mathfrak{T}_{hg}) = \mathfrak{R}(g).\Lambda(\mathfrak{T}_{hg})$$

et $$\Lambda(\mathfrak{T}_{hg}) = \mathfrak{R}(g^{-1}).[t(h,\ z).lu] = t(h.g,\ z.l).u$$

ou $$(\mathfrak{R}(g^{-1}) \circ t(h,\ z) \circ l)u = t(h.g,\ z.l).u$$

quel que soit $u \in \overset{q}{\wedge} R_n$; c'est-à-dire en revenant à des notations complètes

$$(7) \qquad t(h.g,\ z.l) = \left(R(g^{-1}) \otimes \overset{q}{\wedge} l\right).t(h,\ z)$$

te t est un tenseur de type $\rho(G \times L_n)$ avec $\rho(g, l) = \mathfrak{R}(g) \otimes \overset{q}{\wedge} l^{-1}$. On voit immédiatement à l'aide de sections qu'il est différentiable de même classe que Λ.

On peut donner à la relation entre Λ et t une forme très simple. Remarquons d'abord que les relations (6) sont équivalentes à

$$\Lambda(\mathcal{T}_h) = t(h, z).z^{-1}.p\mathcal{T}_h \qquad \text{où} \qquad p = p_{\mathrm{H}}.$$

Soit f (resp. g) la projection naturelle de $\mathrm{H} \boxtimes \mathrm{E}$ sur H (resp. E). On a évidemment $p_{\mathrm{H}} \circ f = p_{\mathrm{E}} \circ g$. $\Psi = f^*\Lambda$ est une forme tensorielle sur $\mathrm{H} \boxtimes \mathrm{E}$ projetable sur H, dont la donnée équivaut à celle de Λ.

$$\Psi(\mathcal{T}_{(h,z)}) = \Lambda(f(\mathcal{T}_{(h,z)}) = t(h, z).z^{-1}p_{\mathrm{H}}f(\mathcal{T}_{(h,z)}) = t(h, z).z^{-1}p_{\mathrm{E}}g(\mathcal{T}_{(h,z)})$$

or $z^{-1}p_{\mathrm{E}}$ est la 1-forme fondamentale θ sur E (cf. ch. III, 2) et

$$z^{-1}p_{\mathrm{E}}g(\mathcal{T}_{(h,z)}) = \langle g^*\theta, \mathcal{T}_{(h,z)}\rangle$$

de sorte que

$$\Psi(\mathcal{T}_{(h,z)}) = t(h, z).\langle g^*\theta, \mathcal{T}_{(h,z)}\rangle = \langle t.g^*\theta, \mathcal{T}_{(h,z)}\rangle$$

et d'après la relation (9) § 2 ceci exprime $\Psi = t.g^*\theta$. En revenant à des notations complètes, nous énoncerons :

Définition II, 3. — *Λ étant une q-forme sur l'e.f.p.* H(X, G) *de type* $\mathcal{R}$(G) *à valeurs dans* M, *le tenseur associé à* Λ — $t\Lambda$ — *est le tenseur sur* $\mathrm{H} \boxtimes \mathrm{E}$ *à valeurs dans* $\mathrm{M} \otimes \overset{q}{\wedge} \mathrm{R}^{n*}$ *et de type* $\rho(\mathrm{G} \times \mathrm{L}_n)$, *où* $\rho(g, l) = \mathcal{R}(g) \otimes \overset{q}{\wedge} l^{-1}$, *défini univoquement par la relation*

$$f^*\Lambda = (t\Lambda).\left(\overset{q}{\wedge} g^*\theta\right). \tag{8}$$

D'après la formule (24) § 2 les composantes dans une base $\{e^{\mathrm{A}}\}$ de M, la base canonique de R^n et les bases associées des autres espaces, des trois formes qui interviennent dans (8) sont liées par les formules explicites

$$\begin{aligned}(f^*\Lambda)^{\mathrm{A}} &= \sum_{i_1 < \cdots < i_q} (t\Lambda)^{\mathrm{A}}_{i_1 \cdots i_q}((g^*\theta)^{i_1} \wedge \ldots \wedge (g^*\theta)^{i_q}) \\ &= \frac{1}{q!}(t\Lambda)^{\mathrm{A}}_{i_1 \cdots i_q} g^*(\theta^{i_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{i_q})\end{aligned}$$

où, à la deuxième ligne $(t\Lambda)^{\mathrm{A}}_{i_1 \cdots i_q}$, est antisymétrique en $i_1, i_2, \ldots, i_q$.

Dans le second membre de (8) se trouve le produit d'une q-forme tensorielle par une o-forme tensorielle — et ce produit est une q-forme tensorielle. Plus généralement.

Proposition II, 3, 1. — *Si φ est une forme tensorielle de type $\rho(G)$ à valeurs dans l'espace vectoriel* M, *et Φ une forme tensorielle à valeurs dans $\mathcal{L}(M, P)$ de type $\mathcal{S}(G)$ où $\mathcal{S}(g) = \mathcal{R}(g) \otimes \rho(g^{-1})$ — alors, la forme $\Phi.\varphi$ est une forme tensorielle de type $\mathcal{R}(G)$ à valeurs dans* P.

En effet, d'après la formule (5) § 2

$$D_g^*(\Phi.\varphi) = (D_g^*\Phi).(D_g^*\varphi) = (\mathcal{S}(g^{-1}).\Phi).(\rho(g^{-1}).\varphi).$$

or, $\mathcal{S}(g^{-1}).\Phi = \mathcal{R}(g^{-1}).\Phi.\rho(g)$ (produit de la o-forme constante $\rho(g)$ à valeurs dans $\mathcal{L}(M)$ par la forme Φ à valeurs dans $\mathcal{L}(M, P)$, par la o-forme constante $\mathcal{R}(g^{-1})$ à valeurs dans $\mathcal{L}(P)$: produit qui est associatif d'après (C) § 2) et par associativité :

$$D_g^*(\Phi.\varphi) = (\mathcal{R}(g^{-1}).\Phi.\rho(g)).\rho(g^{-1}).\varphi = \mathcal{R}(g^{-1}).(\Phi.\varphi)$$

$\Phi.\varphi$ est donc de type $\mathcal{R}(G)$. Pour montrer que de plus

$$\langle \Phi.\varphi, \mathcal{C}_h \rangle = 0$$

pour tout $\mathcal{C}_h \in \wedge \Theta_h$ tel que $p\mathcal{C}_h = 0$, il suffit de le montrer pour des $\mathcal{C}_h$ décomposables : et c'est évident sur les composantes $\Phi_A^a \wedge \varphi^A$ de $\Phi.\varphi$ quand on les exprime dans une base de Θ_h dont les premiers vecteurs engendrent V_h.

La proposition (II, 3, 1) contient une réciproque à la définition du tenseur associé :

Proposition II, 3, 2. — En gardant les notations de la définition (II, 3), *si λ est un tenseur sur* $H \boxtimes E$ *à valeurs dans* $M \otimes \overset{q}{\wedge} R^{n*}$ *et de type $\rho(G \times L_n)$, il existe une q-forme tensorielle de type $\mathcal{R}(G)$ à valeurs dans* M *unique dont λ soit le tenseur associé.*

En effet, il est immédiat que $\overset{q}{\wedge} g^*\theta$ est une q-forme tensorielle sur $H \boxtimes E$ à valeurs dans $\overset{q}{\wedge} R^n$ et de type $\rho_1(G \times L_n)$ où $\rho_1(g, l) = \overset{q}{\wedge} l$; si l'on désigne par $\mathcal{R}'(G \times L_n)$ la représentation dans M telle que $\mathcal{R}'(g, l) = \mathcal{R}(g)$, $\rho(g, l) = \mathcal{R}'(g, l) \otimes \rho_1(g^{-1}, l^{-1})$. On peut donc appliquer la proposition (II, 3, 1) à la forme $\psi = \lambda.\left(\overset{q}{\wedge} g^*\theta\right)$, qui est une q-forme tensorielle sur

$H \boxtimes E$ à valeurs dans M de type $\mathfrak{R}'(G \times L_n)$. Comme d'autre part f est un homomorphisme de $H \boxtimes E$ dans H compatible avec l'homomorphisme trivial $\mathcal{S}$ $G \times L_n \to G$ et que $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} \circ \mathcal{S}$, ψ est projetable sur H suivant une forme tensorielle Λ de type $\mathfrak{R}(G)$ à valeurs dans M; et $\lambda = t\Lambda$.

4. — Connexions.

A) Soit un e.f.p. différentiable H(X, G). H n'étant provisoirement pas identifié à son e.f.p. associé $\hat{H}$(Ch. I), $\hat{z} \in \hat{H}$ est l'homomorphisme différentiable de G sur H_z :

$$\hat{z}: \qquad g \to z.g \qquad g \in G,\ z \in H.$$

Son application linéaire tangente à l'identité e de G, soit $\hat{\underline{z}}$, est un isomorphisme de l'algèbre de Lie $\underline{G}$ de G sur V_z. Pour $\lambda \in \underline{G}$ nous noterons encore $\hat{\underline{z}}(\lambda) = z.\lambda$. Soit β la 1-forme *sur les fibres* de H (et non sur H) dont la restriction à V_z est l'isomorphisme inverse $\hat{\underline{z}}^{-1}$: c'est, sur chaque fibre, une forme de type « représentation adjointe de G » — nous dirons plus brièvement « de type adjoint » — :

$$D_g^*\beta = (\text{adj } g^{-1}).\beta.$$

Une connexion infinitésimale γ sur H(X, G) est définie par la donnée d'une 1-forme différentielle π sur H à valeurs dans $\underline{G}$ qui est de type adjoint et dont la restriction aux fibres coïncide avec β.

Cette dernière condition et la simple considération des dimensions montrent que le sous-espace vectoriel $\mathcal{H}_z = \pi_z^{-1}(o)$ de Θ_z est un supplémentaire de V_z qui est ainsi décomposé en une somme directe

$$\Theta_z = V_z \oplus \mathcal{H}_z.$$

Cette décomposition définit deux projecteurs dans Θ_z :

$$\begin{aligned} V &: \Theta_z \to V_z \text{ dit « partie verticale »;} \\ \mathcal{H} &: \Theta_z \to \mathcal{H}_z \text{ dit « partie horizontale »;} \end{aligned}$$

suivant les conventions déjà employées, nous noterons encore par la même lettre V (resp. $\mathcal{H}$) l'extension de ces opérateurs à $\wedge \Theta_z$.

Enfin, le champ de plans $z \to \mathcal{H}_z$, ou champ de connexion,

dépend différentiablement de z et est invariant par les translations à droite de G. On montre que réciproquement, un champ de plans $\mathcal{H}_z$ supplémentaire de V_z et jouissant de ces deux dernières propriétés, définit une connexion infinitésimale sur H.

Le champ de connexion définit sur H un système de Pfaff : s'il est complètement intégrable, la connexion γ est dite *intégrable*. Un chemin dans H, image du segment [0, 1] par une application différentiable, est dit *chemin horizontal* s'il est une variété intégrale de ce système. Le groupe d'holonomie ψ_z (resp. groupe d'holonomie restreint σ_z) au point $z \in$ H de la connexion est l'ensemble des $g \in$ G tels que $z.g$ soit joint à z par un chemin horizontal (resp. par un chemin horizontal dont la projection sur X est un lacet homotope à O). On sait que σ_z, sous-groupe connexe par arcs, est un sous-groupe analytique de G et, [13] que c'est la composante connexe par arcs de l'identité de ψ_z. ψ_z est donc un sous-groupe de Lie de G (cf. ch. I, 5).

On appelle nappe d'holonomie H'_z au point $z \in$ H l'ensemble des $z' \in$ H qui peuvent être joints à z par un chemin horizontal. Soit p' la restriction de p à H'_z; 1°) $p'(H'_z) =$ X puisque X est connexe par arcs et qu'il existe un chemin horizontal au-dessus de tout chemin de X; 2°) on sait [13] que si $z' \in H'_z$, $\psi_{z'} = \psi_z$ d'où $p'^{-1}(pz') = z'.\psi_z$; 3° p' admet des relèvements locaux qui sont des sections locales différentiables de H : cela apparaît dans la construction d'une section locale spéciale de H pour la connexion [14], la différentiabilité de la section se déduisant de celle des solutions d'un système différentiel ordinaire par rapport aux données initiales. D'après la proposition (I, 5, 2) ceci montre que H'_z est un ψ_z-s.e.f.p. différentiable de H. On a là un exemple de s.e.f.p. dont on ne sait pas en général s'il est fermé ou même propre.

B) *Comparaison des connexions.* — Soit f un X-homomorphisme de H'(X, G') dans H(X, G) compatible avec l'homomorphisme ρ de G' dans G. Soient γ' une connexion sur H' de forme π' et $\mathcal{H}'$ son champ de connexion. Soit au point $z = f(z') \in$ H le sous-espace vectoriel $\mathcal{H}_z = f\mathcal{H}_{z'} \subset \Theta_z$. De la

[13] A. Lichnerowicz [22] p. 65.
[14] A. Lichnerowicz [22] p. 117.

seule relation $p \circ f = p'$ découle que $\mathcal{H}_z$ est un supplémentaire de V_z. $\mathcal{H}_z$ est défini pour tout $z \in f(H')$ et univoquement, car si $z = f(z'_1)$ on a

$$z'_1 = z' . g' (g' \in G') \qquad \text{avec} \qquad f(z' . g') = z = f(z') . \rho(g') = z . \rho(g'),$$

de sorte que $\rho(g') = e$ et $D_{\rho(g')} =$ identité de H; alors $\mathcal{H}'_{z'_1} = D_{g'} \mathcal{H}'_{z'}$ puisque $\mathcal{H}'$, champ de connexion, est invariant par translation à droite sur H' et

$$f \mathcal{H}'_{z'_1} = (f \circ D_{g'}) \mathcal{H}'_{z'} = (D_{\rho(g')} \circ f) \mathcal{H}'_{z'} = f \mathcal{H}'_{z'}.$$

On montre de même que le champ $\mathcal{H}$ sur $f(H') \subset H$ est invariant par les translations à droite par $\rho(G') \subset G$: il s'étend donc par translation à droite en un champ défini sur tout H que je note encore $\mathcal{H}$. Ce champ, invariant par translation à droite par construction, dépend différentiablement de z (on le voit à l'aide d'une carte locale de H') : il définit donc une connexion $\gamma = f(\gamma')$ sur H que nous appellerons l'image par l'homomorphisme f de γ'. Soient $\tilde{\rho}$ la représentation de l'algèbre de Lie $\underline{G}'$ dans $\underline{G}$ définie par ρ (application linéaire tangente au point e') et π la forme de la connexion γ. On voit facilement que

$$f^* \pi = \tilde{\rho}(\pi') \tag{1}$$

et cette relation caractérise π.

En particulier, si $H'(X, G') \subset H(X, G)$ est un G'-s.e.f.p. de H, l'étude précédente s'applique f (resp. ρ) étant l'application identique de H' dans H (resp. G' dans G) : nous dirons indifféremment que $\gamma = f(\gamma')$ est *l'extension à* H *de la* H'-*connexion* γ' où, si aucune ambiguïté n'est possible, que γ est une H'-connexion; la formule (1) exprime alors que π' est la forme induite sur H' par π.

Soit maintenant f une G-représentation (Ch. I, § 3) de $H'(X', G)$ dans $H(X, G)$, induisant l'application $\mu : X' \to X$. On voit de même que, si π est une forme de connexion sur H, $\pi' = f^* \pi$ est une forme de connexion sur H', le champ de connexion $\mathcal{H}'$ étant alors projetable par f suivant $\mathcal{H}$.

Enfin si γ_1 et γ_2 sont deux connexions sur $H(X, G)$, de formes π_1 et π_2, $\pi_2 - \pi_1 = u$ est une 1-forme tensorielle sur H à valeurs dans $\underline{G}$ et de type adjoint; réciproquement, u étant une 1-forme tensorielle de ce type, $\pi_1 + u$ est une forme de connexion sur H.

C) *Différentielle absolue, formules fondamentales.* — Λ étant une q-forme tensorielle sur H(X, G) de type $\mathfrak{R}(G)$ à valeurs dans M, d'après les formules (1) § 3) et (12) § 2), on obtient par différentiation extérieure $D_g^* d\Lambda = \mathfrak{R}(g^{-1}).d\Lambda$. Alors si γ est une connexion sur H de champ $\mathcal{H}$, les projecteurs associés dans Θ_z étant $\mathcal{H}$ et V, il est évident que la $(q+1)$-forme définie au point z par

$$(\nabla\Lambda)_z = (d\Lambda)_z \circ \mathcal{H}$$

est une $(q+1)$-forme tensorielle de type $\mathfrak{R}(G)$ à valeurs dans M. C'est *la différentielle absolue de* Λ.

On établit, en utilisant par exemple une carte locale de H, l'expression globale de $\nabla\Lambda$

$$\nabla\Lambda = d\Lambda + \tilde{\mathfrak{R}}(\pi).\Lambda \tag{2}$$

où $\tilde{\mathfrak{R}}$ désigne la représentation de $\underline{G}$ dans $\mathcal{L}(M)$ définie par $\mathfrak{R}$. Le terme $\tilde{\mathfrak{R}}(\pi).\Lambda$ désigne donc le produit (§ 2) d'une forme à valeurs dans M par une forme à valeurs dans l'espace $\mathcal{L}(M)$ des endomorphismes de M.

La forme de courbure Ω de la connexion γ sur H est la 2-forme tensorielle à valeurs dans $\underline{G}$ et de type adjoint

$$\Omega = d\pi + \frac{1}{2}[\pi, \pi]. \tag{3}$$

Sa différentielle absolue $\nabla\Omega$ est la 3-forme tensorielle

$$\nabla\Omega = d\Omega + \tilde{\mathfrak{R}}(\pi).\Omega$$

où $\tilde{\mathfrak{R}}$ est la représentation adjointe de $\underline{G}$. Alors si $\lambda, \mu \in \underline{G}$

$$\tilde{\mathfrak{R}}(\lambda).\mu = [\lambda, \mu]$$

d'où
$$\tilde{\mathfrak{R}}(\pi).\Omega = [\pi, \Omega] \qquad (\S\ 2)$$

alors
$$\nabla\Omega = \frac{1}{2}d[\pi, \pi] + [\pi, d\pi] + \frac{1}{2}[\pi, [\pi, \pi]]$$
$$= \frac{1}{2}[d\pi, \pi] + \frac{1}{2}[\pi, d\pi] + \frac{1}{2}[\pi, [\pi, \pi]]$$

or, $d\pi$ étant de degré pair $[\pi, d\pi] = -[d\pi, \pi]$ (19, § 2) et l'identité de Jacobi (20, § 2) appliquée à trois formes égales donne $[\pi, [\pi, \pi]] = 0$. On a donc

$$\nabla\Omega = d\Omega + [\pi, \Omega] = 0 \tag{4}$$

c'est l'identité de Bianchi pour la courbure.

Si Λ est une forme tensorielle de type $\mathfrak{R}(G)$ sur H calculons sa différentielle absolue seconde $\nabla^2\Lambda = \nabla(\nabla\Lambda)$. $\nabla\Lambda$ étant de même type que Λ la formule (2) donne $\nabla^2\Lambda = d(\nabla\Lambda) + \tilde{\mathfrak{R}}(\pi).\nabla\Lambda$ où

$$\begin{aligned} d\nabla\Lambda &= d(\tilde{\mathfrak{R}}(\pi).\Lambda) = (d\tilde{\mathfrak{R}}(\pi)).\Lambda - \tilde{\mathfrak{R}}(\pi).d\Lambda && (6,\ \S\ 2)\\ &= \tilde{\mathfrak{R}}(d\pi).\Lambda - \tilde{\mathfrak{R}}(\pi).d\Lambda && (12,\ \S\ 2)\end{aligned}$$

et

$$\tilde{\mathfrak{R}}(\pi).\nabla\Lambda = \tilde{\mathfrak{R}}(\pi).d\Lambda + \tilde{\mathfrak{R}}(\pi).(\tilde{\mathfrak{R}}(\pi).\Lambda)$$

or

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{R}}(\pi).(\tilde{\mathfrak{R}}(\pi).\Lambda) &= (\tilde{\mathfrak{R}}(\pi).\tilde{\mathfrak{R}}(\pi)).\Lambda && (16,\ \S\ 2)\\ &= \frac{1}{2}[\tilde{\mathfrak{R}}(\pi), \tilde{\mathfrak{R}}(\pi)].\Lambda && (22,\ \S\ 2)\\ &= \frac{1}{2}\tilde{\mathfrak{R}}([\pi, \pi]).\Lambda && (23,\ \S\ 2)\end{aligned}$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} \nabla^2\Lambda &= (\tilde{\mathfrak{R}}(d\pi).\Lambda - \tilde{\mathfrak{R}}(\pi).d\Lambda) + \left(\tilde{\mathfrak{R}}(\pi).d\Lambda + \frac{1}{2}\tilde{\mathfrak{R}}([\pi, \pi]).\Lambda\right)\\ &= \tilde{\mathfrak{R}}(d\pi).\Lambda + \frac{1}{2}\tilde{\mathfrak{R}}([\pi, \pi]).\Lambda\\ &= (\tilde{\mathfrak{R}}(d\pi) + \frac{1}{2}\tilde{\mathfrak{R}}([\pi, \pi])).\Lambda && (3,\ \S\ 2)\\ &= \tilde{\mathfrak{R}}\left(d\pi + \frac{1}{2}[\pi, \pi]\right).\Lambda && (4,\ \S\ 2)\end{aligned}$$

soit enfin

$$\nabla^2\Lambda = \tilde{\mathfrak{R}}(\Omega).\Lambda. \tag{5}$$

Nous allons maintenant calculer la différentielle absolue de la forme tensorielle $\Phi.\varphi$ définie dans la proposition (II, 3, 1). Φ est une forme à valeurs dans $\mathcal{L}(M, P)$ de type $\mathcal{G}(G)$ où $\mathcal{G}(g) = \mathfrak{R}(g) \otimes \rho(g^{-1})$ et

$$\nabla\Phi = d\Phi + \tilde{\mathcal{G}}(\pi).\Phi. \tag{6}$$

Si $\{\varepsilon_\rho\}$ (resp. $\{h_\alpha\}$) est une base de $\underline{G}$ (resp. de $\mathcal{L}(M, P)$), on a

$$\pi = \varepsilon_\rho \otimes \pi^\rho, \qquad \tilde{\mathcal{G}}(\pi) = \tilde{\mathcal{G}}(\varepsilon_\rho) \otimes \pi^\rho, \qquad \Phi = h_\alpha \otimes \Phi^\alpha$$

d'où

$$\tilde{\mathcal{G}}(\pi).\Phi = \tilde{\mathcal{G}}(\varepsilon_\rho).h_\alpha \otimes \pi^\rho \wedge \Phi^\alpha \tag{7}$$

les formes π^ρ et Φ^α étant des formes scalaires. On est donc

ramené à calculer $\tilde{\mathcal{S}}(\lambda).h$ ($\lambda \in \underline{G}$, $h \in \mathcal{L}(M, P)$). Par définition, pour $u \in R$

$$\tilde{\mathcal{S}}(\lambda).h = \lim_{u \to 0} \frac{1}{u}(\mathcal{S}(\exp \lambda u).h - h)$$

Or,

$$\mathcal{S}(g).h = \mathfrak{R}(g).h.\rho(g^{-1})$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\exp \lambda u).h &= \mathfrak{R}(\exp \lambda u).h.\rho(\exp - \lambda u)\\ &= \exp \tilde{\mathfrak{R}}(\lambda u).h.\ \exp \tilde{\rho}(-\lambda u)\\ &= [\tilde{\mathfrak{R}}(0) + u\tilde{\mathfrak{R}}(\lambda) + \cdots].h.[\tilde{\rho}(0) - u\tilde{\rho}(\lambda) + \cdots]\\ &= h + u[\tilde{\mathfrak{R}}(\lambda).h - h.\tilde{\rho}(\lambda)] + \cdots\end{aligned}$$

et enfin $\tilde{\mathcal{S}}(\lambda).h = \tilde{\mathfrak{R}}(\lambda).h - h.\tilde{\rho}(\lambda)$. En reportant dans (7) puis dans (6), il vient

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{S}}(\pi).\Phi &= [\tilde{\mathfrak{R}}(\varepsilon_\rho).h_\alpha - h_\alpha.\tilde{\rho}(\varepsilon_\rho)] \otimes \pi^\rho \wedge \Phi^\alpha\\ &= \tilde{\mathfrak{R}}(\pi).\Phi - [h_\alpha.\tilde{\rho}(\varepsilon_\rho)] \otimes (-1)^p\Phi^\alpha \wedge \pi^\rho\end{aligned}$$

si Φ est de degré p; c'est-à-dire

$$\tilde{\mathcal{S}}(\pi).\Phi = \tilde{\mathfrak{R}}(\pi).\Phi - (-1)^p\Phi.\tilde{\rho}(\pi)$$

d'où

$$\nabla\Phi = d\Phi + \tilde{\mathfrak{R}}(\pi).\Phi - (-1)^p\Phi.\tilde{\rho}(\pi).$$

Comme, d'autre part

$$\nabla\varphi = d\varphi + \tilde{\rho}(\pi).\varphi$$

on a

$$\begin{aligned}\nabla\Phi.\varphi + (-1)^p\Phi.\nabla\varphi &= d\Phi.\varphi + (-1)^p\Phi.d\varphi + \tilde{\mathfrak{R}}(\pi).\Phi.\varphi\\ &= d(\Phi.\varphi) + \tilde{\mathfrak{R}}(\pi).(\Phi.\varphi)\end{aligned}$$

soit

$$\nabla(\Phi.\varphi) = \nabla\Phi.\varphi + \overline{\Phi}.\nabla\varphi \tag{8}$$

si Φ n'est pas supposée homogène.

5. — Formes vectorielles complexes.

Soient N un espace vectoriel réel, N^C son complexifié et M un espace vectoriel complexe, tous de dimension finie. Si, f est une application linéaire (sur C) de N^C dans M, $f \in M \otimes_C (N^C)^*$,

sa restriction f à $\mathrm{N} \subset \mathrm{N}^{\mathrm{C}}$ est une application linéaire (sur R) dans M : $\mathrm{f} \in \overline{\mathrm{M}} \otimes_{\mathrm{R}} \mathrm{N}^*$. Inversement si $g \in \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{R}} \mathrm{N}^*$, elle s'étend par linéarité sur les complexes en une application C-linéaire $\overline{g}$ de N^{C} dans M : tout $u \in \mathrm{N}^{\mathrm{C}}$ pouvant s'écrire $u = x + iy$ ($x, y \in \mathrm{N}$; $i = \sqrt{-1}$), il suffit de poser $\overline{g}(u) = g(x) + ig(y)$ et $\overline{g} \in \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{C}} (\mathrm{N}^{\mathrm{C}})^*$. Ainsi, l'application $g \to \overline{g}$ est un isomorphisme canonique d'espaces vectoriels sur C, de $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{R}} \mathrm{N}^*$ sur $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{C}} (\mathrm{N}^{\mathrm{C}})^*$. Si l'on prend pour M le corps des complexes, on trouve que l'espace $\mathrm{C} \otimes_{\mathrm{R}} \mathrm{N}^*$ des formes sur N à valeurs complexes est canoniquement isomorphe au dual $(\mathrm{N}^{\mathrm{C}})^*$ de N^{C}.

Si $\mathrm{N} = \wedge \mathrm{T}_x$, $\mathrm{N}^{\mathrm{C}} = \wedge \mathrm{T}_x^{\mathrm{C}}$($\mathrm{T}_x$ espace vectoriel tangent en x à la variété V). Soit φ_x une forme extérieure (réelle) en x à valeurs dans M; elle s'écrit : $\varphi_x = e_j \otimes \varphi_x^j$ ($j = 1, 2, \ldots, 2p$), $\{e_j\}$ étant une base de M sur R et les φ_x^j des formes extérieures à valeurs réelles. Soient maintenant $\overline{\varphi}_x$ l'extension de φ_x à $\mathrm{T}_x^{\mathrm{C}}$ et $\{e_{\mathrm{A}}\}$ une base de M sur C ($\mathrm{A} = 1, 2, \ldots, p$) comme $\overline{\varphi}_x \in \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{C}} (\wedge \mathrm{T}_x^{\mathrm{C}})^*$ on a $\overline{\varphi}_x = e_{\mathrm{A}} \otimes \varphi_x^{\mathrm{A}}$ où les φ_x^{A} sont des formes extérieures (complexes) sur $\mathrm{T}_x^{\mathrm{C}}$. Alors, φ_x considéré comme restriction à T_x de $\overline{\varphi}_x$ peut s'écrire $\varphi_x = e_{\mathrm{A}} \otimes \underline{\varphi}_x^{\mathrm{A}}$ où les $\underline{\varphi}_x^{\mathrm{A}}$, restrictions à T_x des φ_x^{A}, sont des formes extérieures sur T_x à valeurs complexes. Nous identifierons désormais φ_x et $\overline{\varphi}_x$ (resp. φ_x^{A} et $\underline{\varphi}_x^{\mathrm{A}}$) de sorte que une *forme extérieure à valeurs vectorielles complexes* (*dans* M) *au point x écrite*

$$(1) \qquad \varphi_x = e_{\mathrm{A}} \otimes \varphi_x^{\mathrm{A}}$$

où les φ_x^{A} *sont des formes extérieures sur* T_x *à valeurs complexes, peut être interprétée soit comme application linéaire* (*réelle*) *de* $\wedge \mathrm{T}_x$ *dans* M *soit comme application linéaire* (*complexe*) *de* $\wedge \mathrm{T}_x^{\mathrm{C}}$ *dans* M.

Enfin, si φ est une forme différentielle extérieure sur V à valeurs dans M, on l'écrira encore

$$(2) \qquad \varphi = e_{\mathrm{A}} \otimes \varphi^{\mathrm{A}}$$

où les φ^{A} sont des formes différentielles extérieures à valeur complexe; cette notation signifiant simplement, comme au paragraphe 1, que la restriction à T_x de φ est donnée par (1).

Ces précisions données, la totalité des opérations étudiées aux paragraphes 1 et 2 s'exprime, à l'aide des composantes complexes définies par (2), formellement comme dans le cas réel.

On a de même l'équivalent de la définition (II, 3) et de la proposition (II, 3, 2) :

Proposition II, 5. — *Soit* Λ *une q-forme tensorielle sur* $H(X, G)$ *à valeurs dans un espace vectoriel complexe* M *et de type* $\mathcal{R}(G)$. *Le tenseur complexe associé à* Λ, $t^C\Lambda$, *est le tenseur sur* $H \boxtimes E^C$ *à valeurs dans* $M \otimes_C \overset{q}{\wedge} C^{m*}$ *et de type* $\rho(G \times CL_m)$ *où* $\rho(g, l) = \mathcal{R}(g) \otimes \overset{q}{\wedge} l^{-1}$ *défini univoquement par*

$$F^*\Lambda = (t^C\Lambda) . (\overset{q}{\wedge} G^*\theta^C). \tag{2}$$

Réciproquement $t^C\Lambda$ *étant un tenseur donné de ce type, il est le tenseur associé à une forme* Λ *sur* H *bien définie par* (2).

Dans cet énoncé, E^C est l'espace des repères complexes de X (Ch. III, § 1) et θ^C sa forme fondamentale ; F (resp. G) l'application canonique de $H \boxtimes E^C$ sur H (resp. E^C). Remarquons que, Λ définissant une forme tensorielle réelle à valeurs dans l'espace vectoriel réel sous-jacent à M, $t\Lambda$ est un tenseur sur $H \boxtimes E$ à valeurs dans $M \otimes_R \overset{q}{\wedge} R^{m*}$; on voit que $t\Lambda$ est la restriction à $H \boxtimes E \subset H \boxtimes E^C$ de $t^C\Lambda$ ce qui a un sens puisqu'il y a un isomorphisme canonique de $M \otimes_C \overset{q}{\wedge} C^{m*}$ sur $M \otimes_R \overset{q}{\wedge} R^{m*}$:

CHAPITRE III

ESPACES DE REPÈRES. G-STRUCTURES

1. — Espaces de repères réels ou complexes.

Soit $T = T(X, R^m)$ l'e.f. des vecteurs tangents à la variété différentiable X de classe C^s. L'e.f.p. associé $E = E(X) = \hat{T}(X, L_m)$ est un e.f.p. différentiable C^{s-1}; $z \in E$ est un repère (cf. I, 3) au point $x \in X$ de la structure fibrée de T; c'est-à-dire un isomorphisme d'espaces vectoriels de R^m sur $T_x(x = pz)$. z peut être identifié à l'image $\{e_i\}$ par z de la base canonique $\{f_i\}$ de R^m, de sorte que E s'identifie à l'espace des bases des espaces vectoriels $T_x (x \in X)$. Nous utiliserons les deux interprétations. E sera appelé *l'espace des repères linéaires réels de* X, ou plus simplement *espace des repères de* X.

L'isomorphisme inverse, $\varphi = z^{-1}$, $T_x \to R^m$, est un *co-repère* en x : c'est un 1-forme au point x à valeurs dans R^m (cf. II, 1). Ses composantes φ^i dans la base canonique de R^m sont les 1-formes scalaires sur T_x définies par

$$\varphi = f_j \otimes \varphi^j \tag{1}$$

alors, $f_i = z^{-1}(z.f_i) = \langle\varphi, e_i\rangle = f_j\langle\varphi^j, e_i\rangle$, d'où $\langle\varphi^j, e_i\rangle = \delta^j_i$: c'est-à-dire que les m formes φ^j sont linéairement indépendantes et constituent la base de T^*_x duale de la base $\{e_i\}$, base à laquelle on peut donc identifier φ, qui est pour cette raison appelé co-repère *dual du repère z*. Inversement une base $\{\varphi^j\}$ de T^*_x détermine un co-repère par (1), et le repère inverse $z = \varphi^{-1}$ est le *repère dual de* φ.

Soient T^C_x le complexifié de T_x et $T^C = \bigcup_{x \in X} T^C_x$, E^C_x l'ensemble des bases (sur C) de T^C_x et $E^C = \bigcup_{x \in X} E^C_x$. Toute base de T_x est

une base sur C de T^C_x, de sorte que $E^C_x \supset E_x$ et $E^C \supset E$. Le groupe CL_m opérant à droite sur chaque E^C_x par

$$z = \{e_A\} \in E^C_X, \qquad l = (l^A_B) \in CL_m \rightarrow \{e_A l^A_B\} = z.l \in E^C_x,$$

on voit immédiatement (remarque I, 5) que E^C est muni naturellement d'une structure d'e.f.p. $E^C(X, CL_m)$ pour laquelle E est un L_m-s.e.f.p. de E^C.

Soit α la projection canonique de $C^m \times E^C$ sur le modelé $C^m(E^C)$ (cf. définition I, 2), CL_m opérant naturellement sur C^m : de l'inclusion $R^m \times E \subset C^m \times E^C$, E étant un s.e.f.p. de E^C et C^m le complexifié de R^m, découlent d'une part que $\alpha(R^m \times E) = T$ et d'autre part que la fibre en x de $C^m(E^C)$ est le complexifié de la fibre T_x de T — c'est-à-dire que $C^m(E^C) = T^C$ qui a donc une structure fibrée $T^C(X, CL_m, C^m)$. Comme CL_m est effectif sur C^m, l'e.f.p. associé $\widehat{T^C}$ n'est autre que E^C et tout $z \in E^C$ s'identifie à un isomorphisme de C^m sur T^C_x. C'est pourquoi $E^C = E^C(X)$ sera appelé *l'espace des repères complexes de* X.

L'isomorphisme inverse, $\varphi = z^{-1}$, $T^C_X \rightarrow C^m$, sera encore appelé le *co-repère complexe en x dual de z*. C'est un 1-forme sur T^C_x à valeurs dans l'espace vectoriel complexe C^m : il s'identifie donc (cf. II, 5) à une application linéaire de T_x dans C^m qui peut encore s'écrire, $\{f_j\}$ étant la base canonique de C^m,

$$(1) \qquad \varphi = f_j \otimes \varphi^j$$

où les φ^j sont, cette fois, des formes sur T_x à valeurs complexes. Le même calcul que dans le cas réel montre que ces formes sont linéairement indépendantes sur les complexes. Inversement, m formes linéaires à valeurs complexes en x, linéairement indépendantes sur C, déterminent un co-repère φ par (1), dont le repère inverse est *le repère dual de* φ.

Si h est une section locale différentiable de E (resp. E^C) au-dessus d'un ouvert U et $\theta_x = h(x)^{-1}$ le co-repère dual de $h(x)$, la 1-forme sur U à valeurs dans R^m (resp. C^m) dont la restriction au point x est θ_x sera appelée par abus de langage *co-repère sur* U *dual de* h. Ses composantes θ^j ($j = 1, 2, \ldots, m$) sont m formes de Pfaff réelles (resp. à valeurs complexes) linéairement indépendantes sur R (resp. C) dans tout U, et réciproquement m telles formes sont les composantes d'un co-repère sur U.

En particulier, si $h(x)$ est le repère naturel en x d'un système de coordonnées locales x^i ($i = 1, 2, \ldots, m$) sur U, le co-repère dual θ sur U a pour composantes dx^i, de sorte que $d\theta = 0$. Inversement un co-repère θ sur U tel que $d\theta = 0$ est localement un co-repère naturel de coordonnées locales. Ces remarques s'étendent aux repères et co-repères complexes en appelant système de coordonnées locales complexes sur X un système de m fonctions à valeurs complexes différentiables sur $U \subset X$ indépendantes sur les complexes.

Définition III, 1. — *Nous appellerons* espace de repères (*resp.* espace de repères complexes) *sur la variété différentiable X, tout sous-espace fibré principal différentiable de l'espace* E *des repères linéaires* (*resp.* E^C *des repères complexes*) *de* X. *On appelle* G-structure (*resp.* G-structure complexe) *sur* X *la structure* $S = S(G, H)$ *déterminée par la donnée d'un espace de repères* H (*resp. espace de repères complexes*) *sur* X, *de groupe structural* G.

G est donc un sous-groupe de Lie de L_m (resp. CL_m). S est dite de classe C^r si H est un s.e.f.p. de E (resp. E^C) de classe C^r. $z \in H_x$ ($x \in X$) peut être appelé *repère de* X *en* x *distingué pour la structure* S, ou plus brièvement repère distingué de S. Le co-repère dual d'un repère distingué est un *co-repère distingué.* Une G-structure ($H \subset E$) sera souvent appelée G-*structure réelle* par opposition à une G-structure complexe ($H \subset E^C$).

Il découle de la proposition (I, 5, 2) que H — et S — peut être déterminé par une famille $\{U_\alpha, h_\alpha\}$ où $\{U_\alpha\}$ est un recouvrement ouvert de X et h_α une section locale de E (resp. E^C) au-dessus de U_α avec,

$$h_\beta(x) = h_\alpha(x) \cdot g_{\alpha\beta}(x) \qquad \text{pour} \qquad x \in U_\alpha \cap U_\beta \tag{2}$$

$g_{\alpha\beta}$ étant une fonction différentiable sur $U_\alpha \cap U_\beta$ à valeurs dans G. Alors, si θ_α est le co-repère sur U_α dual de h_α, on a dans $U_\alpha \cap U_\beta$,

$$\theta'_\alpha = g_{\alpha\beta} \cdot \theta_\beta \tag{3}$$

avec les notations du chapitre II. Inversement soit une famille $\{U_\alpha, \theta_\alpha\}$ où $\{U_\alpha\}$ est un recouvrement de X et θ_α un co-repère sur U_α, ces co-repères étant liés par (3) dans $U_\alpha \cap U_\beta$: elle détermine une G-structure sur X.

Cette dernière détermination est la détermination locale la plus courante : cf. S. S. Chern [9]. Un grand nombre de structures plus ou moins classiques de la géométrie différentielle peuvent être déterminées par la donnée d'une G-structure : on en trouvera ci-dessous quelques exemples. La monographie de P. Libermann [20] en comprend une liste abondante.

Premiers exemples. — *a*) L'e.f.p. des repères orthonormés d'une variété Riemannienne définit sur X une $O(m)$-structure et réciproquement.

b) *Les structures presque produit complexe* (*resp. réel*) — ou π-structures (resp. π_R-structures) — ont été envisagées par D. C. Spencer [25], étudiées en détail par G. Legrand [18] et, indépendamment, par l'auteur. Si dim $X = m = n_1 + n_2$, une π (resp. π_R) — structure sur X est définie par la donnée de deux champs de sous-espaces vectoriels complexes (resp. réels) T_i de T_x^C (resp. T_x) de dimension n_i ($i = 1,2$) et supplémentaires. Les bases de T_x^C (resp. T_x) dont les n_1 premiers vecteurs appartiennent à T_1, et les n_2 suivants à T_2 constituent un espace de repères complexes (resp. réels) de groupe structural CL (n_1, n_2) (resp. L (n_1, n_2)) (cf. Ch. I, § 6). Réciproquement une CL (n_1, n_2) — structure sur X détermine une π-structure ; une L (n_1, n_2) — structure réelle détermine une π_R-structure.

c) Une π-structure pour laquelle T_2 est le complexe conjugué de T_1 (d'ou $n_1 = n_2 = n$ et $m = 2n$) définit une structure presque complexe (cf. [22] § 101). Les bases adaptées de T_x^C, formées d'une base $\{\varepsilon_\alpha\}$ ($\alpha, \beta, = 1, 2, ..., n$) de T_1 et de la base complexe conjuguée $\{\varepsilon_{\alpha^*} = \mathfrak{C}.\varepsilon_\alpha\}$ ($\alpha^* = \alpha + n$) de T_2, constituent un espace de repères $E^b(X) \subset E^C$ ayant pour groupe structural le groupe CL_n^b des matrices

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & \bar{A} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad A \in CL_n, \quad \bar{A} = \text{complexe conjuguée de } A,$$

groupe isomorphe à CL_n. Inversement, une CL_n^b-structure S détermine une structure presque complexe si et seulement si, pour tout $x \in X$, il existe un repère distingué $\{\varepsilon_i\}$ ($i = 1, 2, \ldots, 2n$) tel que $\varepsilon_{\alpha^*} = \mathfrak{C}.\varepsilon_\alpha$ pour $\alpha = 1, 2, ..., n$: en particulier une structure presque complexe sur X est parfaitement déterminée par son espace $E^b(X)$.

Les *bases réelles adaptées* à la structure presque complexe sont les bases de T_x déduites des précédentes par

$$e_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_{\alpha^*}), \qquad e_{\alpha^*} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_{\alpha^*})$$

elles constituent un *espace de repères réels* $E^a(X) \subset E$ dont le groupe structural CL_n^a est la représentation réelle de CL_n dans L_{2n}, c'est-à-dire le groupe des matrices

$$\begin{pmatrix} B & C \\ -C & B \end{pmatrix} \quad B, C \text{ matrices réelles}, \quad B + iC = A \in CL_n.$$

Inversement, une CL_n^a-structure réelle sur X détermine une structure presque complexe.

d) Soit $X = G/H$ un espace homogène du groupe de Lie G, p sa projection canonique et E l'e.f.p. des repères de X. K_g désignant l'opération de $g \in G$ sur X, cette opération se prolonge à E : si $z \in E_x$, $\underline{K_g} \circ z = gz \in E_{gx}$ ($\underline{K_g}$ application linéaire tangente à K_g). Soit z_0 fixé tel que $p_E . z_0 = pe = x_0$. Soient $\tilde{H}$ le groupe linéaire d'isotropie de X en x_0 et $\tilde{H}_{z_0} \subset L_m$ le groupe $z_0^{-1} . \tilde{H} . z_0$ isomorphe à $\tilde{H}$. L'application f de G dans E, $g \to g . z_0 = f(g)$, est un X-homomorphisme d'e.f.p. compatible avec l'homomorphisme

$$\rho : \quad H \to L_m, \quad h \in H \to z_0^{-1} \circ \underline{K_h} \circ z_0 \in \tilde{H}_{z_0} \subset L_m;$$

en effet,

$$f(g.h) = (g.h)z_0 = \underline{K_{gh}} \circ z_0 = \underline{K_g} \circ \underline{K_h} \circ z_0$$

soit

$$f(g.h) = \underline{K_g} \circ z_0 \circ (z_0^{-1} \circ \underline{K_h} \circ z_0) = f(g) . \rho(h).$$

L'image $P_{z_0}(X) = f(G)$ est donc (proposition I, 5, 2) un $\rho(H)$-s.e.f.p. de E, c'est-à-dire un espace de repères de groupes $\tilde{H}_{z_0}$. En particulier si G/H est un espace homogène réductif, $\tilde{H}$ est isomorphe à H, ρ et f sont des isomorphismes et G est isomorphe à $P_{z_0}(X)$:

Proposition III, 1. — *Si* $X = G/H$ *est un espace homogène du groupe de Lie* G, *il est naturellement muni d'une* $\tilde{H}_{z_0}$*-structure où* $\tilde{H}_{z_0}$ *est la représentation du groupe linéaire d'isotropie* $\tilde{H}$ *dans un repère* z_0 *de* X *au point* $x_0 = pe$. *L'espace de repères correspondant est homomorphe à l'e.f.p.* $G \to G/H$: *il lui est isomorphe si* G/H *est réductif.*

2. — G-Structures définies par un tenseur.

Les trois premiers exemples ci-dessus entrent dans un même schéma. Soit $\mathcal{R}$ une représentation linéaire de L_m dans un espace vectoriel M et un sous-groupe $G \subset L_m$ laissant invariant $u \in M$. Soit d'autre part, S(G, H) une G-structure sur X. L'application constante $H \to u$ est un tenseur sur H à valeurs dans M et de type $\mathcal{R}(G)$ il s'étend donc (ch. II, § 3) en un tenseur t sur E à valeurs dans M et de type $\mathcal{R}(L_m)$: ce tenseur prend ses valeurs dans la classe d'intransitivité M_u de u pour $\mathcal{R}(L_m)$ puisque, si $z \in E$ il existe $z' \in H$ tel que $z = z'.l$ $(l \in L_m)$ et l'on a alors

$$t(z) = t(z'.l) = \mathcal{R}(l^{-1}).t(z') = \mathcal{R}(l^{-1}).u \in M_u.$$

Supposons réciproquement que G soit *le plus grand sous-groupe* de L_m *laissant* u *invariant* (G est alors fermé dans L_m) et soit sur E un tenseur t de type $\mathcal{R}(L_m)$ à valeurs dans M_u. Soit $H \subset E$ l'ensemble des repères z tels que $t(z) = u$:

1° $p(H) = X$ car, si $z_1 \in E_x$, $t(z_1) \in M_u$; donc il existe $l_1 \in L_m$ tel que $t(z_1) = \mathcal{R}(l_1).u$ et $t(z_1.l_1) = \mathcal{R}(l_1^{-1}).t(z_1) = u$ de sorte que $z_1.l_1 \in H$;

2° si z, $z' \in H_x$, $z' = z.l$ $(l \in L_m)$ et $t(z') = \mathcal{R}(l^{-1})\,t(z)$ c'est-à-dire $\mathcal{R}(l^{-1})\,u = u$ et $l \in G$. On a donc $H_x = z.G$.

D'après la proposition (I, 5, 2), pour que H soit un G-s.e.f.p. de E il faut et suffit que, de plus, E admette des sections locales à valeurs dans H. Analysons cette dernière condition. Soient π l'application canonique $L_m \to L_m/G$ et f l'injection $L_m/G \to M$ (application différentiable biunivoque sur M_u) $l.G \to \mathcal{R}(l)u \in M$; f est analytique et partout régulière de sorte que M_u est une sous-variété analytique de M : désignons cette sous-variété par $\tilde{M}_u$ et identifions-la à L_m/G par f de sorte que

$$\pi(l) = l.G = \mathcal{R}(l).u \tag{1}$$

t, application différentiable dans M prenant ses valeurs dans M_u n'est pas nécessairement une application différentiable dans $\tilde{M}_u$. Supposons que H soit un s.e.f.p. de E et soit V un ouvert de X muni d'une section z à valeurs dans H : pour

$x \in V$, $l \in L_m$, $t(z(x).l) = \mathcal{R}(l^{-1}).u$ c'est-à-dire que, dans la carte de E associée à la section z, l'application t, $E_V \to \tilde{M}_u$ s'exprime par

$$(x, l) \to \pi(l^{-1}).$$

application qui est donc différentiable. Pour que H soit un s.e.f.p. il faut donc que t soit une application différentiable non seulement dans M mais aussi dans $\tilde{M}_u$. Cette condition est suffisante. Soit en effet V un ouvert de X muni d'une section s de E; $t \circ s = g$ est une application différentiable de V dans $\tilde{M}_u$ et, si l'on restreint V de façon que $g(V)$ soit inclus dans un ouvert de $L_m/G = \tilde{M}_u$, muni d'une section locale σ de $L_m \to L_m/G$, $l = \sigma \circ g$ est une application différentiable de V dans L_m; $x \to z(x) = s(x).l(x)$ est une section locale différentiable de E sur V et

$$t(z(x)) = t(s(x).l(x)) = \mathcal{R}(l(x)^{-1}).t(s(x)) = \mathcal{R}(l(x)^{-1}).g(x)$$

et puisque $\pi \circ \sigma =$ identité de L_m/G, $g(x) = \pi(l(x)) = R(l(x))u$ d'après (1), d'ou $t(z(x)) = u$ et z prend ses valeurs dans H. Tenant compte du lemme (I, 6, 1) nous avons établi :

Proposition III, 2. — *Soient $\mathcal{R}$ une représentation linéaire de L_m (resp. CL_m) dans un espace vectoriel* M, G *le sous-groupe de L_m (resp. CL_m) laissant invariant $u \in M$, M_u la classe d'intransitivité de u par L_m (resp. CL_m) munie de sa structure analytique d'espace homogène L_m/G. La donnée sur V_m d'une G-structure équivaut à celle d'un tenseur sur $E(V_m)$* (resp. $E^C(V_m)$) *de type $\mathcal{R}(L_m)$ (resp. $\mathcal{R}(CL_m)$) à valeurs dans M_u pourvu que t soit une application différentiable dans M_u* (et non seulement dans M). *Cette dernière condition est toujours réalisée si M_u est une sous-variété propre de* M, *en particulier si L_m/G est compact.*

En dehors du cas compact, le problème de l'existence de sections locales distinguées se pose donc toujours. Reprenons les exemples du paragraphe précédent.

a) M est l'espace des formes bilinéaires sur R^m, u la forme bilinéaire $x, y \in R^m \to \sum_{i=1,\dots,m} x^i y^i$ dont la matrice dans la base canonique de R^m est la matrice identité : alors $G = O(m)$, M_u est l'ensemble des formes bilinéaires symétriques définies positives, t le « tenseur métrique » définissant sur V_m la struc-

ture Riemannienne associée à la $O(m)$-structure. Le tenseur t différentiable à valeur dans M étant donné, l'existence de sections locales orthonormées se montre directement en construisant une telle section à partir d'une section locale quelconque de E par un procédé n'affectant pas la continuité, par exemple par le « procédé d'orthogonalisation de Schmidt ».

b) $M = \mathfrak{L}(C^m)$, $\mathfrak{R}(l)$, $l \in CL_m$, est la transformation canonique $h \in M \to \mathfrak{R}(l).h = l^{-1}.h.l$, CL (n_1, n_2) est le sous-groupe de CL_m laissant invariante la matrice

$$u = \begin{pmatrix} E_{n_1} & O \\ O & -E_{n_2} \end{pmatrix}$$

M_u est l'ensemble des automorphismes de C^m de carré identité dont l'espace des vecteurs propres correspondant à la valeur propre $+1$ est de dimension n_1; t est le tenseur sur $E^C(V_m)$ qui définit en chaque point $x \in V_m$ un automorphisme de T^C_x de carré identité. La donnée de t équivaut à celle de la π-structure ([15]).

c) une structure presque complexe déterminée par une CL^a_n-structure réelle peut être définie de façon analogue: $M = \mathfrak{L}(R^{2n})$; $\mathfrak{R}(l)$ $(l \in L_m)$ est encore la transformation canonique; alors CL^a_n est le sous-groupe de L_{2n} qui laisse invariante la matrice

$$u = \begin{pmatrix} O & E_n \\ -E_n & O \end{pmatrix}$$

M_u est l'ensemble des automorphismes de R^{2n} de carré identité; t est le tenseur presque complexe.

3. — G-Structures équivalentes et subordonnées.

A) Définition III, 3, 1. — *Soit une structure* $S = S(G, H)$ (*réelle ou complexe*). *Une structure* $S' = S'(G', H')$ *est dite* équivalente à S *s'il existe* $l \in L_m$ (*resp.* CL_m) *tel que* $H' = H.l$. S *complexe est dite* équivalente au réel *si elle admet une structure équivalente réelle. Si* S *est réelle* (*resp. complexe*) *une structure* S' *équivalente* à S ($H' = H.l$) *est encore une* G-*structure réelle* (*resp. complexe*) *si et seulement si* l *appartient au normalisateur*

([15]) Cf. G. Legrand [18].

$N(G)$ (*resp.* $N^C(G)$) *de* G *dans* L_m (*resp.* CL_m) : *on dit alors que* S′ *est une* G-structure réelle (resp. complexe) associée à S.

La structure S′ d'espace de repères $H' = H.l$ à un groupe structural conjugué de G dans Cl_m, $G' = l^{-1}.G.l$; car, si $z \in H_x$ $H_x = z.G$, $H'_x = z.G.l = z.l.(l^{-1}.G.l)$ $(x \in X)$. Pour que $G' = G$, il faut et suffit donc que $l \in N(G)$ (resp. $N^C(G)$).

Nous verrons dans les exemples ci-dessous et chapitre IV que les structures équivalentes doivent être considérées comme définissant une même structure infinitésimale sur X. Une classe $\mathcal{C}$ de sous-groupes conjugués de L_m étant donnée, on peut appeler $\mathcal{C}$-structure l'ensemble des G′-structures équivalentes à une G-structure donnée ($G, G' \in \mathcal{C}$). Chacune des G′-structures envisagées étant alors « un représentant » de la $\mathcal{C}$-structure. Le problème de la détermination de toutes les G-structures possibles sur X est résolu par la proposition (I, 5, 3) lorsque G donné est fermé dans L_m : elles correspondent biunivoquement aux sections différentiables de l'espace E/G. Le problème de la détermination de toutes les $\mathcal{C}$-structures peut être posé ainsi : un représentant $G \in \mathcal{C}$ étant choisi, une $\mathcal{C}$-structure donnée admet dès que $N(G) \neq G$ plusieurs représentants qui sont des G-structures, et ces structures sont associées; le groupe $N = N(G)/G$ opère sur E/G ainsi que sur le faisceau F des germes de sections différentiables de E/G que l'on peut appeler *faisceau des germes de* G-*structures*. N étant muni de la topologie discrète, l'espace quotient $\mathcal{F}/N$ est encore un faisceau et, si q est l'application canonique $\mathcal{F} \to \mathcal{F}/N$, pour que deux sections de $\mathcal{F}$ définissent deux G-structures associées, il faut et suffit qu'elles aient même image par q. On peut donc appeler $\mathcal{F}/N$ *faisceau des* $\mathcal{C}$-*structures sur* X : il y a correspondance biunivoque entre les $\mathcal{C}$-structures sur X et les sections de ce faisceau qui ont un relèvement dans $\mathcal{F}$. La même analyse est évidemment valable dans le cas complexe.

Exemples. — Reprenons avec les mêmes notations certains exemples du § 1.

a) Les différentes $\bar{H}_{z_0}$-structures définies sur un espace homogène G/H (exemple *d*) sont équivalentes : z_0 étant remplacé par $z_1 = z_0.l$ $(l \in L_m)$ et f par f_1, on a

$$f_1(g) = K_g \circ z_1 = K_g \circ z_0 \circ l = f(g).l,$$

d'où
$$\overline{P_{z_1}}(X) = \overline{P_{z_0}}(X).l.$$

b) La CL_n^b-structure S^b et la CL_n^a-structure S^a définies par une structure presque complexe (exemple *c*) sont équivalentes, car si $z = \{\varepsilon_\alpha, \varepsilon_{\alpha^*}\} \in E^b(X)$ est une base adaptée complexe et $z' = \{e_\alpha, e_{\alpha^*}\} \in E^a(X)$ la base réelle correspondante, on a

$$z' = z.l \quad \text{où} \quad l = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} E_n & E_n \\ iE_n & -iE_n \end{pmatrix}$$

d'où $E^a(X) = E^b(X).l$ et $CL_n^a(X) = l^{-1}.CL_n^b(X).l$, ce que l'on vérifie immédiatement. S^a étant réelle, S^b est équivalente au réel.

c) l'existence de G-structures non équivalentes au réel est évidente : il suffit que $\dim G > m^2$ pour qu'une G-structure ne puisse être équivalente au réel. Ainsi *une π-structure* (exemple *b*) *n'est jamais équivalente au réel.*

B) Définition III, 3, 2. — *Soient deux structures* S(G, H) *et* S'(G', H') : *on dit que* S *est* subordonnée à S', *ou que* S' *est une* extension de S, *si* $H \subset H'$ (d'où $G \subset G'$).

G' étant donné, le problème d'existence d'une G-structure subordonnée à S' est résolu par la proposition (I, 5, 3). Étant donnée une autre structure S'' (G'', H'') il se pose le problème de l'existence d'une structure S subordonnée à la fois à S' et S'' : si $H' \cap H''$ est encore un espace de repères, il définit une telle structure de groupe $\Gamma = G' \cap G''$ (la plus grande); inversement si $H \subset H' \cap H''$, définit une structure subordonnée commune, $H' \cap H'' = H.\Gamma$ en détermine aussi une. Notre problème est donc ramené à celui-ci : $H' \cap H''$ est-il un espace de repères? C'est pour le résoudre que nous avons fait l'étude du paragraphe (I, 6). La proposition (I, 6, 2) et le théorème (I, 6) permettent d'énoncer :

Theoreme III, 3. — *Pour qu'il existe une structure subordonnée commune à une* G'*-structure* S' *et à une* G''*-structure* S'' *sur* X, *il faut qu'elles admettent en chaque point* $x \in X$ *un repère distingué commun : cette condition est suffisante si le couple* G', G'' *est un couple générique de sous-groupes de* L_m (*resp.* CL_m), *par exemple si* G'/Γ (*resp.* G''/Γ) *est compact* ($\Gamma = G' \cap G''$). *En particulier, pour qu'une* G*-structure complexe* S *soit l'extension d'une structure réelle, il faut que* S *admette en chaque point un repère distingué réel : cette condition est*

suffisante si le couple G, L_m *est un couple générique de sous-groupes de* CL_m, *en particulier* si G/Γ (*resp.* L_m/Γ *est compact.*)

La condition d'existence d'un repère distingué en x commun à S′ et S″, $H'_x \cap H''_x \neq \emptyset$, peut se mettre sous la forme $H'_x \subset H''_x . G'$; elle est réalisée pour tout $x \in X$ si

$$(1) \qquad H' \subset H'' . G'.$$

En particulier, pour que la G-structure complexe S admette un repère distingué réel en tout point, il faut et suffit, que

$$(2) \qquad H \subset E . G.$$

Si $z_x \in E_x$, la fibre en x de E.G est $z_x . L_m . G$ et dès que $L_m . G \neq CL_m$ (par exemple $\dim G < m^2$) on peut affirmer qu'*une G-structure complexe n'est pas en général l'extension d'une structure réelle.* Au contraire la condition (2) sera toujours réalisée si et seulement si

$$L_m . G = CL_m.$$

Comme cette condition entraîne que le couple L_m, G est un couple générique de sous-groupes (théorème I, 6, 2) exemple *b*), une telle G-structure est toujours l'extension d'une structure réelle.

Exemples. — *a*) $O(m)$ étant compact, si une structure S(G, H) quelconque sur X admet en tout point un repère distingué orthonormé, S admet d'après le théorème précédent une structure subordonnée de groupe $G \cap O(m)$: dans les cas les plus courants, ce fait peut résulter directement de la façon dont est déterminé un repère distingué orthonormé — mais la preuve en est omise par la plupart des auteurs — ceci découle ici d'un théorème général.

b) une structure presque hermitienne subordonnée à une structure presque complexe sur X de dimension $2n$ peut être déterminée par un espace de repères $\varepsilon^b(X) \subset E^b(X)$ ayant pour groupe structural le groupe $U^b(n) \subset CL^b_n$ isomorphe à $U(n)$ des matrices

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & \overline{A} \end{pmatrix} \qquad A \in U(n),$$

$U^b(n) = CL^b_n \cap U(2n)$. Elle peut être aussi bien déterminée par l'espace de repères réels $\varepsilon^a(X) = \varepsilon^b(X) . l$ (l matrice définie

à l'exemple *b*) de l'alinéa A) de groupe $U^a(n) = O(2n) \cap CL_n^a$. C'est donc la plus grande structure subordonnée commune à la structure Riemannienne définie par les repères orthonormés $\varepsilon^a(X).O(2n)$ et à la structure presque complexe définie par les repères réels adaptés $\varepsilon^a(X).CL_n^a = E^a(X)$. Inversement, quand on se donne sur X une métrique riemannienne Φ et un opérateur presque complexe $\mathfrak{J}$ tels que, en tout point x, l'opérateur $\mathfrak{J}_x$ soit hermitien par rapport à la métrique Φ_x ($\Phi_x(\mathfrak{J}_x v, \mathfrak{J}_x w) = \Phi_x(v, w)$ pour tout v, $w \in T_x$), le fait que l'espace $\varepsilon^a(X)$ des repères réels adaptés en chaque point à ces deux structures est bien un « espace de repères » suppose la démonstration (généralement omise) de l'existence de sections locales de E(X) qui soient à la fois orthonormées et adaptées à la structure presque complexe : notre théorème, applicable puisque l'un des groupes est compact, ramène cette démonstration à celle de l'existence de sections locales orthonormées pour la métrique Φ d'une part, de sections locales adaptées à la structure presque complexe d'autre part.

c) Pour qu'une π-structure S soit l'extension d'une π_R-structure, il faut et suffit que S admette en chaque point un repère distingué réel : c'est ici évident car, le champ de plans $T_i (i = 1,2)$ étant différentiable ainsi que le champ T_x, le champ de plans $T_i \cap T_x$ est aussi différentiable; cela peut aussi résulter du théorème III, 3 le couple CL (n_1, n_2), L_m de sous-groupes de CL_m étant générique (proposition I, 6, 4).

C) Définition III, 3, 3. — *Une* G'-*structure* S' *est dite* subordonnée au sens large *à une structure* S *si elle est subordonnée à une structure équivalente à* S (*ou équivalente à une structure subordonnée à* S). S *est alors une* extension au sens large *de* S'.

Etudions en particulier à quelles conditions une structure complexe S(G, H) est l'extension au sens large d'une structure réelle : il faut et suffit pour cela qu'il existe $l \in CL_m$ tel que $S'(lG.l^{-1}, H.l^{-1})$ admette une structure subordonnée réelle; il faut donc d'après (1) qu'il existe l tel que $H.l^{-1} \subset E.(lGl^{-1})$ soit

$$H \subset E.l.G. \tag{3}$$

Cette condition est suffisante si le couple L_m, $l.G.l^{-1}$ est un couple générique de sous-groupes de CL_m.

Les ensembles $E.l.G$, $l \in CL_m$, (doubles classes modulo $E : G$) définissent des classes d'équivalence sur E^C qui correspondent biunivoquement aux doubles classes de CL_m modulo $L_m : G$. S'il existe plus d'une telle classe (c'est-à-dire si $L_m . G \neq CL_m$) *il existe sûrement des G-structures complexes n'admettant pas de structure réelle subordonnée au sens large.* En ce sens, les G-structures complexes constituent une vraie généralisation des G-structure réelles.

4. — Caractérisation d'un espace de repères par la 1-forme fondamentale.

DÉFINITION III, 4, 1. — *Soit* H(X, G) *un espace de repères réels* (*resp. complexes*) *sur la variété* X *de dimension m. On appelle* 1-forme fondamentale sur H *la* 1-*forme* ω *à valeurs dans* R^m (*resp.* C^m) *qui, au vecteur* (*resp. vecteur complexe*) $\mathcal{C}_z$ *tangent à* H *au point z, fait correspondre le vecteur*

(1) $$\omega(\mathcal{C}_z) = z^{-1}.p\mathcal{C}_z \in R^m \text{ (resp. } C^m\text{)}.$$

La 1-forme fondamentale sur E (resp. E^C) sera notée θ (resp. θ^C). La restriction de la forme induite par θ^C sur E aux vecteurs tangents réels coïncide avec θ. Si $H \subset E$ (resp. E^C) la 1-forme fondamentale ω de H est la forme induite par θ (resp. θ^C) sur H. Quand aucune ambiguïté n'est possible, θ^C est encore notée θ.

La 1-forme ω définie dans la définition (III, 4, 1) satisfait aux deux propriétés

(2) $$D_g^*\omega = g^{-1}.\omega \quad g \in G$$

(3) $$\omega(\mathcal{C}) = 0 \longleftrightarrow p\mathcal{C} = 0$$

($\mathcal{C}$ vecteur, réel ou complexe, tangent à H). En effet, si $\mathcal{C}_z$ est tangent à H au point z, $D_g\mathcal{C}_z$ est tangent au point $z.g$ et

$$\omega(D_g\mathcal{C}_z) = (z.g)^{-1}p(D_g\mathcal{C}_z) = g^{-1}z^{-1}p\mathcal{C}_z = g^{-1}\omega(\mathcal{C}_z)$$

d'où (2). D'autre part, $\omega(\mathcal{C}_z) = 0 \longleftrightarrow z^{-1} \ (p\mathcal{C}_z) = 0$ ce qui équivaut à $p\mathcal{C}_z = 0$ puisque z est un isomorphisme de R^m (resp. C^m) sur T_{pz} (resp. T^C_{pz}); ω est donc une 1-forme tensorielle : nous traduirons la dernière propriété en disant qu'elle est *régulière* — et son type en disant que c'est une 1-*forme vectorielle.*

Soit s une section de H au-dessus de l'ouvert $U \subset X$; $s^*\omega$ est une 1-forme sur U à valeurs dans R^m (resp. C^m); si $\mathfrak{T}_x \in T_x$ (resp. T_x^C), $s^*\omega(\mathfrak{T}_x) = \omega(s\mathfrak{T}_x)$ et comme $s\mathfrak{T}_x$ est tangent à H au point $s(x)$, $s^*\omega(\mathfrak{T}_x) = (s^{-1}(x).p)\ (s\mathfrak{T}_x) = s^{-1}(x)\ (\mathfrak{T}_x)$, c'est-à-dire que $(s^*\omega)_x = s^{-1}\ (x)$ et que $s^*\omega$ est le co-repère dual de la section s. Cette remarque peut servir de définition à ω (cf. ch. II, 3).

La forme fondamentale caractérise les espaces de repères :

Proposition III, 4, 1. — *Soit* G *un sous-groupe de Lie de* L_m (*resp.* CL_m) *pour qu'un e.f.p.* H(X, G) *soit* G-*isomorphe à un espace de repères sur* X, *il faut et suffit qu'il puisse être muni d'une* 1-*forme tensorielle* ω *à valeurs dans* R^m (*resp.* C^m) *satisfaisant à* (2) *et* (3). *Il existe alors un homomorphisme unique* f *de* H *dans* E(X) (*resp.* $E^C(X)$) *compatible avec l'application identique de* G *dans* L_m (*resp.* CL_m) *et tel que*

$$f^*\theta = \omega \tag{4}$$

où θ *est la* 1-*forme fondamentale sur* E (*resp.* E^C).

Soit d'abord f un G-isomorphisme de H(X, G) sur un espace de repères $H'(X, G) \subset E$: c'est un homomorphisme dans E et l'on sait (Ch. II, 3) que $\omega = f^*\theta$ est une 1-forme tensorielle sur H de même type; ω est régulière puisque

$$\omega(\mathfrak{T}_z) = 0 \longleftrightarrow \theta(f\mathfrak{T}_z) = 0 \longleftrightarrow p_E f\mathfrak{T}_z = 0 \longleftrightarrow p_H\mathfrak{T}_z = 0\ (p_H = p_E \circ f).$$

Réciproquement, H(X, G) satisfaisant aux hypothèses de la proposition (III, 4, 1), supposons qu'il existe un G-isomorphisme f de H *dans* E tel que $f^*\theta = \omega$. Si $\mathfrak{T}_h \in T_h$ $(h \in H)$, $\omega(\mathfrak{T}_h) = \theta(f\mathfrak{T}_h)$ et comme $f\mathfrak{T}_h \in T_{f(h)}$, $\omega(\mathfrak{T}_h) = [f(h)]^{-1}p_E f\mathfrak{T}_h$, c'est-à-dire

$$\omega(\mathfrak{T}_h) = [f(h)]^{-1}p_H\mathfrak{T}_h. \tag{5}$$

Soit t_ω le tenseur associé à ω (déf. II, 3) tenseur sur $H \boxtimes E$ à valeurs dans $R^{m*} \otimes R^m$ de type $\rho(G \times L_m)$ tel que $\rho(g, l) = g \otimes l^{-1}$, c'est-à-dire tel que $t_\omega(h.g,\ z.l) = g^{-1}.t_\omega\ (h,\ z).l$. Il peut être défini par les formules ((6) Ch. II, 3) :

$$\left\{\begin{array}{l} t(h,\ z).u = \omega(\mathfrak{T}_h) \\ \text{si } \mathfrak{T}_h \in T_h,\ (h,\ z) \in H \otimes E,\ u \in R^m,\ z.u = p_H\mathfrak{T}_h \end{array}\right. \tag{6}$$

par suite de (3), $t_\omega(h,\ z).u = 0 \longleftrightarrow u = 0$ et $t_\omega(h,\ z) \in L_m$. (6)

entraîne $t\omega(h, z).z^{-1}p_{\mathrm{H}}\mathfrak{T}_h = \omega(\mathfrak{T}_h)$ de sorte que (5) équivaut à

$$t_\omega(h, z).z^{-1}p_{\mathrm{H}}\mathfrak{T}_h = [f(h)]^{-1}.p_{\mathrm{H}}\mathfrak{T}_h \tag{7}$$

et comme $p_{\mathrm{H}}\mathrm{T}_h = \mathrm{T}_{ph}$, (7) équivaut à l'égalité entre opérateurs

$$f(h) = z.[t_\omega(h, z)]^{-1} \tag{8}$$

qui a un sens puisque $t_\omega(h, z) \in \mathrm{L}_m$. Nous avons jusqu'ici établi que, pour qu'une application f de H dans E satisfasse à (4), il faut et suffit qu'elle satisfasse à (8). Or, le second membre de (8) ne dépend pas de z, mais de h seul car si $(h, z') \in \mathrm{H}\boxtimes\mathrm{E}$, $p_{\mathrm{E}}z' = p_{\mathrm{H}}h = p_{\mathrm{E}}z$ et $z' = z.l$ $(l \in \mathrm{L}_m)$ d'où

$$z'.[t_\omega(h, z')]^{-1} = z.l.[t_\omega(h, z.l)]^{-1} = (z.l)[t_\omega(h, z).l]^{-1} = z.[t_\omega(h, z)]^{-1}$$

(8) définit donc une application unique f de H dans E; elle est différentiable puisque, au-dessus d'un ouvert $\mathrm{U} \subset \mathrm{X}$ muni d'une section différentiable, s de E, (8) peut s'écrire

$$f(h) = s(ph).[t_\omega(h, s(ph))]^{-1}$$

et que t_ω lui-même est une fonction différentiable sur $\mathrm{H}\boxtimes\mathrm{E}$. Enfin f est un homomorphisme car

$$f(h.g) = z[t_\omega(h.g, z)]^{-1} = z[g^{-1}.t_\omega(h, z)]^{-1} = z.[t_\omega(h, z)]^{-1}.g = f(h).g.$$

La démonstration s'achève alors immédiatement en appliquant la proposition (I, 5, 3); elle s'étend sans modification aux espaces de repères complexes pourvu que l'on utilise le tenseur complexe $t^c\omega$ associé à ω qui est à valeurs dans CL_m.

Nous avons établi (Ch. II, § 3 et § 5) une correspondance biunivoque entre formes tensorielles sur un e.f.p. et tenseurs associés; nous avons vu que la propriété (3) pour ω équivaut pour t_ω à prendre ses valeurs dans L_m. Comme les tenseurs d'un certain type sur un e.f.p. correspondent biunivoquement aux sections d'un certain e.f. associé, la proposition (III, 4, 1) a le :

Corollaire. — *Soit un e.f.p.* H(X, G), *où* G *est un sous-groupe de Lie de* L_m *(resp.* CL_m*)* ($m = \dim$ X)*. Les structures d'espace de repères sur* H *correspondent biunivoquement aux sections du fibré de fibre* L_m *(resp.* CL_m*) associé à* $\mathrm{H}\boxtimes\mathrm{E}$

(*resp.* $H \boxtimes E^C$), $G \times L_m$ (*resp.* $G \times CL_m$) *opérant sur la fibre par*

$$(g, l), t \to g^{-1}.t.l \qquad g \in G;\ l, t \in L_m \ (\textit{resp. } CL_m).$$

Pour une forme tensorielle Λ sur un espace de repères $H(X, G)$ on peut avoir une notion plus simple de tenseur associé que sur un e.f.p. quelconque. Supposons d'abord H espace de repères réels et Λ à valeurs dans un espace vectoriel réel M : $t\Lambda$ est un tenseur sur $H \boxtimes E$. Soient les applications

$i : H \to E$ inclusion

$j : H \to H \boxtimes E$, $h \in H \to (h, h) \in H \boxtimes E$, application qui identifie H à la diagonale du s.e.f.p. $H \boxtimes H \subset H \boxtimes E$;

$f : \quad H \boxtimes E \to H, \quad (h, z) \to h, \quad h \in H, \quad z \in E, \quad p_H h = p_E z;$
$g : \quad H \boxtimes E \to E, \quad (h, z) \to z, \quad h \in H, \quad z \in E, \quad p_H h = p_E z.$

On a donc

(9) $\qquad f \circ j = \text{identité de } H \qquad \text{et} \qquad g \circ j = i.$

$t'\Lambda = j^*t\Lambda$ est un tenseur sur H puisque j est un homomorphisme d'e.f.p. De (9) découle $\Lambda = j^*f^*\Lambda$ et la formule ((8) ch. II, § 3) devient

$$\Lambda = j^*\left[(t\Lambda).\overset{q}{\wedge} g^*\theta\right] = (j^*t\Lambda).\left(\overset{q}{\wedge} j^*\left(g^*\theta\right)\right)$$

ou

$$\Lambda = (t'\Lambda).\left(\overset{q}{\wedge} j^*g^*\theta\right)$$

soit d'après (9)

$$\Lambda = (t'\Lambda).\left(\overset{q}{\wedge} i^*\theta\right)$$

ou, comme $i^*\theta$ n'est autre que la forme fondamentale ω de H

(10) $$\Lambda = (t'\Lambda).\left(\overset{q}{\wedge}\omega\right).$$

Réciproquement, l'application de la proposition (II, 3, 1) montre que si λ est un tenseur sur H à valeurs dans $M \otimes \overset{q}{\wedge} R^{m*}$ et de type $\rho_1(G)$, $\left(\rho_1(g) = \mathcal{R}(g) \otimes \overset{q}{\wedge} g^{-1}\right)$, $\Lambda = \lambda.\left(\overset{q}{\wedge}\omega\right)$ est une q-forme tensorielle telle que $\lambda = t'\Lambda$.

De même, si H est un espace de repères complexes et Λ à valeurs dans l'*espace vectoriel complexe* M, $t^C\Lambda$ est un tenseur sur $H \boxtimes E^C$; l'inclusion $H \subset E^C$ permet de définir des applications I, J, ... analogues à i, j, ... et $t'^C\Lambda = J^*t^C\Lambda$ est un ten-

seur sur H lié à Λ par une formule analogue à (10), la correspondance entre Λ et $t'^{\mathrm{C}}\Lambda$ étant encore biunivoque.

Si H est un *espace de repères réels* et M un *espace vectoriel complexe* il se trouve définis deux tenseurs associés sur H suivant que l'on utilise l'inclusion $H \subset E$ (ce qui définit $t'\Lambda$ à valeurs dans $M \otimes_{\mathrm{R}} \overset{q}{\wedge} \mathrm{R}^{m*}$) ou $H \subset E^{\mathrm{C}}$ (ce qui définit $t'^{\mathrm{C}}\Lambda$ à valeurs dans $M \otimes_{\mathrm{C}} \overset{q}{\wedge} \mathrm{C}^{m*}$) : la remarque faite au ch. II, § 5 montre que ces deux tenseurs coïncident modulo l'identification canonique de $M \otimes_{\mathrm{C}} \overset{q}{\wedge} \mathrm{C}^{m*}$ et $M \otimes_{\mathrm{R}} \overset{q}{\wedge} \mathrm{R}^{m*}$.

Au contraire, si H est un *espace de repères complexes* et M un *espace vectoriel réel* (n'admettant pas de structure complexe pour laquelle les $\mathcal{R}(g)$ soient des transformations linéaires *sur* C) *on ne peut définir sur* H *lui-même un tenseur associé qui corresponde biunivoquement à* Λ par une formule analogue à (10). Supposons en effet un tel tenseur λ défini, tel que

$$\Lambda = \lambda . \left(\overset{q}{\wedge} \omega \right) \tag{11}$$

alors, nécessairement pour $h \in H$, $\lambda(h) \in M \otimes_{\mathrm{R}} \overset{q}{\wedge} \mathrm{C}^{m*}$. Or Λ n'est défini que sur l'espace Θ_h tangent à H en h et non sur son complexifié Θ_h^{C} : $\lambda(h)$ n'est donc astreint par (II) qu'à la condition

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathcal{C}_h) &= \lambda(h) . \left\langle \overset{q}{\wedge} \omega,\ \mathcal{C}_h \right\rangle, \qquad \mathcal{C}_h \in \overset{q}{\wedge} \Theta_h \\ &= \lambda(h) . h^{-1} . p\mathcal{C}_h \end{aligned}$$

(avec les notations simplifiées du ch. II). Quand $\mathcal{C}_h$ décrit $\overset{q}{\wedge} \Theta_h$, $p\mathcal{C}_h$ décrit $\overset{q}{\wedge} \mathrm{T}_x (x = ph)$ et $h^{-1}p\mathcal{C}_h$ décrit $\overset{q}{\wedge} h^{-1}\mathrm{T}_x$ où $h^{-1}\mathrm{T}_x$ est un sous-espace vectoriel (réel) de C^m de dimension réelle m : $\lambda(h)$ n'est donc pas complètement déterminée par (11).

Pour définir Λ par un tenseur sur H on peut cependant procéder ainsi : soit M′ un espace vectoriel complexe tel que $M' \supset M$ et $M' = M + iM$, et que de plus $\mathcal{R}(g)$ s'étende en un automorphisme complexe de M′. On peut prendre par exemple pour M′ le complexifié de M : ce n'est pas nécessairement le plus commode. Λ est donc une forme tensorielle complexe à valeurs dans M′ et de type $\mathcal{R}(G)$ qui, pour les *vecteurs tangents réels* prend ses valeurs dans $M \subset M'$. A Λ sont maintenant associés les tenseurs $t'^{\mathrm{C}}\Lambda$ (resp. $t^{\mathrm{C}}\Lambda$) sur H (resp. $H \boxtimes E^{\mathrm{C}}$) à

valeurs dans $M' \otimes_{\mathbf{C}} \overset{q}{\wedge} \mathbf{C}^{m*}$ — ainsi que $t\Lambda$ sur $H \boxtimes E$ à valeurs dans $M' \otimes_{\mathbf{R}} \overset{q}{\wedge} \mathbf{R}^{m*}$. Comme les tenseurs $t'^{\mathbf{C}}\Lambda$ correspondent biunivoquement aux q-formes Λ sur H à valeurs dans M', cherchons à caractériser ceux pour lesquels Λ est à valeurs dans M. Or $t'^{\mathbf{C}}\Lambda$ est déterminé biunivoquement par $t^{\mathbf{C}}\Lambda$ dont la restriction à $H \boxtimes E$ est $t\Lambda$ (ch. II, 5) : de sorte que $t'^{\mathbf{C}}\Lambda$ est déterminé par $t\Lambda$. Pour que Λ soit à valeurs dans M il faut et suffit que $t\Lambda$ soit à valeurs dans $V = M \otimes_{\mathbf{R}} \overset{q}{\wedge} \mathbf{R}^{m*} \subset M' \otimes_{\mathbf{R}} \overset{q}{\wedge} \mathbf{R}^{m*}$; $t^{\mathbf{C}}\Lambda$ et $t'^{\mathbf{C}}\Lambda$ prennent donc leurs valeurs dans l'orbite de V par $\mathbf{CL}_m$, orbite qui n'est pas en général un sous-espace vectoriel (réel) de $M' \otimes_{\mathbf{C}} \overset{q}{\wedge} \mathbf{C}^{m*}$ de sorte que la condition sur $t'^{\mathbf{C}}\Lambda$ se traduira en général par une *condition non linéaire.*

C'est pourquoi dans la suite on ne parlera de tenseur associé sur H, à une forme Λ sur H à valeurs dans M que si H *est un espace de repères réels et* M *quelconque* ou H *un espace de repères complexes et* M *complexe.* Il n'y a alors aucune ambiguïté et ce tenseur sera toujours noté $t\Lambda$. Énonçons

PROPOSITION III, 4, 2. — *Soit* H(X, G) *un espace de repères réels* (*resp. complexes*) *de forme fondamentale* ω *et* M *un espace vectoriel* (*resp. espace vectoriel complexe*). *Les q-formes* Λ *sur* H *à valeurs dans* M *correspondent biunivoquement aux tenseurs sur* H *à valeurs dans* $M \otimes_{\mathbf{R}} \overset{q}{\wedge} \mathbf{R}^{m*}$ $\left(\text{resp. } M \otimes_{\mathbf{C}} \overset{q}{\wedge} \mathbf{C}^{m*}\right)$ *et de type* $\rho_1(G)$ *où* $\rho_1(g) = \mathcal{R}(g) \otimes \overset{q}{\wedge} g^{-1}$. *Le tenseur correspondant à* Λ *est le tenseur associé sur* H, $t\Lambda$, *défini par*

$$\Lambda = (t\Lambda).\left(\overset{q}{\wedge}\omega\right). \tag{12}$$

Dans la base $\{e_A\}$ de M et la base canonique de $\mathbf{R}^m$ (resp. $\mathbf{C}^m$), (12) s'écrit

$$\Lambda^A = \frac{1}{q\,!}(t\Lambda)^A_{i_1 \dots i_q} \omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_q} \tag{13}$$

où les ω^i composantes de ω sont des formes globales sur H linéairement indépendantes, et les composantes $(t\Lambda)^A_{i_1 \dots i_q}$ du tenseur associé des fonctions à valeurs réelles (resp. complexes) supposées antisymétriques par rapport aux indices i.

Si $H = E$ (resp. $E^{\mathbf{C}}$) on retrouve la notion habituelle de

tenseur canoniquement associé en prenant l'image réciproque de (13) par des sections locales. En particulier, si l'on applique (12) à ω elle-même, il vient $\omega = (t\omega).\omega$, ce qui montre que $t\omega$ est le tenseur constant sur $H =$ à l'identité de L_m (resp. CL_m).

5. — Connexions sur les espaces de repères.

A) Nous appelons *connexion linéaire* sur X (resp. *linéaire complexe*) une connexion sur E(X) (resp. $E^C(X)$). S(G, H) étant une G-structure donnée nous appelons H-connexion, ou S-connexion indifféremment, une connexion sur H. Le groupe $G \subset L_m$ étant seul donné, nous appelons G-connexion une H-connexion arbitraire.

Soit γ une H-connexion et $\hat{\gamma}$ son extension à E (resp. E^C); π et $\hat{\pi}$ leurs formes respectives; un chemin dans H horizontal pour γ est aussi horizontal pour $\hat{\gamma}$, puisque π est la forme induite sur H par $\hat{\pi}$; de l'unicité du chemin horizontal pour une connexion au-dessus d'un chemin donné de X et ayant une origine z donnée, découle alors que la nappe d'holonomie d'origine $z \in H$ est la même pour les deux connexions, et par conséquent aussi les groupes d'holonomie pour les deux connexions: en particulier $\hat{\psi}_z \subset G$. Réciproquement si Γ est une connexion linéaire et si, en un point $z \in E$ (resp. E^C) le groupe d'holonomie $\psi_z \subset G$, la nappe d'holonomie H'_z étant un ψ_z-s.e.f.p. différentiable (ch. II, 4) $H = H'_z.G$ définit une G-structure S. D'autre part le champ d'holonomie de Γ en tout point $z' \in H'_z$ étant tangent à H'_z donc à H, on voit immédiatement que le champ d'holonomie de Γ est tangent à H en tout point de H : Γ est l'extension d'une H-connexion. Nous avons établi :

THÉORÈME III, 5, 1 ([16]). — *Pour qu'il existe sur* X *une* G-*structure* S *il faut et suffit qu'il existe une connexion linéaire* Γ *sur* X *dont le groupe d'holonomie en un repère* $z \in E(X)$ (*resp.* $E^C(X)$) *soit un sous-groupe de* G : Γ *est alors l'extension d'une* S-*connexion.*

Soit maintenant un groupe G tel que les G-structures puis-

([16]) Ce résultat contient ceux de [22] § 118 et de [18] ch. III, § 5.

sent être définies par un tenseur t à valeurs dans M au sens de la proposition (III, 2) dont nous reprenons les notations. G étant le sous-groupe des $g \in L_m$ tels que $\mathfrak{R}(g).u = u$, $\underline{G}$ est la sous-algèbre des $\lambda \in \underline{L_m}$ tels que $\tilde{\mathfrak{R}}(\lambda).u = 0$.

Soient S(G, H) une G-structure, γ une S-connexion et $\hat{\gamma}$ la connexion linéaire extension de γ, π et $\hat{\pi}$ leurs formes respectives, ∇ et $\hat{\nabla}$ les différentiations absolues correspondantes et t le tenseur sur E définissant la structure. D'après ((2), ch. II, 4) on a

$$\hat{\nabla} t = dt + \tilde{\mathfrak{R}}(\hat{\pi}).t$$

d'où, i étant l'injection H → E

$$\begin{aligned} i^*\hat{\nabla} t &= di^*t + \tilde{\mathfrak{R}}(i^*\hat{\pi}).i^*t \\ &= di^*t + \tilde{\mathfrak{R}}(\pi).i^*t = \nabla i^*t \end{aligned}$$

i^*t étant constant sur H et égal à u

$$i^*\hat{\nabla} t = \tilde{\mathfrak{R}}(\pi).u \tag{1}$$

c'est-à-dire, si $\pi = \varepsilon_\rho \otimes \pi^\rho$ ($\{\varepsilon_\rho\}$ base de $\underline{G}$)

$$i^*\hat{\nabla} t = \tilde{\mathfrak{R}}(\varepsilon_\rho).u \otimes \pi^\rho = 0$$

ce qui entraîne $\hat{\nabla} t = 0$.

Réciproquement soit $\hat{\gamma}$ une connexion linéaire de forme $\hat{\pi}$ telle que $\hat{\nabla} t = 0$. $\pi = i^*\hat{\pi}$ est une 1-forme sur H de type adjoint à valeurs dans $\underline{L_m}$ dont la restriction aux fibres de H coïncide avec la forme β relative à H (ch. II, § 4, A) parce que les translations à droite de G sur H sont les restrictions des translations à droite de G opérant sur E (déf. I, 5, 2). Pour que π soit une forme de connexion sur H, il suffit donc que, de plus, elle prenne ses valeurs dans $\underline{G}$. Soit une base de $\underline{L_m}$ $\{\varepsilon_\rho, \varepsilon_a\}$ obtenue en complétant la base $\{\varepsilon_\rho\}$ de $\underline{G}$: $\pi = \varepsilon_\rho \otimes \pi^\rho + \varepsilon_a \otimes \pi^a$. Sur H, $i^*\hat{\nabla} t$ est encore donnée par (1) et est nulle par hypothèse;

or $\quad \tilde{\mathfrak{R}}(\pi).u = \tilde{\mathfrak{R}}(\varepsilon_\rho).u \otimes \pi^\rho + \tilde{\mathfrak{R}}(\varepsilon_a).u \otimes \pi^a = \tilde{\mathfrak{R}}(\varepsilon_a).u \otimes \pi^a$

puisque $\varepsilon_\rho \in \underline{G}$; notre hypothèse entraîne donc

$$\tilde{\mathfrak{R}}(\varepsilon_a).u \otimes \pi^a = 0. \tag{2}$$

Les vecteurs $\tilde{\mathfrak{R}}(\varepsilon_a).u$ sont linéairement indépendants, car $\sum_a \mu_a \tilde{\mathfrak{R}}(\varepsilon_a).u = 0$ entraîne $\sum_a \tilde{\mathfrak{R}}(\mu^a \varepsilon_a).u = 0$ c'est-à-dire $\mu^a \varepsilon_a \in \underline{G}$

ce qui est absurde; par conséquent (2) entraîne la nullité des formes π^a, et π est à valeurs dans $\underline{G}$. Nous avons établi :

THÉORÈME III, 5, 2. — *Si la G-structure S sur X peut être définie par le tenseur t sur E(X) (resp. $E^C(X)$), la condition nécessaire et suffisante pour qu'une connexion linéaire (resp. linéaire complexe) sur X soit l'extension d'une S-connexion est que la différentielle absolue de t dans cette connexion soit nulle.*

Ce théorème contient la caractérisation des connexions linéaires qui sont euclidiennes pour une métrique donnée ([22], § 51), presque complexes ([22] § 109), presque hermitiennes (une structure presque hermitienne étant définie par deux tenseurs, le tenseur métrique et le tenseur presque complexe, entre dans notre classe de structures : deux tenseurs pouvant être considérés comme un seul tenseur à valeurs dans la somme directe de leurs espaces de valeurs). Il contient de même la caractérisation des connexions linéaires complexes qui sont des π-connexions pour une π-structure donnée ([18] ch. II, § 6), des connexions linéaires complexes qui sont des connexions presque hermitiennes au sens large pour une structure presque hermitienne au sens large donnée ([17]) (ibid. ch. III, § 4).

B) *Torsion.* — Dans ces deux alinéas, H = H(X, G) est un espace de repères muni d'une connexion γ déterminée; K désigne l'un ou l'autre des corps R ou C suivant que H est réel ou complexe. L'existence sur H de la 1-forme fondamentale ω à valeurs dans K^m entraîne l'existence pour la connexion γ d'un invariant supplémentaire, la *forme de torsion :*

$$\Sigma = \nabla\omega = d\omega + \pi.\omega \tag{2}$$

(puisque la représentation de G dans K^m définissant le type de ω est sa représentation comme groupe linéaire de K^m). Le tenseur $t\Sigma$ associé à Σ sur H est le *tenseur de torsion* de γ. Naturellement Σ et $t\Sigma$ sont les formes et le tenseur induits sur H par la torsion

$$\hat{\Sigma} = \hat{\nabla}\theta = d\theta + \hat{\pi}.\theta \tag{3}$$

([17]) Une structure presque hermitienne au sens large est définie par G. Legrand [18] par la donnée d'une métrique complexe Φ et d'un champ d'opérateurs $\mathfrak{J}$ sur T^C_X de carré identité, tels que $\Phi(\mathfrak{J}u, \mathfrak{J}v) = -\Phi(u, v)$ $u, v \in T^C_X$.

de la connexion linéaire $\hat{\gamma}$ extension de γ et son tenseur canoniquement associé $t\hat{\Sigma}$. L'identité ((5) ch. II, § 4) fournit la différentielle absolue de Σ

(4) $$\nabla\Sigma = \nabla^2\omega = \Omega . \omega.$$

C'est l'identité de Bianchi pour la torsion.

C) *Dérivée covariante. Identité de Ricci généralisée.* — Λ étant une q-forme tensorielle ($q = 0, 1, \ldots, m$) sur l'espace de repères H(X, G) à valeurs dans l'espace vectoriel M (réel si H est réel, complexe si H est complexe), nous appelons dérivée covariante de Λ le tenseur sur H

(5) $$D\Lambda = t\nabla t\Lambda.$$

L'opération de dérivation covariante est propre aux espaces de repères, à la différence de la différenciation absolue qui s'opère sur toute e.f.p. différentiable.

$t\Lambda$ étant un tenseur de type $\mathfrak{R}(g) \otimes \overset{q}{\wedge} g^{-1}$ à valeurs dans $M \otimes_K \overset{q}{\wedge}(K^{m*})$ $\nabla t\Lambda$ est une 1-forme de même type et $D\Lambda$ est un tenseur de type $\mathfrak{R}(g) \otimes \overset{q}{\wedge} g^{-1} \otimes g^{-1}$ à valeurs dans $M \otimes_K \overset{q}{\wedge} K^{m*} \otimes_K K^{m*}$. La formule ((12) § 4) définissant le tenseur associé s'écrit puisque $\nabla t\Lambda$ est une 1-forme

(6) $$\nabla t\Lambda = (D\Lambda).\omega.$$

Lorsque Λ est un tenseur W, comme $tW = W$, (5) devient $DW = t\nabla W$ et (6)

(7) $$\nabla W = (DW).\omega.$$

Dans ce cas et si H = E, ou bien si Λ est une forme de type identité (image réciproque d'une forme de X) on retrouve la notion habituelle de dérivée covariante. Quand $q > 0$, au contraire, $t\nabla\Lambda$ est un tenseur à valeurs dans $M \otimes \overset{q+1}{\wedge} K^{m*}$ et de type $R(g) \otimes \overset{q+1}{\wedge} g^{-1}$ qui n'a donc aucune raison de coïncider avec $D\Lambda$. De la relation ((12) § 4)

$$\Lambda = (t\Lambda).\left(\overset{q}{\wedge}\omega\right)$$

on déduit, en appliquant la formule de différentiation d'un produit de ce type ((8), ch. II, § 4)

(8) $$\nabla\Lambda = (\nabla t\Lambda).\left(\overset{q}{\wedge}\omega\right) + (t\Lambda).\left(\nabla\overset{q}{\wedge}\omega\right).$$

Cette formule qui peut aussi s'écrire d'après (6)

$$(9)\quad \nabla\Lambda = (t\nabla\Lambda).\overset{q+1}{\wedge}\omega = (\mathrm{D}\Lambda.\omega).\left(\overset{q}{\wedge}\omega\right) + (t\Lambda).\left(\nabla\overset{q}{\wedge}\omega\right)$$

permettra de calculer la différentielle absolue en fonction de la dérivée covariante et de $\nabla\overset{q}{\wedge}\omega$.

Appliquons-la d'abord au cas où $\Lambda = \nabla\Phi$ (Φ, $(q-1)$-forme tensorielle)

$$\nabla^2\Phi = ((\mathrm{D}\nabla\Phi).\omega).\left(\overset{q}{\wedge}\omega\right) + (t\nabla\Phi).\left(\nabla\overset{q}{\wedge}\omega\right).$$

Comme d'autre part $\nabla^2\Phi = \tilde{\mathfrak{R}}(\Omega).\Phi$ ((5) Ch. II, § 4) on obtient l'identité

$$(10)\quad ((\mathrm{D}\nabla\Phi).\omega).\overset{q}{\wedge}\omega = \tilde{\mathfrak{R}}(\Omega).\Phi - (t\nabla\Phi).\left(\nabla\overset{q}{\wedge}\omega\right)$$
$$(\text{degré}\ \Phi = q-1)$$

à laquelle on peut donner le nom d'*identité de Ricci généralisée.* Prenons en effet le cas où Φ est un tenseur W ($q = 1$); comme $\mathrm{W} = t\mathrm{W}$ et $\mathrm{DW} = t\nabla\mathrm{W}$ on a

$$\mathrm{D}\nabla\mathrm{W} = t\nabla t\nabla t\mathrm{W} = t\nabla t\mathrm{DW} = \mathrm{D}^2\mathrm{W}$$

et (10) s'écrit alors

$$(11)\qquad (\mathrm{D}^2\mathrm{W}.\omega).\omega = \tilde{\mathfrak{R}}(\Omega).\mathrm{W} - (\mathrm{DW}).\Sigma.$$

Cette formule est l'*identité de Ricci* proprement dite (plus générale d'ailleurs que l'identité habituelle puisque la représentation $\mathfrak{R}$ est quelconque). Pour le voir écrivons-la explicitement lorsque $\mathrm{W} = \mathrm{V}$ est un champ de vecteurs, en prenant les notations habituelles pour les composantes de la dérivée covariante. (11) s'écrit

$$(12)\qquad (\mathrm{D}^2\mathrm{V}.\omega).\omega = \Omega.\mathrm{V} - (\mathrm{DV}).\Sigma$$

soit

$$(13)\qquad (\nabla_\lambda\nabla_\mu\mathrm{V}^i\omega^\lambda)\wedge\omega^\mu = \Omega^i_j.\mathrm{V}^j - \nabla_k\mathrm{V}^i\Sigma^k.$$

Comme, avec les normalisations habituelles

$$\Omega^i_j = \frac{1}{2}\mathrm{R}^i_{j,\lambda\mu}\omega^\lambda\wedge\omega^\mu \qquad \text{et} \qquad \Sigma^k = -\,\mathrm{S}^k_{\lambda\mu}\omega^\lambda\wedge\omega^\mu$$

$R^i_{j,\lambda\mu}$ et $S^k_{\lambda\mu}$ étant antisymétriques en λ et μ, on obtient

(14)
$$\frac{1}{2}(\nabla_\lambda\nabla_\mu V^i - \nabla_\mu\nabla_\lambda V^i)\,\omega^\lambda\wedge\omega^\mu = \frac{1}{2}(R^i_{j,\lambda\mu}V^j + \nabla_k V^i . S^k_{\lambda\mu})\,\omega^\lambda\wedge\omega^\mu$$

soit enfin

$$\nabla_\lambda\nabla_\mu V^i - \nabla_\mu\nabla_\lambda V^i = R^i_{j,\lambda\mu}V^j + \nabla_k V^i . S^k_{\lambda\mu}.$$

Pour obtenir maintenant la forme explicite de (9) calculons $\nabla \overset{q}{\wedge}\omega$. De la définition de $\overset{q}{\wedge}\omega$ (ch. II, 2, E) et du caractère tensoriel de ω découle que $\overset{q}{\wedge}\omega$ est une forme tensorielle de type $\overset{q}{\wedge}(G)$ et

$$\nabla\left(\overset{q}{\wedge}\omega\right) = d\left(\overset{q}{\wedge}\omega\right) + \widetilde{\overset{q}{\wedge}}(\pi).\left(\overset{q}{\wedge}\omega\right)$$

$\{e_i\}$ étant la base canonique de K^m. La formule ((24) ch. II, § 2) donne l'expression de $\overset{q}{\wedge}\omega$ à l'aide des composantes ω^i de ω dans cette base

$$\overset{q}{\wedge}\omega = \frac{1}{q!}e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_q}\otimes\omega^{i_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{i_q}$$

d'où

(15)
$$d\left(\overset{q}{\wedge}\omega\right) = \frac{1}{q!}\sum_{k=1}^{q}(-1)^{k-1}e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_q}\otimes\omega^{i_1}\wedge\ldots\wedge d\omega^{i_k}\wedge\ldots\wedge\omega^{i_q}.$$

D'autre part, un calcul facile montre que dans la base $B = \{e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_q},\ i_1 < i_2 \ldots < i_q\}$ de $\overset{q}{\wedge}K^m$, l'opération $\widetilde{\overset{q}{\wedge}}(\lambda)$ ($\lambda \in \underline{L}_m$, resp. $\underline{CL}_m$) est donnée par ses composantes

$$\left(\widetilde{\overset{q}{\wedge}}(\lambda)\right)^{l_1\ldots l_q}_{i_1\ldots i_q} = \sum_{h=1}^{q}\varepsilon^{l_1\ldots l_q}_{i_1\ldots \underset{i_h}{p}\ldots i_q}\lambda^p_{i_h}\ \text{[18]}$$

où $\varepsilon^{l_1\ldots l_q}_{i_1\ldots i_q}$ est l'indicateur de permutation et λ^p_r les composantes

[18] Une suite d'indices $e_1 \ldots \underset{i_h}{p} \ldots i_q$ représente la suite obtenue en remplaçant dans la suite $i_1 \ldots i_h \ldots i_q$, i_h par p. De même une suite $i_1 \ldots \hat{i}_h \ldots i_q$ représente la suite $i_1 \ldots i_q$ où le terme i_h a été supprimé.

de λ dans la base canonique de $\underline{L_m}$ (resp. $\underline{CL_m}$) alors les composantes dans la base B de $\varphi = \left(\widetilde{\overset{q}{\wedge}}(\pi) . \overset{q}{\wedge}\omega\right)$ sont

$$\varphi^{l_1 \cdots l_q} = \sum_{i_1 < \cdots < i_q} \widetilde{\overset{q}{\wedge}}(\pi)^{l_1 \cdots l_q}_{i_1 \cdots i_q} \wedge \left(\overset{q}{\wedge}\omega\right)^{i_1 \cdots i_q}$$

$$= \sum_{k=1}^{q} \sum_{i_1 < \cdots < i_q} \varepsilon^{l_1 \cdots l_q}_{i_1 \cdots \underset{\hat{i}_k}{p}, \cdots i_q} \pi^p_{i_k} \wedge \omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_q}$$

$$= \frac{1}{q!} \sum_{k=1}^{q} \varepsilon^{l_1 \cdots l_q}_{i_1 \cdots \underset{\hat{i}_k}{p} \cdots i_q} \pi^p_{i_k} \wedge \omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_q}$$

ou, en faisant passer ω^{i_k} et p à la première place

$$\varphi^{l_1 \cdots l_q} = \frac{1}{q!} \sum_{k=1}^{q} \varepsilon^{l_1 \cdots l_q}_{p i_1 \cdots \hat{i}_k \cdots i_q} (\pi^p_{i_k} \wedge \omega^{i_k}) \wedge \omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_{k-1}} \wedge \omega^{i_{k+1}} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_q}$$

puis, en supprimant la sommation par rapport à k

$$\varphi^{l_1 \cdots l_q} = \frac{1}{(q-1)!} \varepsilon^{l_1 \cdots l_q}_{p i_2 \cdots i_q} (\pi^p_r \wedge \omega^r) \wedge \omega^{i_2} \ldots \wedge \omega^{i_q}$$

dans cette somme, la somme des termes ou $p = l_1$ est

$$\frac{1}{(q-1)!} \varepsilon^{l_1 l_2 \cdots l_q}_{l_1 i_2 \cdots i_q} (\pi^{l_1}_r \wedge \omega^r) \wedge \omega^{i_2} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_q} = (\pi^{l_1}_r \wedge \omega^r) \wedge \omega^{l_2} \wedge \ldots \wedge \omega^{l_q}$$

et, en procédant de même pour chaque indice l, il vient :

(16)

$$\varphi^{l_1 \cdots l_q} = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \omega^{l_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{l_{k-1}} \wedge (\pi^{l_k}_r \wedge \omega^r) \wedge \omega^{l_{k+1}} \wedge \ldots \wedge \omega^{l_q}$$

Comme cette expression est antisymétrique par rapport aux l,

$$\varphi = \sum_{i_1 < \cdots < i_q} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_q} \otimes \varphi^{i_1 \cdots i_q} = \frac{1}{q!} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_q} \otimes \varphi^{i_1 \cdots i_q}$$

et on obtient, en rapprochant (15) et (16), les composantes dans B de $\left(\nabla \overset{q}{\wedge} \omega\right)$

(17)

$$\left(\nabla \overset{q}{\wedge} \omega\right)^{l_1 \cdots l_q} = \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k-1} \omega^{l_1} \wedge \ldots \wedge (d\omega^{l_k} + \pi^{l_k}_r \wedge \omega^r) \wedge \ldots \wedge \omega^{l_q}$$

$$= \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k-1} \omega^{l_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{l_{k-1}} \wedge \Sigma^{l_k} \wedge \omega^{l_{k+1}} \wedge \ldots \wedge \omega^{l_q}.$$

Calculons maintenant chacun des termes de (9) dans la base $\{e_A\}$ de M :

$$(18)\qquad (\nabla\Lambda)^A = \frac{1}{(q+1)!}(t\nabla\Lambda)^A_{i_0 i_1 \dots i_q}\,\omega^{i_0}\wedge\dots\wedge\omega^{i_q}$$

$$(19)\qquad \left[(D\Lambda.\omega).\left(\overset{q}{\wedge}\omega\right)\right]^A$$

$$= \frac{1}{q!}((D\Lambda)^A_{i_0, i_1\dots i_q}\omega^{i_0})\wedge\omega^{i_1}\wedge\dots\wedge\omega^{i_q}$$

$$= \frac{1}{(q+1)!}\left(\sum_{l=0}^{q}(-1)^l(D\Lambda)^A_{i_l, i_0\dots\hat{i}_l\dots i_q}\right)\omega^{i_0}\wedge\dots\wedge\omega^{i_q}$$

pour rendre le coefficient de $\omega^{i_0}\wedge\dots\wedge\omega^{i_q}$ antisymétrique par rapport aux i.

D'autre part,

$$(20)\qquad \left[(t\Lambda).\left(\nabla\overset{q}{\wedge}\omega\right)\right]^A$$

$$= \frac{1}{q!}(t\Lambda)^A_{i_1\dots i_q}\left(\nabla\overset{q}{\wedge}\omega\right)^{i_1\dots i_q},$$

$$= \frac{1}{q!}(t\Lambda)^A_{i_1\dots i_q}\sum_{k=1}^{q}(-1)^{k-1}\omega^{i_1}\wedge\dots\wedge\omega^{i_{k-1}}\wedge\Sigma^{i_k}\wedge\omega^{i_{k+1}}\wedge\dots\wedge\omega^{i_q},$$

$$= \frac{1}{(q-1)!}(t\Lambda)^A_{pi_2\dots i_q}\Sigma^p\wedge\omega^{i_2}\wedge\dots\wedge\omega^{i_q}.$$

$$= -\frac{1}{(q-1)!}(t\Lambda)^A_{pi_2\dots i_q}S^p_{i_0 i_1}\omega^{i_0}\wedge\omega^{i_1}\wedge\omega^{i_2}\wedge\dots\wedge\omega^{i_q},$$

$$= \frac{1}{q!}\sum_{l=1}^{q}(-1)^l S^p_{i_0 i_l}(t\Lambda)^A_{pi_1\dots\hat{i}_l\dots i_q}\omega^{i_0}\wedge\dots\wedge\omega^{i_q},$$

$$= \frac{1}{(q+1)!}\sum_{\substack{k<l\\ k,\,l=0,1,\dots q}} 2.(-1)^{k+l}S^p_{i_k i_l}(t\Lambda)^A_{pi_0\dots\hat{i}_k\dots\hat{i}_l\dots i_q}\omega^{i_0}\wedge\dots\wedge\omega^{i_q}.$$

par un calcul d'antisymétrisation de type classique. Alors, dans (18) (19) et (20) les coefficients de $\omega^{i_0}\wedge\dots\wedge\omega^{i_q}$ étant tous antisymétriques, (9) devient

$$(21)\qquad (t\nabla\Lambda)^A_{i_0 i_1\dots i_q} - \sum_{l=0}^{q}(-1)^l(D\Lambda)^A_{i_l, i_0\dots\hat{i}_l\dots i_q}$$

$$= \sum_{\substack{k<l\\ k,\,l=0,1,\dots q}} 2(-1)^{(k+l)}S^p_{i_k i_l}(t\Lambda)^A_{pi_0\dots\hat{i}_k\dots\hat{i}_l\dots i_q}.$$

Proposition III, 5. — *Sur un espace de repères, le tenseur associé à la différentielle absolue d'une q-forme* Λ *est égal à l'antisymétrisé de la dérivée covariante de* Λ *dans une connexion*

à torsion nulle; il en diffère par un terme bilinéaire par rapport à la torsion et au tenseur associé à Λ *lorsque la torsion n'est pas nulle, suivant la formule* (21).

Application. — Si α est une q-forme scalaire sur X, $\Lambda = p^*\alpha$ est une q-forme de type identité et $\nabla p^*\alpha = dp^*\alpha = p^*d\alpha$; de sorte que l'on obtient, en prenant les images réciproques des deux membres de (21) par une section locale arbitraire et en utilisant les notations classiques, la relation qui lie la différentielle extérieure d'une forme à sa dérivée covariante :

$$(22)\quad (d\alpha)_{i_0 i_1 \dots i_q} - \sum_{l=0}^{q} \nabla\alpha_{i_l, i_0 \dots \hat{i}_l \dots i_q} = \sum_{\substack{k<l \\ k,l=0,1,\dots,q}} 2(-1)^{k+l} S^p_{i_k i_l} \alpha_{p i_0 \dots \hat{i}_k \dots \hat{i}_l \dots i_q}$$

6. — Tenseur de structure d'une G-structure.

A) Soit S une G-structure d'espace de repères H et de forme fondamentale ω. On désigne par K (resp. KL_m) le corps des réels (resp. le groupe L_m) si S est réelle ou le corps des complexes (resp. CL_m) si S est complexe.

Soient γ et γ' des H-connexions de formes π, π'; et Σ, Σ' leurs torsions. Les tenseurs de torsion sont des tenseurs sur H à valeurs dans $P = K^m \otimes_K \overset{2}{\wedge} K^{m*}$ et de type $\mathfrak{R}(G)$ où $\mathfrak{R}$ est la représentation de KL_m dans P telle que

$$\mathfrak{R}(l) = l \otimes \overset{2}{\wedge} l^{-1} \qquad l \in KL_m$$

$\pi' - \pi = u$ est une 1-forme tensorielle sur H de type adjoint à valeurs dans $\underline{G}$. *Supposons, si* S *est complexe, que* $\underline{G}$ *est un sous-espace vectoriel complexe de* $\overline{CL_m}$. Alors (§ 4) u a un tenseur associé $tu = \xi$ sur H — dont la donnée équivaut à celle de u — à valeurs dans $N = N_G = \underline{G} \otimes_K K^{m*}$ et tel que

$$(1)\qquad u = \xi.\omega$$

ξ est de type $\mathfrak{Q}(G)$ où $\mathfrak{Q}$ est la représentation de KL_m dans $\mathfrak{N} = \overline{KL_m} \otimes_K K^{m*}$ telle que $\mathfrak{Q}(l) = \operatorname{adj} l \otimes l^{-1}$ ($N_G \subset \mathfrak{N}$ est évidemment un sous-espace invariant par $\mathfrak{Q}(G)$).

Comme $\mathfrak{N} = K^m \otimes_K K^{m*} \otimes_K K^{m*}$, P peut être considéré comme

le quotient de $\mathcal{T}$ par le sous-espace $\mathcal{S}$ engendré par les éléments $x \otimes f \otimes f$ ($x \in K^m$, $f \in K^{m*}$). Soit $-\mathcal{A}$ la projection naturelle $\mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathcal{S} = P$ $x \otimes f \otimes f' \to x \otimes (f \wedge f')$. Dans la base canonique $\{e_i\}$ de K^m (et les bases associées des autres espaces) $-\mathcal{A}$ se traduit par

$$t^i_{jk} \to (t^i_{jk} - t^i_{kj})$$

et il est évident sur les définitions que, pour tout $l \in KL_m$

$$\mathcal{A} \circ \mathcal{Q}(l) = \mathcal{R}(l) \circ \mathcal{A}. \tag{2}$$

Dans une base $\{\varepsilon_\rho = (a^i_{j\rho})\}$ de $\underline{G}$ (base sur K), les composantes de u sont données d'après (1) par

$$u^\rho = \xi^\rho_k \omega^k \tag{3}$$

(ξ^ρ_k composantes de ξ dans la base $\varepsilon_\rho \otimes x^i$ de N_G). D'après la définition de la torsion ((2) § 5) il vient

$$\begin{aligned}
\Sigma' - \Sigma &= (\pi' - \pi).\omega = u.\omega \\
&= (\varepsilon_\rho \otimes u^\rho).(e_k \otimes \omega^k) \\
&= (\varepsilon_\rho . e_k) \otimes u^\rho \wedge \omega^k \\
&= a^i_{k\rho} e_i \otimes \xi^\rho_j \omega^j \wedge \omega^k \\
&= e_i \otimes \frac{1}{2}(a^i_{k\rho}\xi^\rho_j - a^i_{j\rho}\xi^\rho_k)\, \omega^j \wedge \omega^k.
\end{aligned}$$

La parenthèse étant antisymétrique en j, k, ceci donne d'après ((13) § 4) les composantes de $t(\Sigma' - \Sigma)$ dans la base canonique de P

$$(t\Sigma' - t\Sigma)^i_{jk} = a^i_{k\rho}\xi^\rho_j - a^i_{j\rho}\xi^\rho_k. \tag{4}$$

Comme les composantes de ξ dans la base canonique de $\mathcal{T}$ sont $t^i_{jk} = a^i_{j\rho}\xi^\rho_k$, (4) se traduit par

$$t\Sigma' - t\Sigma = \mathcal{A} \circ \xi$$

ou, en appelant A la restriction de $\mathcal{A}$ à $N_G \subset \mathcal{T}$

$$t\Sigma' - t\Sigma = A \circ \xi \tag{5}$$

N_G étant invariant par $\mathcal{Q}(G)$, (2) devient

$$A \circ \mathcal{Q}(g) = \mathcal{R}(g) \circ A, \quad g \in G. \tag{6}$$

Soient $V_G = A(N_G)$, $M = M_G = P/V_G$ et α la projection naturelle $P \to M_G$. D'après (6) V_G est invariant par $\mathcal{R}(G)$ de

sorte que la représentation $\mathcal{R}(G)$ passe au quotient : soit ρ la représentation de G ainsi obtenue dans M; elle est définie par

$$\rho(g)\circ\alpha = \alpha\circ\mathcal{R}(g). \tag{8}$$

Alors d'après (6) $\alpha\circ t\Sigma' = \alpha\circ t\Sigma$ est une fonction t_S sur H à valeurs dans M (définie globalement et indépendante de la connexion) et telle que

$$t_S(z.g) = \alpha(t\Sigma(z.g)) \quad (z\in H,\ g\in G);$$

soit $\quad t_S(z.g) = \alpha(\mathcal{R}(g^{-1}).t\Sigma(z)) = \rho(g^{-1}).t_S(z).$

t_S est donc un tenseur sur H à valeurs dans M et de type $\rho(G)$ qui ne dépend que de la structure : nous l'appelons le *tenseur de structure* de S.

B) Soit réciproquement Σ_1 une 2-forme vectorielle sur H à valeurs dans K^m : est-elle la torsion Σ' d'une H-connexion γ'? Supposons remplie la condition nécessaire $\alpha\circ t\Sigma_1 = t_S$ et soit γ une H-connexion arbitraire. Avec les notations précédentes, la détermination de γ' équivaut à celle de la 1-forme tensorielle $u = \pi' - \pi$ qui équivaut elle-même (prop. III, 4, 2) à celle de son tenseur associé ξ à valeurs dans N. La condition imposée à γ', $\Sigma' = \Sigma_1$, équivaut à $\Sigma' - \Sigma = \Sigma_1 - \Sigma$ où le second membre est une 2-forme tensorielle donnée de même type Σ''; et la condition $\Sigma' - \Sigma = \Sigma''$ équivaut elle-même d'après (5) à

$$A\circ\xi = t\Sigma''. \tag{9}$$

D'autre part l'hypothèse $\alpha\circ t\Sigma_1 = t_S = \alpha\circ t\Sigma$ équivaut à

$$\alpha\circ t\Sigma'' = 0. \tag{10}$$

Soit N(H) (resp. P(H), M(H)) le fibré obtenu par modelage (def. I, 2) de N (resp. P, M) sur H, G opérant sur la fibre par $\mathfrak{Q}(G)$ (resp. $\mathcal{R}(G)$, $\rho(G)$); et soit $\widetilde{N(H)}$ $\left(\text{resp. } \widetilde{P(H)}, \widetilde{M(H)}\right)$ le faisceau des germes de sections de cet espace. A la suite exacte d'homomorphismes d'espaces vectoriels

$$N \xrightarrow{A} P \xrightarrow{\alpha} M \to 0$$

correspond une suite exacte d'homomorphismes de faisceaux

$$\widetilde{N(H)} \xrightarrow{\tilde{A}} \widetilde{P(H)} \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \widetilde{M(H)} \to 0$$

à laquelle correspond elle-même, puisque tous ces faisceaux sont des faisceaux de germes de section d'e.f. à fibre vectorielle, la suite exacte des groupes de cohomologie

$$(11)\quad \mathcal{H}_0(X, \widetilde{N(H)}) \xrightarrow{\tilde{A}_0} \mathcal{H}_0(X, \widetilde{P(H)}) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_0} \mathcal{H}_0(X, \widetilde{M(H)}) \rightarrow 0.$$

Les tenseurs sur H à valeurs dans N (resp. P, M) et de type $\mathfrak{Q}(G)$ (resp. $\mathfrak{R}(G)$, $\rho(G)$) correspondent biunivoquement aux sections de N(H) (resp. P(H), M(H)) c'est-à-dire aux éléments des groupes de cohomologie $\mathcal{H}_0(X, \widetilde{N(H)})$ (resp. $\mathcal{H}_0(X, \widetilde{P(H)})$, $\mathcal{H}_0(X, \widetilde{M(H)})$). Soit donc $s \in \mathcal{H}_0(X, \widetilde{N(H)})$ l'élément correspondant à ξ, $\sigma \in \mathcal{H}_0(X, \widetilde{P(H)})$ celui qui correspond à $t\Sigma''$; (9) et (10) équivalent respectivement à

$$(12)\quad \tilde{A}_0(s) = \sigma,$$
$$(13)\quad \tilde{\alpha}_0(\sigma) = 0.$$

La suite (11) étant exacte, l'image de $\tilde{A}_0$ coïncide avec le noyau de $\tilde{\alpha}_0$ et s satisfaisant à (12) existe dès que σ satisfait à (13). Nous avons donc montré l'existence de la connexion γ'.

C) Ces calculs et démonstrations ne s'étendent pas au cas où, S étant complexes, $\underline{G}$ n'est pas un sous-espace vectoriel complexe de $\underline{CL_m}$. Si d'abord $\underline{G}$ n'admet pas de structure d'algèbre de Lie complexe, les adj g ($g \in G$) ne sont pas des automorphismes d'espace vectoriel complexe de $\underline{G}$: et les formes u sur H à valeurs dans $\underline{G}$ de type adjoint n'admettent pas de tenseur associé sur H (cf. § 4). Si même $\underline{G}$ admet une telle structure non induite par celle de $\underline{CL_m}$, l'espace $\underline{G} \otimes_C C^{m*}$ des valeurs des tenseurs associé à u ne s'identifie pas à un sous-espace complexe de $\underline{CL_m} \otimes_C C^{m*}$ et la démonstration tombe encore en défaut.

On peut donc penser à procéder comme au paragraphe 4: soit $\underline{G'} = \underline{G} + i\underline{G}$; les adj g ($g \in G$) sont des automorphismes d'espace vectoriel complexe de $\underline{G'}$ et u un tenseur associé ξ à valeurs dans $\underline{G'} \otimes_C C^{m*} \subset \mathcal{N}$. Les calculs de l'alinéa A) restent donc valables et permettent encore de définir un « tenseur de structure » t'_S: mais ceux de B) ne le sont pas car ξ est en général astreint à des conditions supplémentaires non linéaires (§ 4). En fait d'ailleurs ce tenseur t'_S n'a aucune raison

de caractériser les torsions des S-connexions : soit G′ le sous-groupe connexe de CL_m engendré par $\underline{G'}$ et supposons G lui-même connexe; alors $G' \supset G$ et S est subordonnée à une G′-structure S′, t'_S n'est autre que le tenseur de structure de S′ de sorte qu'il caractérise les torsions des S′-connexions qui en général ne sont pas des S-connexions (cf. § 8, D).

D) Nous allons maintenant énoncer les résultats obtenus et en tirer les premières conséquences.

Définition III, 6. — *Une* G-structure *est dite* de première espèce *si elle est réelle ou si, étant complexe,* G *est un sous-groupe de Lie complexe de* CL_m. *Elle est de seconde espèce dans les autres cas.*

Remarquons que la condition : G sous-groupe de Lie complexe de CL_m (c'est-à-dire l'injection $G \to CL_m$ est une application analytique complexe) équivaut à $\underline{G}$ sous-espace vectoriel de complexe $\underline{CL_m}$.

Théorème III, 6, 1. — *Soit* G *un sous-groupe de Lie de* L_m, *ou un sous-groupe de Lie complexe de* CL_m *:* K *désigne le corps des réels dans le premier cas, le corps des complexes dans le second. A ce groupe est canoniquement associée une représentation* K*-linéaire* ρ *de* G *dans un espace vectoriel* M_G, *image de* $P = K^m \otimes_K \overset{2}{\wedge} K^{m*}$ *par un homomorphisme* α *de telle facon que*

1° *pour toute* G-*structure* S *de première espèce se trouve défini un tenseur* t_S *de type* $\rho(G)$ *à valeurs dans* M_G *sur l'espace* H *des repères distingués de* S : t_S *est le* tenseur de structure de S.

2° *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une* 2-*forme vectorielle* Σ *sur* H *soit la torsion d'une* S-*connexion est*

$$\alpha \circ t\Sigma = t_S.$$

Dans certains cas ce théorème prend une forme plus simple, qui nous le verrons, contient des théorèmes connus :

Théorèmes III, 6, 2. — G *satisfaisant aux mêmes hypothèses que dans le théorème* (III, 6, 1), *supposons de plus que le sous-espace* $V = \alpha^{-1}(0)$ *de* P *admette un supplémentaire* W *également invariant par* $\mathfrak{R}(G)$. *Pour toute* G-*structure de première espèce* S, *et toute* S-*connexion, le tenseur de torsion* (*sur* H) *est la somme*

de deux tenseurs, $t\Sigma = (t\Sigma)_V + (t\Sigma)_W$ *à valeurs respectivement dans* V *et* W :

1° $(t\Sigma)_W$ *ne dépend pas de la connexion et s'identifie à* t_S ($\rho(G)$ *s'identifie à la représentation induite par* $\mathcal{R}(G)$ *sur* W);

2° $(t\Sigma)_V$ *ne dépend que de la connexion et peut être choisi arbitrairement par un choix convenable de la connexion: en particulier il existe toujours une* S-*connexion dont le tenseur de torsion soit exactement réduit à* $t_S = (t\Sigma)_W$.

Dans les hypothèses de ce théorème, puisque $(t\Sigma)_V$ et $(t\Sigma)_W$ sont des tenseurs à valeurs dans P de type $\mathcal{R}(G)$, on a un énoncé analogue donnant une décomposition de la forme de torsion en somme de deux formes. D'autre part, soit π la forme de connexion d'une des connexions pour lesquelles $(t\Sigma)_V = 0$; alors d'après la définition de la torsion on a globalement sur H

$$(13)\quad \begin{cases} d\omega = -\pi.\omega + (t_S).\left(\overset{2}{\wedge}\,\omega\right) \\ \text{ou } d\omega^i = -\pi^i_j \wedge \omega^i + \dfrac{1}{2}(t_S)^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k \\ \text{ou } d\omega^i = a^i_{j\rho}\,\omega^j \wedge \pi^\rho + \dfrac{1}{2}(t_S)^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k \end{cases}$$

avec les notations de A); et réciproquement, si π est une H-connexion et si l'on peut écrire $d\omega$ sous la forme (13), t_S étant un tenseur à valeurs dans W, t_S est le tenseur de structure de S.

Dans les seules hypothèses du théorème (III, 6, 1) soit W_1 un supplémentaire de V, en général non invariant. Pour une H-connexion donnée de forme π, on a une décomposition $t\Sigma = (t\Sigma)_V + (t\Sigma)_{W_1}$; $(t\Sigma)_{W_1}(z) = C(z)$ étant la projection de $t_S(z)$ sur W_1 par la projection naturelle q, $P/V \to W_1$, C est une fonction sur H indépendante de la connexion et l'on peut écrire

$$(14)\quad d\omega^i = -\pi^i_j \wedge \omega^j + \frac{1}{2}(t\Sigma)_{V,}{}^i_{jk}\,\omega^j \wedge \omega^k + \frac{1}{2}(C)^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k.$$

Comme $(t\Sigma)_V(z) \in V$, pour tout $z \in H$, les équations aux inconnues $\eta^\rho_k(\rho = 1, \ldots, r;\ k = 1, \ldots m)$

$$(t\Sigma)_V,{}^i_{jk} = a^i_{k\rho}\eta^\rho_j - a^i_{j\rho}\eta^\rho_k \qquad (i, j, k = 1, \ldots, m;\ j < k)$$

sont compatibles, et, comme elles sont à coefficients constants, on peut leur trouver des solutions différentiables $\eta^\rho_k(z)$ (uniques

seulement si l'application A est injective). (14) devient alors puisque $\pi_j^i = a_{j\rho}^i \pi^\rho$

$$d\omega^i = \omega^j \wedge a_{j\rho}^i(\pi^\rho - \eta_k^\rho \omega^k) + \frac{1}{2} C_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k$$

ou

$$(15) \qquad \begin{cases} d\omega^i = \omega^j \wedge a_{j\rho}^i \pi'^\rho + \dfrac{1}{2} C_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k \\ \text{soit} \quad d\omega = -\pi'.\omega + C.\overset{2}{\wedge}\omega \end{cases}$$

Dans (15) $\pi' = \varepsilon_\rho \otimes \pi'^\rho$ est une forme globale sur H mais non canoniquement définie; de plus ce n'est pas une forme de connexion sur H, sinon C serait le tenseur de torsion de cette connexion, contrairement à l'hypothèse que W_1 n'est pas invariant par $\mathcal{R}(G)$. Enfin, dès que l'on a écrit sur H des relations telles que (15) où la fonction C prend ses valeurs dans W_1, C est la projection sur W_1 du tenseur de structure, qu'elle définit donc parfaitement.

En particulier, si l'on prend pour W_1 un supplémentaire de V engendré par un sous-ensemble de la base canonique de P, et si l'on désigne par $t_{j''k''}^{i''}$ les coordonnées de P nulles sur W_1 et par $t_{j',k'}^{i'}$ les autres, (15) s'écrit

$$(16) \qquad d\omega^i = \omega^j \wedge a_{j\rho}^i \pi'^\rho + \frac{1}{2} C_{j'k'}^{i'} \omega^{j'} \wedge \omega^{k'}.$$

Si l'on pose $F_{jk}^i = a_{k\rho}^i \eta_j^\rho - a_{j\rho}^i \eta_k^\rho (\eta_k^\rho \in K) (i, j, k = 1, \ldots, m; j < k)$ les indices $(^{i''}_{j''h''})$ sont caractérisés par la propriété que les formes linéaires $F_{j''k''}^{i''}$ sont linéairement indépendantes et en nombre maximal : les $C_{j'k'}^{i'}$ sont les *premiers invariants de la structure* tels qu'ils ont été définis par S.S. Chern dans [9] pour le cas réel. Les équations (13), (15) ou (16) peuvent être appelées *équations de structure* de S.

Soient r la dimension de G et s le rang de A. On a $\dim N = mr$ et $\dim P = \dfrac{m^2(m-1)}{2}$; s, inférieur ou égal à ces deux nombres, est égal au rang du système des $\dfrac{m^2(m-1)}{2}$ formes linéaires F_{jk}^i. On peut préciser :

Corollaire III, 6, 1. — Si A *est surjective, la torsion peut être choisie arbitrairement*; en particulier, pour toute G-structure S de première espèce il existe toujours une S-connexion à torsion nulle. Dans ce cas $s = \dfrac{m^2(m-1)}{2}$ ce qui exige $r \geqslant \dfrac{m(m-1)}{2}$.

Corollaire III, 6, 2. — *Si* A *est injective* (19), *la donnée de la torsion* Σ *détermine la connexion,* pourvu que $\alpha \circ t\Sigma = t_S$. Ceci se produit si $s = mr$ et exige donc $r \leqslant \frac{m(m-1)}{2}$. Si de plus on est dans les conditions d'application du théorème (III, 6, 2) tout G-structure admet une *connexion canonique* dont le tenseur de torsion coïncide avec le tenseur de structure (cf. 8, ex. B, E).

Corollaire III, 6, 3. — *Si* A *est bijective,* ce qui suppose $r = \frac{m(m-1)}{2}$ d'où, s'il est fermé, G est le groupe orthogonal ou orthogonal spécial d'une forme quadratique non dégénérée définie ou indéfinie, d'après des résultats de Weyl-Cartan (cf. W. Klingenberg [28] — la torsion est arbitraire et détermine univoquement la connexion : en particulier, il y a une *connexion canonique à torsion nulle.*

Corollaire III, 6, 4. — *Pour qu'une* G-*structure* S *de première espèce admette une* S-*connexion à torsion nulle, il faut et suffit que le tenseur de structure soit nul.*

7. — Calculs du tenseur de structure.

A) *Structures équivalentes.* — Soient S et S' des structures équivalentes d'espaces de repères respectifs H et $H' = H.l$, de groupes G et $G' = l^{-1}.G.l$. On considère soit S et S' réelles ($l \in L_m$, $K = R$), soit S complexe de première espèce : alors, quel que soit $l \in CL_m$, S' est complexe de première espèce ($K = C$).

Les différents espaces et applications sont notés comme au § 6, avec un indice s'ils dépendent de S ou G ($N' = N'_{G'} \ldots$). Alors

$$N' = \underline{G}' \otimes_K K^{m*} = l^{-1}\underline{G}.l \otimes_K K^{m*} = \mathcal{Q}(l^{-1})N$$

et $$V' = \mathcal{A}(N') = \mathcal{A} \circ \mathcal{Q}(l^{-1})(N) = \mathcal{R}(l^{-1})\mathcal{A}(N) = \mathcal{R}(l^{-1})V$$

de sorte que

(19) Dans le cas réel, cette hypothèse équivaut à celle-ci : 1er groupe déduit de G = identité (S. S. Chern [9]) ou G de type fini de degré 2 (P. Libermann). Cette remarque contient donc un théorème de P. Libermann dans [21]. C'est aussi la propriété (C) de Chern dans [10].

a) comme rang de $A = \dim V$, on a rang de $A =$ rang de A' et les deux structures sont dans la même situation pour les corollaires du § 6.

b) l'automorphisme $\mathcal{R}(l^{-1})$ de P passe aux quotients, donnant un isomorphisme $\bar{\rho}(l^{-1}) : M = P/V \to M' = P/V'$ tel que $\alpha' \circ \mathcal{R}(l^{-1}) = \bar{\rho}(l^{-1}) \circ \alpha$.

Soit γ une S-connexion et $\hat{\gamma}$ la connexion linéaire (resp. linéaire complexe) extension de γ : $\hat{\gamma}$ est aussi l'extension d'une S'-connexion γ' (invariance du champ de connexion par translations à droite) et, si Σ et Σ' sont les torsions (sur H et H') de γ et γ' :

$$t\Sigma'(z.l) = \mathcal{R}(l^{-1})t\Sigma(z) \quad (z \in H)$$

d'où

$$t_{S'}(z.l) = \alpha' \circ t\Sigma'(z.l) = \alpha' \circ \mathcal{R}(l^{-1})t\Sigma'(z) = \bar{\rho}(l^{-1}) \circ \alpha t\Sigma(z) = \bar{\rho}(l^{-1})t_S(z).$$

On a donc entre les deux tenseurs de structure la relation

$$D_l^* t_{S'} = \bar{\rho}(l^{-1}) t_S. \tag{1}$$

En particulier, si S' est une *structure associée à* S, $l = n \in N(G)$ (resp. $N^C(G)$); $G' = G$ entraîne $M' = M$, $\alpha' = \alpha$ et $\bar{\rho}(n^{-1})$ est l'automorphisme de M défini par

$$\alpha \circ \mathcal{R}(n^{-1}) = \bar{\rho}(n^{-1}) \circ \alpha \tag{2}$$

$\bar{\rho}$ est une représentation de N(G) dans M dont la restriction à $G \subset N(G)$ est ρ.

B) *Structures subordonnées.* — Soit avec les mêmes notations, S subordonnée à S'. Alors $G \subset G'$ entraîne $N \subset N'$ et $V = \mathcal{A}(N) \subset V' = \mathcal{A}(N')$ de sorte que

a) si A est surjective, A' l'est aussi;

b) si A' est injective, A l'est aussi : c'est-à-dire que, *si pour une G-structure la torsion détermine la connexion il en est de même pour les structures subordonnées.*

Les inclusions $V \subset V' \subset P$ entraînent l'existence d'une projection $\alpha_1 : P/V \to P/V'$ telle que $\alpha_1 \circ \alpha = \alpha'$ et que $\alpha_1 \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ \alpha' \ (g \in G)$. Soient i l'injection $H \to H'$ ($H \subset H'$), γ une H-connexion de forme π et γ' son extension à H', de forme π'. Alors $\omega = i^*\omega'$ et $\pi = i^*\pi'$ entraînent $\Sigma = i^*\Sigma'$ et $t\Sigma = i^*t\Sigma'$, d'où, puisque $t_S = \alpha \circ t\Sigma$

$$\alpha_1 \circ t_S = \alpha_1 \circ \alpha \circ t\Sigma = \alpha' \circ i^*t\Sigma' = i^*\alpha' \circ t\Sigma$$

soit

$$\alpha_1 . t_S = i^* t_{S'} \tag{2}$$

$t_{S'}$ étant déterminé par sa restriction $i^*t_{S'}$ à H′, (2) définit $t_{S'}$.

Cependant, si S est la plus grande structure subordonnée commune à S′ et S″ (H = H′ ∩ H″), N = N′ ∩ N″ mais, comme en général $\mathcal{A}(N' \cap N'') \neq \mathcal{A}(N) \cap \mathcal{A}(N')$, les tenseurs de structure de S′ et S″ ne suffisent pas en général à déterminer celui de S (cf. 8, E).

C) *Calcul local.* — Soient $U \subset X$, s une section locale distinguée et θ_U le corepère dual sur U. Le champ des plans tangents à l'image de la section s et de leurs translatés à droite par G détermine sur H_U une connexion; celle-ci peut être étendue en une connexion sur H de forme π. Dans cette connexion

$$\Sigma = d\omega + \pi . \omega$$
$$s^*\Sigma = s^*d\omega + s^*\pi . s^*\omega = d\theta_U$$

puisque, par définition, $s^*\pi = 0$; on a donc les composantes

$$(s^*\Sigma)^i = d\theta^i_U = \frac{1}{2} (C_U)^i_{jk} \theta^j_U \wedge \theta^k_U. \tag{3}$$

où les $(C_U)^i_{jk}$, antisymétriques en j, k, déterminent une application $C_U : U \to P$. D'autre part, de $\Sigma = (t\Sigma) . \overset{2}{\wedge} \omega$ on déduit

$$s^*\Sigma = (s^*t\Sigma) . \overset{2}{\wedge} \theta_U \quad \text{ou} \quad (s^*\Sigma)^i = \frac{1}{2} (s^*t\Sigma)^i_{jk} \theta^j_U \wedge \theta^k_U. \tag{4}$$

La comparaison de (3) et (4) donne enfin

$$s^*t_S = s^*(\alpha \circ t\Sigma) = \alpha . s^*t\Sigma = \alpha . C_U$$

d'où

Proposition III, 7. — *θ_U étant un corepère distingué sur U, l'expression de t_S dans le repère dual s'obtient ainsi :*

$$(t_S)_U = \alpha . C_U$$

où $C_U : U \to P$ est l'application définie par $d\theta^i_U = \frac{1}{2} (C_U)^i_{jk} \theta^j_U \wedge \theta^k_U$.

Corollaire III, 7. — *Une G-structure intégrable a un tenseur de structure nul.*

La réciproque, fausse en général (cf. 8, B), est vraie dans de nombreux cas (cf. 8 C, D, F et ch. IV, § 3). Aussi poserons-nous

DÉFINITION III, 7. — *Une* G-*structure est dite* presque intégrable *si son tenseur de structure est nul.*

8. — Applications. Exemples.

A) Soit $X = G/H$ un espace homogène réductif. Sa connexion de Cartan [20] détermine pour chacune des $\tilde{H}_{Z_0}$-structures S définies dans la proposition (III, 1) une connexion à torsion nulle : *ces structures ont donc un tenseur de structure nul.*

B) $O(m)$-*structures réelles.* ($K = R$) $\underline{G}$ est la sous-algèbre des matrices $(A^i_j) \in L_m$ telles que $A^i_j + \overline{A^j_i} = 0$; N est donc le sous-espace des $t \in \mathfrak{N}$ de coordonnées t^i_{jk} telles que $t^i_{jk} + t^j_{ik} = 0$. Comme d'autre part

$$\dim G = \frac{m(m-1)}{2}, \qquad \dim N = \frac{m^2(m-1)}{2} = \dim P$$

et, pour montrer que A est bijective, il suffit de montrer que $A^{-1}(O) = 0$. Or, le système d'équations définissant $A^{-1}(O)$:

$$t^i_{jk} + t^j_{ik} = 0, \qquad t^i_{kj} - t^i_{jk} = 0$$

est cramérien (cf. calcul des symboles de Christoffel) et $A^{-1}(O) = 0$. Conséquences :

a) $M = 0$; toute $O(m)$-structure S admet une S-connexion canonique à torsion nulle : la connexion riemannienne. De plus (§ 6, B) pour tout groupe $G' \supset O(m)$ on a encore $M' = 0$: ainsi pour $G' = L_m$, ...

b) Tout sous-groupe fermé $G' \subset O(m)$ étant compact, le sous-espace $V_{G'} \subset P$ invariant par $\mathcal{R}(G')$ admet un supplémentaire W également invariant et le théorème (III, 6, 2) s'applique aux G'-structures réelles S' : en particulier, il y a une S'-connexion dont la torsion coïncide avec le tenseur de structure de S'; et comme A' est comme A, injective cette connexion est unique.

[20] A. Lichnerowicz [23] § 37.

Proposition III, 8, 1. — *Pour toute* G′*-structure* S′ *subordonnée à une structure riemannienne, il existe* une S′-connexion canonique *dont la torsion coïncide avec le tenseur de structure. Pour que le tenseur de structure soit nul il faut et suffit que cette connexion canonique coïncide avec la connexion riemannienne.*

C) Soit S une *structure presque produit* réel (K = R) ou complexe (K = C) $G = KL(n_1, n_2)$. Utilisons les indices $\alpha, \beta, \gamma, \ldots = 1, 2, \ldots, n_1$ et $\alpha', \beta', \gamma', \ldots = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2$. En notant $\{e_i\}$ (resp. $\{f^j\}$) la base de K^m (resp. la base duale) $\underline{G}$ est l'algèbre des matrices sur K

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$$

et a pour base $\{\varepsilon_\alpha^\beta = e_\alpha \otimes f^\beta ; \varepsilon_{\alpha'}^{\beta'} = e_{\alpha'} \otimes f^{\beta'}\}$; d'où une base de N

$$\{e_\alpha \otimes f^\beta \otimes f^\gamma,\ e_\alpha \otimes f^\beta \otimes f^{\gamma'},\ e_{\alpha'} \otimes f^{\beta'} \otimes f^\gamma,\ e_{\alpha'} \otimes f^{\beta'} \otimes f^{\gamma'}\} ;$$

puis de V = A(N)

$$\{e_\alpha \otimes f^\beta \wedge f^\gamma (\beta < \gamma),\ e_\alpha \otimes f^\beta \wedge f^{\gamma'},\ e_{\alpha'} \otimes f^{\beta'} \wedge f^\gamma,\ e_{\alpha'} \otimes {}^{\beta'} \wedge f^{\gamma'} (\beta' < \gamma')\}$$

V a donc le supplémentaire W, également invariant par G de base

$$\{e_\alpha \otimes f^{\beta'} \wedge f^{\gamma'} (\beta' < \gamma'),\ e_{\alpha'} \otimes f^\beta \wedge f^\gamma (\beta < \gamma)\}$$

t_S *est donc le tenseur déterminé par les seules composantes* $t^\alpha_{\beta'\gamma'}$, $t^{\alpha'}_{\beta\gamma}$ *du tenseur de torsion de n'importe quelle* S*-connexion.* Dans une connexion dont la torsion se réduit à t_S on a d'après ((13) § 6)

$$\begin{cases} d\omega^\alpha = -\pi^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta + \dfrac{1}{2} t^\alpha_{\beta'\gamma'}\, \omega^{\beta'} \wedge {}^{\gamma'} \\ d\omega^{\alpha'} = -\pi^{\alpha'}_{\beta'} \wedge \omega^{\beta'} + \dfrac{1}{2} t^{\alpha'}_{\beta\gamma}\, \omega^\beta \wedge {}^\gamma \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} d\omega^\alpha \equiv \dfrac{1}{2} t^\alpha_{\beta'\gamma'} \omega^{\beta'} \wedge \omega^{\gamma'} \ (\text{mod. } \omega^\beta) \\ d\omega^{\alpha'} \equiv \dfrac{1}{2} t^{\alpha'}_{\beta\gamma} \omega^\beta \wedge \omega^\gamma \ (\text{mod. } \omega^{\beta'}) \end{cases} \tag{1}$$

ce qui permet d'identifier notre tenseur de structure au « tenseur de torsion de la structure presque produit » défini par

G. Legrand [18] et les résultats du § 6 contiennent certains de ses résultats.

D) Soit maintenant une *structure presque complexe* $\mathcal{S}$ (notations : § 1) $(m = 2n)\, CL_n^b$ n'est pas un sous-groupe de Lie complexe de CL_{2n} et notre théorie ne s'applique pas à la CL_n^b-structure complexe S qui détermine $\mathcal{S}$. On voit facilement que $\underline{CL}_n^b + i\underline{CL}_n^b = \underline{CL}\,(n, n)$ et comme $CL\,(n, n)$ est connexe, la plus petite structure de première espèce à laquelle S soit subordonnée est la structure presque produit complexe qu'elle détermine. Or, dans $E^b(X)$, (1) devient

$$(2)\qquad \begin{cases} d\omega^\alpha \equiv \dfrac{1}{2}\, t^\alpha_{\beta^*\gamma^*}\omega^{\beta^*} \wedge \omega^{\gamma^*}\ (\mathrm{mod.}\ \omega^\beta) \\[2mm] d\omega^{\alpha^*} \equiv \dfrac{1}{2}\, t^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma\ (\mathrm{mod.}\ \omega^{\beta^*}) \end{cases}$$

relation qui caractérise la « torsion presque complexe ». Celle-ci s'identifie donc au tenseur de structure de la π-structure définie par $\mathcal{S}$.

Il est cependant évident que la seule condition $T^\alpha_{\beta^*\gamma^*} = t^\alpha_{\beta^*\gamma^*}$, $T^{\alpha^*}_{\beta\gamma} = t^{\alpha^*}_{\beta\gamma}$ ne suffit pas à caractériser les tenseurs T à valeurs dans P qui sont les torsions d'une connexion presque complexe. Mais nous allons voir que, *dans ce cas très particulier*, les conditions supplémentaires mentionnées au § 6, C) s'expriment simplement.

Soient les indices $i, j, k = 1, 2, \ldots, 2n$ et les composantes π^i_j (dans la base canonique de $\underline{CL}_{2n}$) d'une S^b-connexion π : d'après la définition de CL_n^b, $\pi^\alpha_{\beta^*} = \pi^{\alpha^*}_\beta = 0$ et $\pi^{\alpha^*}_{\beta^*} = \overline{\pi^\alpha_\beta}$. Comme d'autre part, $\omega^{\alpha^*} = \overline{\omega^\alpha}$, on a pour la torsion

$$\Sigma^\alpha = d\omega^\alpha + \pi^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta \qquad \text{et} \qquad \Sigma^{\alpha^*} = d\omega^{\alpha^*} + \pi^{\alpha^*}_{\beta^*} \wedge \omega^{\beta^*} = \overline{\Sigma^\alpha}.$$

Une première condition pour qu'une 2-forme vectorielle sur $E^b(X)$ de composantes Σ^i soit la torsion d'une S-connexion est donc : $\Sigma^{\alpha^*} = \overline{\Sigma^\alpha}$. Les formes qui y satisfont sont déterminées biunivoquement par les 2-forme $\hat{\Sigma}$ sur $E^b(X)$ à valeurs dans C^n de type vectoriel (CL_n^b opérant sur C^n par le groupe isomorphe CL_n) dont les composantes sont $\hat{\Sigma}^\alpha = \Sigma^\alpha$. $t\hat{\Sigma}$ est à valeurs dans $P_1 = C^n \otimes \overset{2}{\wedge}\,(C^{2n})^*$ (coordonnées t^α_{jk}) et de type $\mathcal{R}_1(CL_n^b)$.

D'autre part, si l'on compare les torsions de deux connexions, il vient $\Sigma'^{\alpha} - \Sigma^{\alpha} = u^{\alpha}_{\beta} \wedge \omega^{\beta}$ où les 1-forme u^i_j sont les composantes de $u = \pi' - \pi$ dans la base de $\underline{\mathrm{CL}_{2n}}$. Les seules formes u^{α}_{β} déterminent u puisque $u^{\alpha}_{\beta^*} = u^{\alpha^*}_{\beta} = 0$, $\overline{u^{\alpha^*}_{\beta^*}} = u^{\alpha}_{\beta}$: elles constituent aussi les composantes d'une 1-forme $\hat{u}$ à valeurs dans $\underline{\mathrm{CL}_n}$ et de type adjoint qui, elle, admet un tenseur associé λ sur H à valeurs dans $\mathrm{N}_1 = \underline{\mathrm{CL}_n} \otimes \mathrm{C}^{2n^*} = \mathrm{C}^n \otimes \mathrm{C}^{n^*} \otimes \mathrm{C}^{2n^*}$ et de type $\mathcal{Q}_1(\mathrm{CL}^b_n)$. Et l'on a $\hat{u} = \lambda . \omega$ soit $u^{\alpha}_{\beta} = \lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma} + \lambda^{\alpha}_{\beta\gamma^*}\omega^{\gamma^*}$. Si $\mathcal{N}_1 = \mathrm{C}^n \otimes \mathrm{C}^{2n^*} \otimes \mathrm{C}^{2n^*}$, N_1 s'identifie au sous-espace vectoriel complexe de $\mathcal{N}_1$, $\lambda^{\alpha}_{\beta^*\gamma^*} = 0$. On a encore une projection $-\mathcal{A}_1$, $\mathcal{N}_1 \to \mathrm{P}$ $(t^{\alpha}_{jk} \to t^{\alpha}_{jk} - t^{\alpha}_{kj})$ et la relation de commutation $\mathcal{A}_1 \circ \mathcal{Q}_1(g) = \mathcal{R}_1(g) \circ \mathcal{A}_1$. Alors

$$
(3) \quad \Sigma'^{\alpha} - \Sigma^{\alpha} = (\lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma} + \lambda^{\alpha}_{\beta\gamma^*}\omega^{\gamma^*}) \wedge \omega^{\beta}
$$
$$
= \frac{1}{2}(\lambda^{\alpha}_{\gamma\beta} - \lambda^{\alpha}_{\beta\gamma})\omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma} - \lambda^{\alpha}_{\beta\gamma^*}\omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma^*},
$$

qui s'écrit encore $\widehat{t\Sigma'} - \widehat{t\Sigma} = \mathrm{A}_1 \circ \lambda$($\mathrm{A}_1$ restriction de $\mathcal{A}_1$ à N_1). On voit donc que la théorie se développe comme au § 6, réciproque comprise. De plus $\mathrm{V}_1 = \mathrm{A}(\mathrm{N}_1)$ est le sous-espace de P_1 d'équation $t^{\alpha}_{\beta^*\gamma^*} = 0$ qui admet le supplémentaire invariant W d'équations $t^{\alpha}_{\beta\gamma} = t^{\alpha}_{\beta\gamma^*} = 0$. Ainsi se trouve établie :

Proposition III, 8, 2. — *Le tenseur de « torsion presque complexe » t d'une structure presque complexe n'est autre que le tenseur de structure de la π-structure qu'elle détermine. Pour qu'une 2-forme vectorielle Σ sur l'espace* $\mathrm{E}^b(\mathrm{X})$ *des repères complexes adaptés soit la torsion d'une connexion presque complexe, il faut et suffit qu'elle satisfasse aux deux conditions :*

1° $\qquad (t\Sigma)^{\alpha}_{\beta^*\gamma^*} = \underline{t^{\alpha}_{\beta^*\gamma^*}}$,

2° $\qquad \Sigma^{\alpha^*} = \overline{\Sigma^{\alpha}}$.

On aurait pu, en utilisant l'espace des repères *réels* $\mathrm{E}^a(\mathrm{X})$ obtenir cette proposition par simple application du théorème (III, 6, 2) : il nous a semblé plus intéressant de mettre en évidence d'une part, les particularités d'une structure presque complexe parmi les G-structures complexes, d'autre part le genre de difficultés que l'on rencontre pour les G-structures complexes de seconde espèce.

E) Pour une *structure presque hermitienne* définie par son espace de repères complexes adaptés $\varepsilon^b(\mathrm{X}) \subset \mathrm{E}^b(\mathrm{X})$ (notations

du § 3) on est dans une situation analogue. En conservant les notations de l'alinéa précédent, les composantes de $\hat{u}$ sont astreintes à la condition supplémentaire $u^\alpha_\beta + \overline{u^\beta_\alpha} = 0$, et celles de λ à $\lambda^\alpha_{\beta\gamma} + \overline{\lambda^\beta_{\alpha\gamma^*}} = 0$ ($\lambda^\alpha_{\beta\gamma^*} + \overline{\lambda^\beta_{\alpha\gamma}} = 0$). On a donc d'après (3) :

$$\Sigma'^\alpha - \Sigma^\alpha = \frac{1}{2}(\overline{\lambda^\beta_{\alpha\gamma^*}} - \overline{\lambda^\gamma_{\alpha\beta^*}})\omega^\beta \wedge \omega^\gamma - \lambda^\alpha_{\beta\gamma^*}\omega^\beta \wedge \omega^{\gamma^*}$$

sans entrer dans les détails, on voit que le sous-espace invariant V_2 de P_1 dans lequel $\widehat{t\Sigma'} - \widehat{t\Sigma}$ prend ses valeurs a pour équations

$$t^\alpha_{\beta^*\gamma^*} = 0, \qquad t^\alpha_{\beta\gamma} = \overline{t^\gamma_{\alpha\beta^*}} - \overline{t^\beta_{\alpha\gamma^*}}$$

qui admet le supplémentaire également invariant W d'équation $t^\alpha_{\beta\gamma^*} = 0$. Alors, pour toute connexion sur $\varepsilon^b(X)$, la torsion

$$(4) \quad \Sigma^\alpha = \frac{1}{2}\, a^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + a^\alpha_{\beta\gamma^*}\omega^\beta \wedge \omega^{\gamma^*} + \frac{1}{2}\, a^\alpha_{\beta^*\gamma^*}\omega^{\beta^*} \wedge \omega^{\gamma^*}$$

admet la décomposition

$$(5) \qquad \Sigma^\alpha = (\Sigma^\alpha)_W + (\Sigma^\alpha)_{V_2}$$

où

$$(6) \quad (\Sigma^\alpha)_W = \frac{1}{2}(a^\alpha_{\beta\gamma} - \overline{a^\gamma_{\alpha\beta^*}} + \overline{a^\beta_{\alpha\gamma^*}})\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \frac{1}{2} a^\alpha_{\beta^*\gamma^*}\omega^{\beta^*} \wedge \omega^{\gamma^*}$$

$$(\Sigma^\alpha)_{V_2} = \frac{1}{2}(\overline{a^\gamma_{\alpha\beta^*}} - \overline{a^\beta_{\alpha\gamma^*}})\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + a^\alpha_{\beta\gamma^*}\omega^\beta \wedge \omega^{\gamma^*}.$$

Comme de plus, en passant aux repères réels de $\varepsilon^a(X)$, on peut appliquer la proposition (III, 8, 1), on voit que l'on a retrouvé l'existence de la deuxième connexion canonique d'une structure presque hermitienne — unique connexion presque hermitienne dont le tenseur de torsion ne comprenne que des termes de type (2, 0) et (0, 2) — et l'on peut énoncer plus précisément :

Proposition III, 8, 3 [21]. — *Le tenseur de structure d'une structure presque hermitienne s'identifie au tenseur de torsion de la deuxième connexion canonique. Pour qu'une 2-forme*

[21] Cf. A. Lichnerowicz [22] § 112, 114 et S. S. Chern [10] et W. Klingenberg [28].

vectorielle (4) *soit la torsion d'une connexion presque hermitienne, il faut et suffit que dans la décomposition* (5), *le terme* (6) *coïncide avec la torsion de la deuxième connexion canonique de la structure, Une variété presque hermitienne presque intégrable est Kählerienne.*

On sait en effet que cette dernière propriété équivaut à la coïncidence de la deuxième connexion canonique et de la connexion riemannienne.

F) Soit G le groupe indiqué par S.S. Chern dans [9] des matrices réelles

$$(7) \qquad g = \begin{pmatrix} u & v & w \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (u > 0)$$

$\dim X = 3$; soient les indices $i, j, k = 1, 2, 3$. $\underline{G}$ est la sous-algèbre de $\underline{L}_3$ d'équations $A^i_2 = A^i_3 = 0$ et $\overline{N} = \underline{G} \otimes R^3$ le sous-espace de $\mathfrak{N}$ d'équations $t^i_{2k} = t^i_{3k} = 0$. $V = A(N)$ est le sous-espace de P d'équations $s^i_{23} = 0$; le sous-espace supplémentaire W_1 d'équations $s^i_{12} = s^i_{13} = 0$ n'est pas invariant par $\mathcal{R}(G)$. Pour $g \in G$ et $s \in W_1$, il vient

$$\begin{aligned}(\mathcal{R}(g)s)^p_{23} &= g^p_i s^i_{jk} (g^{-1})^j_2 (g^{-1})^k_3 \\ &= g^p_i s^i_{23} (g^{-1})^2_2 (g^{-1})^3_3 - g^p_i s^i_{23} (g^{-1})^3_2 (g^{-1})^2_3 = g^p_i s^i_{23}\end{aligned}$$

c'est-à-dire que, si l'on identifie W_1 à R^3 en posant $\lambda^i = s^i_{23}$, la représentation quotient ρ dans W_1 n'est autre que la représentation de G comme groupe linéaire de R^3 : *le tenseur de structure est donc un champ de vecteurs.*

CHAPITRE IV

AUTOMORPHISMES D'UNE G-STRUCTURE

1. — Automorphismes locaux.

A) *Image et image réciproque d'une* G-*structure.* — Soient X et X′ des variétés différentiables de même dimension m, E et E′ (resp. E^C et E'^C) leurs espaces de repères réels (resp. complexes). Si μ est une application régulière (partout de rang m) de X dans X′, son application linéaire tangente au point x, μ_x, est un isomorphisme de T_x sur $T_{\mu x}$ (resp. T_x^C sur $T_{\mu x}^C$). Pour $z \in E_x$ (resp. E_x^C),

$$(1) \qquad \tilde{\mu}(z) = \mu_x \circ z$$

est donc un isomorphisme de R^m sur $T_{\mu x}$ (resp. C^m sur $T_{\mu x}^C$) et $\tilde{\mu}(z) \in E'_{\mu x}$ (resp. $E'^C_{\mu x}$). Ainsi $\tilde{\mu}$ est une application de E dans E′ (resp. E^C dans E'^C), et l'on voit immédiatement d'après (1) :

$$(2) \qquad \tilde{\mu}(z.g) = \tilde{\mu}(z).g, \qquad g \in L_m \text{ (resp. } CL_m)$$

$$(3) \qquad p_{E'} \circ \tilde{\mu} = \mu \circ p_E$$

c'est-à-dire que $\tilde{\mu}$ est une L_m-représentation de E dans E′ (resp. CL_m-représentation de E^C dans E'^C) (ch. I, § 3) : $\tilde{\mu}$ *est le prolongement de* μ *à* E (resp. E^C).

Soit θ' (resp. θ) la forme fondamentale de E′ (resp. E) : $\langle \tilde{\mu}^*\theta', \mathfrak{T}_z \rangle = \langle \theta', \tilde{\mu}\mathfrak{T}_z \rangle$; $\tilde{\mu}\mathfrak{T}_z$ étant tangent à E′ au point $\tilde{\mu}(z)$ il vient d'après (1) et (3)

$$\langle \tilde{\mu}^*\theta', \mathfrak{T}_z \rangle = [\tilde{\mu}(z)]^{-1} \circ p_{E'}(\tilde{\mu}\mathfrak{T}_z)$$
$$= [\mu \circ z]^{-1} \circ \mu \circ p_E(\mathfrak{T}_z) = z^{-1} p_E(\mathfrak{T}_z) = \langle \theta, \mathfrak{T}_z \rangle \text{ soit}$$

$$(4) \qquad \tilde{\mu}^*\theta' = \theta.$$

Réciproquement (4) caractérise les représentations $\tilde{\mu}$ de E dans E′ qui sont le prolongement d'une application μ de X dans X′.

Soit une G-structure S(G, H) sur X. L'image $\tilde{\mu}(H)$ n'est pas en général un s.e.f.p. parce que, si $\mu(x_1) = \mu(x_2)$, $\tilde{\mu}H_{x_1} \cap \tilde{\mu}H_{x_2} = \emptyset$ en général. Il en est toutefois ainsi d'après la proposition (I, 5, 2) si μ est un homéomorphisme de X sur X′. En effet :

1) $\tilde{\mu}(H_x) = \tilde{\mu}(z.G) = \tilde{\mu}(z).G$ si $z \in H_x$, $x = pz \in X$;

2) Si σ est une section locale de H sur V, $\sigma' = \tilde{\mu} \circ \sigma \circ \mu^{-1}$ est une section locale de $\tilde{\mu}(H)$ sur $\mu(V)$, différentiable car $\tilde{\mu}$ et μ^{-1} le sont dans nos hypothèses.

$\tilde{\mu}(H)$ détermine alors une G-*structure* S′ *sur* X′ qui est *l'image de* S *par l'homéomorphisme* μ. On notera $S' = \mu.S$.

μ étant toujours régulière, mais pas nécessairement un homéomorphisme, soit maintenant donnée une G-structure S′(G, H′) sur X′. L'ensemble $H = \bigcup_{x \in X} H_x$ où

$$(5) \qquad H_x = (\tilde{\mu}_x)^{-1}\ H'_{\mu x} \quad (x \in X)$$

($\tilde{\mu}_x$ désigne la restriction à H_x de $\tilde{\mu}$) est une G-s.e.f.p. différentiable d'après la proposition (I, 5, 2) car

1) $H_x = z_x.G$ si $z_x \in H_x$ d'après (2);

2) Si σ' est une section différentiable de H′ au-dessus de U, $\sigma = (\tilde{\mu}_x)^{-1} \circ \sigma' \circ \mu$ est une section locale différentiable de E à valeurs dans H (il suffit de remarquer que μ est localement un homéomorphisme). H est l'image réciproque de H′ par μ, et il détermine une G-*structure* S *image réciproque de* S′ par μ. On notera $S = \mu^* S'$ et $H = \mu^* H'$, H s'identifie d'ailleurs à l'image réciproque de H′ au sens de la théorie des espaces fibrés. Ainsi, en particulier, tout revêtement d'un espace X muni d'une G-structure est muni canoniquement d'une G-structure image réciproque. Si $\tilde{\mu}_H$ est la restriction de $\tilde{\mu}$ à H, $\tilde{\mu}_H$ est une représentation de $H = \mu^* H'$ sur H′ et de (4) l'on déduit :

$$(5) \qquad \tilde{\mu}_H^* \omega' = \omega.$$

De (5) découle enfin que, sur si S′ est déterminée par $\{V_\alpha, \theta_\alpha\}$ où $\{V_\alpha\}$ est un recouvrement ouvert de X muni des

corepères distingués θ_α, $S = \mu^*S'$ est la G-structure sur X déterminée par $\{\mu^{-1}(V_\alpha), \mu^*\theta_\alpha\}$.

Lorsque μ est un homéomorphisme, les relations $S' = \mu.S$ et $S = \mu^*S'$ sont équivalentes et la remarque précédente permet de déterminer S′.

B) Soient X et X′ munis de G-structures S et S′ : un *isomorphisme de* S *sur* S′ est un homéomorphisme différentiable régulier μ de X sur X′ tel que $\mu S = S'$.

Un *automorphisme de* S est un isomorphisme de S sur elle-même.

Si U est un ouvert de X, H_U est un G-s.e.f.p. de E_U et définit la G-*structure* S_U *induite par* S *sur* U ($S_U = i^*S$, si i est l'application identique $U \to X$). *Un isomorphisme local de* S *sur* S′, de source U et de but V (U ouvert de X, V ouvert de X′) est un isomorphisme de S_U sur S'_V. Deux G-structures S *et* S′ *sont localement isomorphes* si, pour tout couple $x \in X$, $x' \in X'$, il existe un isomorphisme local de S sur S′ dont la source contient x et le but x'.

On définit de même un *automorphisme local de* S. L'ensemble $\Gamma(S)$ des automorphismes locaux de S constitue un *pseudogroupe de transformations dé* X ([22]).

Rappelons enfin ([23]) que S est dite *localement homogène* si $\Gamma(S)$ opère transitivement sur X, *isotrope* si le prolongement $\tilde{\Gamma}$ de $\Gamma(S)$ opère transitivement sur chaque fibre H_x de H. Elle est donc localement homogène et isotrope si $\tilde{\Gamma}$ opère transitivement sur tout H : nous dirons par abus de langage que *S est transitive.*

Un *pseudogroupe de Lie transitif du premier ordre* peut être défini ([24]) comme le pseudogroupe $\Gamma(S)$ des automorphismes locaux d'une G-structure réelle transitive — ou, plus restrictivement ([25]) comme le pseudogroupe $\Gamma \subset \Gamma(S)$ des automorphismes locaux *analytiques* d'une G-structure réelle S elle-même analytique. Nous adopterons plutôt la première définition, étant entendu que certaines réciproques ne sont acquises que lorsque les données sont analytiques.

([22]) Pour la définition d'un pseudogroupe de transformations, voir C. Ehresmann ou S. S. Chern [9].
([23]) P. Libermann [19].
([24]) Y. Matsushima [24].
([25]) C. Ehreshmann [14] et P. Libermann [19].

C) *G-structures transitives.*

Proposition IV, 1, 1: *Une G-structure complexe transitive est équivalente au réel.*

Soit $\tilde{f}$ le prolongement d'un homéomorphisme local différentiable et régulier f de X. Si $z = z_1 . l$, $z_1 \in E$ $l \in CL_m$, alors $\tilde{f}(z) = \tilde{f}(z_1) . l$ où $\tilde{f}(z_1) \in E$: c'est-à-dire que, si $z \in E . l$, $\tilde{f}(z) \in E . l$. Soient S transitive, $z_0 \in H$ fixé et $z \in H$ arbitraire : il existe $f \in \Gamma(S)$ tel que $\tilde{f}(z_0) = z$ donc si $z_0 \in E.l$, $z \in E . l$ et $H \subset E . l$. Ceci équivaut à $H . l^{-1} \subset E$ et établit la proposition.

Or, soient S' équivalente à S ($H' = H . l$) et $\mu \in \Gamma(S)$; $\tilde{\mu}(H_U) = H_V$ et $H'_U = H_U . l$ entraînent

$$\tilde{\mu}(H'_U) = \tilde{\mu}(H_U) . l = H_V . l = H'_V$$

c'est-à-dire $\mu \in \Gamma(S')$. Donc

Proposition IV, 1, 2. — *Deux structures équivalentes admettent les mêmes automorphismes, elles sont en particulier, simultanément transitives.*

On pourra dire qu'une $\mathcal{C}$-structure $\mathcal{S}$ est transitive si une G-structure $S \in \mathcal{S}$ ($G \in \mathcal{C}$) est transitive, cette propriété étant indépendante du représentant S choisi.

Il découle de la proposition (IV, 1, 1) que les automorphismes d'une G-structure complexe transitive sont ceux d'une G-structure réelle. De ce point de vue l'introduction des G-structures complexes n'apporte rien de nouveau et, dans la suite, une G-structure transitive pourra toujours être supposée réelle.

La proposition (IV, 1, 2) admet les réciproques partielles suivantes :

Théorème IV, 1 ([26]). — *Soient une G-structure S et une G'-structure S' admettant les mêmes automorphismes locaux: a) si S est transitive, elle est subordonnée à S' au sens large et par conséquent G est conjugué d'un sous-groupe de G'; b) si de plus S' est aussi transitive, alors S' et S sont équivalentes; c) si G' = G, S' est associée à S.*

En effet : *a*) Soient z, $z_1 \in H$ (espace des repères distingués de S); il existe $\varphi \in \Gamma(S)$ tel que $\tilde{\varphi}(z) = z_1$ et $l \in CL_m$ tel que

([26]) D. Bernard [4].

$z' = z.l \in H'$. Comme $\varphi \in \Gamma(S')$, $\tilde{\varphi}(z') = \tilde{\varphi}(z).l = z_1.l \in H'$: Ainsi, quel que soit $z_1 \in H$, $z_1.l \in H'$, c'est-à-dire

(6) $$H' \supset H.l$$

S est subordonnée à S′ au sens large et ceci implique $G' \supset l^{-1}.G.l$.

b) Si S′ est aussi transitive on déduit de *a*) $H \supset H'.l^{-1}$ qui rapproché de (6) fournit $H' = H.l$ et $G' = l^{-1}.G.l$.

c) Si $G' = G$ sans supposer S′ transitive, (6) implique $G \supset l^{-1}.G.l$ d'où $l \in N(G)$ et S′ est associée à H.

Ce théorème montre en particulier que, si Γ est un pseudogroupe de Lie du premier ordre, toutes les G-structures à l'aide desquelles il peut être défini sont équivalentes, où encore, *les pseudogroupes de Lie du premier ordre correspondent biunivoquement aux* $\mathcal{C}$-structures transitives.

2. — Propriétés relatives au tenseur de structure.

A) Soient S(G, H) une G-structure sur X, μ une application régulière de X′ dans X et S′ = S′(G, H′) l'image réciproque de S par μ. Notons encore $\tilde{\mu}$ la restriction de $\tilde{\mu}$ à H′: c'est une G-représentation de H′ dans H et si π est une forme de connexion sur H, $\tilde{\mu}^*\pi = \pi'$ est (ch. II, § 4) une forme de connexion sur H′. Soient ω et ω′ les formes fondamentales de H et H′; avec des notations qui sont claires

$$\Sigma = d\omega + \pi.\omega$$
$$\Sigma' = d\omega' + \pi'.\omega' = d(\tilde{\mu}^*\omega) + (\tilde{\mu}^*\pi).(\tilde{\mu}^*\omega)$$

d'après ((4); § 1) soit

(1) $$\Sigma' = \tilde{\mu}^*\Sigma.$$

En passant aux tenseurs associés (1) devient

$$(t\Sigma').\overset{2}{\wedge}\omega' = \tilde{\mu}^*\left((t\Sigma).\overset{2}{\wedge}\omega\right)$$

soit

$$(t\Sigma').\overset{2}{\wedge}\omega' = (\tilde{\mu}^*t\Sigma).\overset{2}{\wedge}\tilde{\mu}^*\omega = (\tilde{\mu}^*t\Sigma).\overset{2}{\wedge}\omega'$$

ce qui équivaut à

(2) $$t\Sigma' = \tilde{\mu}^*t\Sigma.$$

Enfin, α étant (ch. III, § 6) la projection de P sur M,

$$t_{S'} = \alpha.t\Sigma' = \alpha.\tilde{\mu}^* t\Sigma = \tilde{\mu}^*(\alpha.t\Sigma) = \tilde{\mu}^* t_S.$$

Proposition IV, 2, 1. — *Si S′ est l'image réciproque de S par μ, son tenseur de structure $t_{S'}$, est l'image réciproque de t_S par $\tilde{\mu}$:*

$$(3) \qquad t_{\mu^* S} = \tilde{\mu}^* t_S.$$

Si l'on applique cette proposition aux automorphismes locaux d'une G-structure S, on voit que si S est isotrope en x_0, t_S est constant sur H_{x_0}; *si* S *est transitive,* t_S *est constant sur* H.

Définition IV, 2, 1. — *Une* G-*structure* S *est dite* presque transitive, *si elle a un tenseur de structure constant* ([27]).

B) G-*structures presque transitives. Conditions de Cartan.* — S étant presque transitive la valeur constante t de t_S n'est pas quelconque dans M : en particulier, t_S étant un tenseur de type $\rho(G)$, t doit être invariant par $\rho(G)$.

Exemple. — Soit S une π-structure avec les notations de (ch. III, § 7, C) on a

$$(\rho(g)t)^{\alpha_1}_{\beta_1\gamma_1} = g^{\alpha_1}_{\alpha} t^{\alpha}_{\beta'\gamma'} (g^{-1})^{\beta'}_{\beta_1} (g^{-1})^{\gamma'}_{\gamma_1} \qquad g \in G.$$

Si l'on prend g tel que $g^{\alpha_1}_{\alpha} = \lambda\delta^{\alpha_1}_{\alpha}$, $g^{\alpha'_1}_{\alpha'} = \delta^{\alpha'_1}_{\alpha'}$, il vient $(\rho(g)t)^{\alpha_1}_{\beta_1\gamma_1} = \lambda t^{\alpha_1}_{\beta_1\gamma_1}$. La condition $\rho(g)t = t$ exige donc $\lambda t^{\alpha_1}_{\beta_1\gamma_1} = t^{\alpha_1}_{\beta_1\gamma_1}$, quel que soit λ d'où $t = 0$: *une π-structure presque transitive est nécessairement presque intégrable* (*d'où intégrable*). Ce résultat s'applique en particulier aux structures presque complexes (cf. [9]).

Cette dernière condition n'est pas encore suffisante : des conditions nécessaires — et dans certains cas suffisantes — pour que $t \in$ M soit la valeur du tenseur de structure d'une G-structure presque transitive ont été déterminées par E. Cartan ([6] et [7]). Nous allons les rappeler brièvement puis les interpréter.

Soit W_1 un supplémentaire de V : les c^i_{jk}, composantes dans la base de P de la projection naturelle $c = q\ (t_S)$ de t_S sur W_1 (ch. III, § 6, D) sont ici constantes. Nous avons vu qu'il existe

([27]) Ces structures sont appelées intégrables par S. S. Chern [9] ou Y. Matsushima [24], ainsi que par l'auteur dans [2] et [5].

des formes π'^{ρ} sur H satisfaisant aux équations de structure ((15) ch. III, § 6) soit

$$(4) \qquad d\omega^i = a^i_{j\rho}\omega^j \wedge \pi'^{\rho} + \frac{1}{2} c^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k.$$

Les formes π'^{ρ} constituent avec les ω^i une base de θ^*_z en tout point $z \in H$; on a donc :

$$(5) \quad d\pi'^{\rho} = \frac{1}{2}\gamma^{\rho}_{\sigma\tau}\pi'^{\rho} \wedge \pi'^{\tau} + u^{\rho}_{\sigma i}\pi^{\sigma} \wedge \omega^i + \frac{1}{2}v^{\rho}_{ij}\omega^i \wedge \omega^j$$

où $\gamma^{\rho}_{\sigma\tau} = -\gamma^{\rho}_{\tau\sigma}$, $u^{\rho}_{\sigma i}$, $v^{\rho}_{ij} = -v^{\rho}_{ji}$ sont des fonctions sur H. Par différentiation extérieure de (4), $d\,(d\omega^i) = 0$ donne

$$(6) \qquad a^i_{j\tau}a^j_{l\sigma} - a^i_{j\sigma}a^j_{l\tau} = \gamma^{\rho}_{\sigma\tau}a^i_{l\rho}$$
$$(C_1) \qquad a^i_{j\rho}c^j_{lm} + a^j_{l\rho}c^i_{mj} + a^j_{m\rho}c^i_{jl} = a^i_{m\sigma}u^{\sigma}_{\rho l} - a^i_{l\sigma}u^{\sigma}_{\rho m}$$
$$(C_2) \qquad c^i_{pk}c^p_{lm} + c^i_{pl}c^p_{mk} + c^i_{pm}c^p_{kl} = a^i_{k\rho}v^{\rho}_{lm} + a^i_{l\rho}v^{\rho}_{mk} + a^i_{m\rho}v^{\rho}_{kl}.$$

La relation (6) n'étant autre que $[\varepsilon_\tau, \varepsilon_\sigma] = \gamma^{\rho}_{\sigma\tau}\varepsilon_\rho$, ces premières équations sont toujours compatibles, les $\gamma^{\rho}_{\sigma\tau}$ étant les constantes de structure du groupe de Lie G dans la base $\{\varepsilon_\rho\}$.

Définition IV, 2, 2. — *Nous dirons que $t \in M$ satisfait aux conditions de Cartan relativement au groupe G, si, pour une base $\varepsilon_\rho = (a^i_{j\rho})$ de $\underline{G}$ les relations (C_1) et (C_2) sont compatibles, les c^i_{jk} étant les composantes de $c = q(t)$.*

Il est évident que la compatibilité de (C_1) et (C_2) ne dépend pas de la base $\{\varepsilon_\rho\}$.

Une condition nécessaire pour que t soit le tenseur de structure d'une structure presque transitive, nous l'avons vu, est $\rho(G)t = t$ d'où, si $\lambda \in \underline{G}$, $\tilde{\rho}(\lambda)t = 0$; soit, comme $t = \alpha.c$

$$(7) \qquad \tilde{\rho}(\lambda)\alpha.c = 0 \qquad \lambda \in \underline{G}.$$

Comme $\alpha \circ \mathcal{R}(g) = \rho(g) \circ \alpha (g \in G)$ on a aussi $\alpha \circ \tilde{\mathcal{R}}(\lambda) = \tilde{\rho}(\lambda) \circ \alpha$ et (7) équivaut à $\alpha\tilde{\mathcal{R}}(\lambda)c = 0$ c'est-à-dire $\tilde{\mathcal{R}}(\lambda)c \in V$. Comme $V = A(N)$ cette condition s'exprime ainsi : il existe $\xi \in N$ tel que

$$(8) \qquad \tilde{\mathcal{R}}(\lambda)c = A(\xi).$$

Or, $(\tilde{\mathcal{R}}(\lambda)c)^i_{lm} = \lambda^i_j . c^j_{lm} - c^i_{jm}\lambda^j_l - c^i_{lj}\lambda^j_m = \lambda^i_j c^j_{lm} + \lambda^j_l c^i_{mj} + \lambda^j_m c^i_{jl}$ et (8) s'écrit :

$$(9) \qquad \lambda^i_j c^j_{lm} + \lambda^j_l c^i_{mj} + \lambda^j_m c^i_{jl} = a^i_{m\rho}\xi^{\rho}_l - a^i_{l\rho}\xi^{\rho}_m$$

de sorte que les équations (C_1) ne sont autres que cette condition (9) appliquée à tous les éléments ε_ρ de la base de $\underline{G}$: (C_1) exprime donc que $\tilde{\rho}(\lambda)t = 0$ pour tout $\lambda \in \underline{G}$. Cette interprétation n'est pas essentiellement différente de celle donnée par E. Cartan dans [6], § 36 mais elle s'exprime plus simplement grâce à la notion de tenseur de structure.

Soit maintenant Ω la courbure d'une S-connexion. C'est une 2-forme tensorielle à valeur dans $\underline{G}$, et si $R = t\Omega$ est son tenseur associé à valeur dans $\underline{G} \otimes \overset{2}{\wedge} R_m^*$, on a

$$\Omega = R . \overset{2}{\wedge} \omega.$$

Les composantes Ω^ρ de Ω dans $\{\varepsilon^\rho\}$ sont donc

$$\Omega^\rho = \frac{1}{2} R^\rho_{lm} \omega^l \wedge \omega^m$$

(R^ρ_{lm} composantes de R) et l'on en déduit, puisque $\Omega = \varepsilon_\rho \otimes \Omega^\rho$, les composantes de Ω dans la base canonique de $\underline{L_m}$:

$$\Omega^i_j = a^i_{j\rho} \Omega^\rho = \frac{1}{2} a^i_{j\rho} R^\rho_{lm} \omega^l \wedge \omega^m. \tag{10}$$

Soit toujours S une G-structure transitive, plaçons-nous dans le cas où W_1 est invariant par $\mathcal{R}(G)$ de sorte qu'il existe (th. III, 6, 2) une S-connexion γ telle que $t_\Sigma = t_S$ (= constante). Dans cette connexion cherchons la forme explicite de l'identité de Bianchi

$$\nabla\Sigma = \Omega . \omega. \tag{11}$$

Les deux membres de (11) sont des 3-formes tensorielles dont il s'agit de calculer les tenseurs associés.

Pour le second membre il vient

$$(\Omega . \omega)^i = \Omega^i_k \wedge \omega^k = \frac{1}{2} a^i_{k\rho} R^\rho_{lm} \omega^l \wedge \omega^m \wedge \omega^k$$
$$= \frac{1}{3\,!} (a^i_{k\rho} R^\rho_{lm} + a^i_{l\rho} R^\rho_{mk} + a^i_{m\rho} R^\rho_{kl}) \omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega^m$$

soit

$$(t(\Omega . \omega))^i_{klm} = a^i_{k\rho} R^\rho_{lm} + a^i_{l\rho} R^\rho_{mk} + a^i_{m\rho} R^\rho_{kl}. \tag{12}$$

Pour le premier membre, $t\nabla\Sigma$ est donné par la proposition

(III), 5). Toutefois, la formule (21) se simplifie puisque, $t\Sigma$ étant constant, $D\Sigma = t\nabla t\Sigma = 0$. Les composantes de $t\Sigma = t_S$ étant toujours notées c^i_{jk}, on a aussi $c^i_{jk} = -2S^i_{jk}$, et la formule (21) donne

$$(t\nabla\Sigma)^i_{klm} = c^i_{jk}c^j_{lm} + c^i_{jl}c^j_{mk} + c^i_{jm}c^j_{kl} \tag{13}$$

de sorte que l'identité de Bianchi (11) s'écrit

$$c^i_{jk}c^j_{lm} + c^i_{jl}c^j_{mk} + c^i_{jm}c^j_{kl} = a^i_{k\rho}R^\rho_{lm} + a^i_{l\rho}R^\rho_{mk} + a^i_{m\rho}R^\rho_{kl}$$

ce qui montre que les équations (C_2) sont nécessairement compatibles en V^ρ_{lm} et admettent la solution $V^\rho_{lm} = R^\rho_{lm}$. Nous énoncerons.

PROPOSITION IV, 2, 2. — *La condition de Cartan* (C_1) *exprime l'invariance de* t *par* $\tilde{\rho}(\underline{G})$ *et peut s'écrire* $\tilde{\rho}(\varepsilon_\rho).t = 0$. *La condition* (C_2), *dans les hypothèses du théorème* (III, 6, 2), *est la simple traduction en termes de tenseurs associés de l'identité de Bianchi.*

3. — G-Structures analytiques involutives ([28]).

A) Soient S(G, H) une G-structure analytique presque transitive et μ un automorphisme local de S, de source U et de but V, U étant restreint de façon à être muni de sections locales. $\tilde{\mu}$ désignant le prolongement de μ à H, ω_U et ω_V les restrictions de ω à H_U et H_V, on a d'après ((5), § 1) $\tilde{\mu}^*\omega_V = \omega_U$. Soit σ une section $U \to H_U$ et f l'application $U \to H_U \times H_V$: $x \to (\sigma(x), \tilde{\mu}(\sigma(x)))$. Alors

$$f^*(\omega_U - \omega_V) = \sigma^*\omega_U - \sigma^*\tilde{\mu}^*\omega_V = \sigma^*(\omega_U - \tilde{\mu}^*\omega_V) = 0$$

f définit donc une variété intégrale du système de Pfaff

$$\omega_U = \omega_V \quad \text{ou} \quad \omega^i_U = \omega^i_V \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{1}$$

variété intégrale à m dimensions « n'introduisant aucune relation entre les ω^i_U » (ou « à variables indépendantes x^i » coordonnées locales de x).

Inversement une telle variété intégrale s'identifie à une

([28]) Nous ne rappellerons pas la théorie des systèmes différentiels en involution renvoyant le lecteur à [6], [8] et [9].

application $f: \mathrm{U} \to \mathrm{H_U} \times \mathrm{H_V}$, $x \to (\sigma(x), g(x))$ telle que $f^*(\omega_{\mathrm{U}} - \omega_{\mathrm{V}}) = 0$; celle-ci définit elle-même une application $\mu: \mathrm{U} \to \mathrm{V}$, $\mu = p \circ g$ dont on vérifie facilement que c'est un automorphisme local de S.

Le système (1) se ferme en ajoutant les équations

$$d\omega^i_{\mathrm{U}} = d\omega^i_{\mathrm{V}}$$

soit, d'après (15) (ch. III, § 6) et l'hypothèse de presque transitivité

$$a^i_{j\rho}\omega^j_{\mathrm{U}} \wedge \pi'^{\rho}_{\mathrm{U}} + \frac{1}{2} c^i_{jk}\omega^j_{\mathrm{U}} \wedge \omega^k_{\mathrm{U}} = a^i_{j\rho}\omega^j_{\mathrm{V}} \wedge \pi'^{\rho}_{\mathrm{V}} + \frac{1}{2} c^i_{jk}\omega^j_{\mathrm{V}} \wedge \omega^k_{\mathrm{V}}$$

équations qui, compte tenu de (1) s'écrivent

$$a^i_{j\rho}\omega^j_{\mathrm{U}} \wedge (\pi'^{\rho}_{\mathrm{V}} - \pi'^{\rho}_{\mathrm{U}}) = 0. \tag{2}$$

Les critères d'involution montrent que l'involution du système fermé (1), (2) par rapport aux variables indépendantes $x^1, \dots x^m$ ne dépend que des coefficients $a^i_{j\rho}$ — et même qu'elle ne dépend que de $\underline{\mathrm{G}}$ et non du choix particulier de la base $\varepsilon_\rho = (a^i_{j\rho})$: lorsque ces conditions sont réalisées, G *est dit involutif*. Une G-*structure* S est *involutive* si G est involutif.

On peut alors donner du 3^e^ théorème fondamental de E. Cartan l'énoncé suivant :

Proposition IV, 3, 1 (E. Cartan). — *Si* G *est involutif, les conditions de Cartan sont suffisantes pour qu'il existe une* G-*structure analytique presque transitive de tenseur de structure t.*

On peut d'ailleurs voir sur les critères que, si G est involutif, ses conjugués dans L_m le sont aussi de sorte que l'on peut parler de $\mathcal{C}$-*structures involutives* — où de *pseudogroupes de Lie involutifs.*

B) Lemme IV, 3. — G *étant involutif, si* S *et* S′ *sont deux* G-*structures analytiques presque intégrables telles que* $t_{\mathrm{S}} = t_{\mathrm{S'}}$, *il existe un isomorphisme local de* S *sur* S′ *appliquant un repère distingué arbitraire z de* S *sur un repère distingué arbitraire z′ de* S′. *En particulier, ces structures sont localement isomorphes.*

En effet, en gardant les notations de A, la détermination d'un tel isomorphisme local μ, revient à celle d'une variété intégrale « de dimension m à variables indépendantes x^i » du système fermé (1), (2) passant par le couple (z, z'). Ce

système étant en involution par rapport aux x^i, comme il n'a pas d'équations finies, tout couple $(z, z') \in H_U \times H'_V$ est un point intégral — et comme le système des formes $\omega_U^i - \omega_U^{\prime i}$ est partout de rang m, c'est un point intégral régulier : et ceci suffit à affirmer l'existence de notre variété intégrale. On en déduit :

Théorème IV, 3 ([29]). — *Si* G *est involutif, une* G-*structure analytique* S *presque transitive est transitive, presque intégrable est intégrable.*

La première affirmation est une conséquence immédiate du lemme. Soit d'autre part S presque intégrable. Sur R^m la G-structure S′ définie par le s.e.f.p. $H' = \{R_y . G\}$, $y \in R^m$ où R_y est le repère naturel en y des coordonnées canoniques y^i, est intégrable et analytique. Comme $t_{S'} = t_S = 0$, le lemme montre que, pour tout $x \in X$, il existe un isomorphisme local $f\colon U \subset X \rightarrow V \subset R^m$, où $x \in U$. Alors, le corepère $dy = \{dy^i\}$ étant distingué pour S′, le corepère $\theta = f^* dy$ est distingué pour S. Ses composantes sont $\theta^i = f^* dy^i = d(f^* y^i) = dz^i$. f étant un homéomorphisme différentiable régulier, les fonctions $z^i = f^* y^i$ sont des coordonnées locales sur U : θ est donc un corepère naturel de coordonnées locales distingué pour S, qui est donc intégrable.

Tous les cas d'intégrabilité de G-structures analytiques presque intégrables rencontrées jusqu'ici rentrent dans l'application de ce théorème, leur groupe étant involutif : structures presque produit, presque complexes, exemple F) ch. III, § 8, structures presque symplectiques ([30]).

C) *Pseudogroupes de Lie localement semblables* ([31]). — Soit L le sous-espace des $t \in M$ qui satisfont aux conditions de Cartan pour un certain groupe $G \subset L_m$. Si S est presque transitive, d'après la formule ((1) ch. III, § 7) il en est de même des structures équivalentes : c'est une propriété de la $\mathcal{C}$-structure $\mathcal{S}$. En particulier, toutes les G-structures S′ associées à S sont presque transitives et leurs tenseurs de structure $t_{S'} \in L$ appartiennent à une même classe d'intransitivité de M pour le groupe $G^* = \bar{\rho}(N(G))$ (ch. III, § 7, A).

([29]) D. Bernard [2] et [5].
([30]) $G = Sp(m, R)$. Cf. P. Libermann [19].
([31]) Résultats de [2] à la présentation près.

Réciproquement soient, $S(G, H)$ et $S'(G, H')$ des structures presque transitives sur X et X' telles que $t_{S'} = t_S$ modulo G^*. Soit $n \in N(G)$ tel que $t_{S'} = \bar{\rho}(n^{-1})\, t_S$; $S''(G, H'')$ étant définie par $H'' = H.n$ on a $t_{S''} = \bar{\rho}(n^{-1})\, t_S = t_{S'}$, et, si l'on suppose G involutif S'' est, d'après le lemme (IV, 3), localement isomorphe à S'. On peut donc dire que la condition $t_{S'} = t_S$ modulo G^* est nécessaire et suffisante pour que S soit équivalente à une structure localement isomorphe à S' : toutefois le résultat est plus clair si on l'exprime à l'aide des pseudogroupes $\Gamma(S')$ et $\Gamma(S) = \Gamma(S'')$.

Soient en effet, $f\colon U \to V$ un isomorphisme local de S'' sur S'. Γ_U (resp. Γ'_V) la restriction à U de $\Gamma(S)$ (resp. à V de $\Gamma(S')$). Si $g \in \Gamma_U$, sa transmuée $\varphi = f \circ g \circ f^{-1}$ étant un produit d'isomorphisme locaux de G-structures ($S' \to S'' \to S'' \to S'$) est un automorphisme local de S' : $\varphi \in \Gamma'_V$. On en déduit $\Gamma'_V = f \circ \Gamma_U \circ f^{-1}$. Nous dirons, par analogie avec les groupes de transformations que Γ_U et Γ'_V *sont semblables* et que :

Définition IV, 3. — *Deux pseudogroupes de transformations, Γ sur X, Γ' sur X' sont localement semblables si pour tout couple $x \in X$, $x' \in X'$ il existe un voisinage U de x et un voisinage V de x' tels que les restrictions Γ_U et Γ'_V soient semblables.*

S'' et S' étant localement isomorphes, on voit que $\Gamma(S)$ et $\Gamma(S')$ sont localement semblables. $t_S = t_{S'}$, modulo G^* entraîne donc : « $\Gamma(S)$ localement semblable à $\Gamma(S')$ ».

Réciproquement soient S et S' deux G-structures presque transitives telles que $\Gamma(S)$ et $\Gamma(S')$ soient localement semblables. $f\colon U \to V$ réalisant la similitude de Γ_U et Γ'_V, la G-structure sur U, $f^*S'_V$ admet les mêmes automorphismes locaux que S_U : elle lui est donc associée (th. IV, 1). On en déduit $t_{S'} = t_S$ modulo G^*. Si l'on appelle t_S (ou les composantes c^i_{jk} de $c = q(t_S)$) un « système de constantes de structure de $\Gamma(S)''$ » (E. Cartan). Puis la classe d'intransitivité de t_S modulo G^* la « famille des systèmes de constantes de structure de $\Gamma(S)''$ » (Matsushima [24]) ou plus simplement la *famille caractéristique* de $\Gamma(S)$ on peut énoncer

Théorème IV, 3. — *Pour que deux pseudogroupes de Lie du premier ordre transitifs et involutifs soient localement semblables, il faut et suffit qu'ils aient même famille caractéristique.*

De ce théorème, du théorème (IV, 1) et de la proposition (IV, 3, 1) on déduit :

COROLLAIRE. — *Les pseudogroupes de Lie du premier ordre, transitifs et involutifs, correspondent biunivoquement aux couples d'une classe de groupes linéaires involutifs conjugués et, un représentant* G *étant choisi dans chaque classe, d'une classe d'intransitivité de* L *par* G* :

Exemple. — $m = 3$ et G groupe indiqué à l'alinéa F, ch. III, § 8. Nous avons vu que l'on peut choisir le supplémentaire W de V de façon que $c = q(t_S)$ ait pour composantes $\lambda^i = c^i_{23}$ $(i = 1, 2, 3)$ et $c^i_{12} = c^i_{13} = 0$. C'est-à-dire que les équations de structure sont

$$d\omega^i = \pi^i \wedge \omega^1 + \lambda^i \omega^2 \wedge \omega^3.$$

Les conditions de Cartan sont $\lambda^1 = 0$. L est donc un sous-espace de dimension 2 de W de coordonnées λ^2, λ^3. N(G) est le groupe des matrices

$$n = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix} \quad (\det . n \neq 0)$$

et $\bar{\rho}(n)$ opère sur L par

$$(3) \quad (\lambda^2, \lambda^3) \to \left(\lambda'^2 = \frac{\beta'\lambda^2 + \beta''\lambda^3}{\beta'\gamma'' - \gamma'\beta''}, \quad \lambda'^3 = \frac{\gamma'\lambda^2 + \gamma''\lambda^3}{\beta'\gamma'' - \gamma'\beta''}\right),$$

Les formules (3) définissent le groupe G*. Il n'a que 2 classes d'intransitivité de représentants $c_0 = (0, 0)$ et $c_1 = (1, 0)$.

A c_0 correspondent les pseudogroupes de Lie localement semblables au pseudogroupe opérant dans R^3 d'équations finies

$$X = f(x), \qquad Y = g(x) + y, \qquad Z = h(x) + z$$

(f, g, h fonctions analytiques arbitraires).

A c_1 correspondent les pseudogroupes localement semblables au pseudogroupe défini dans le demi espace $y > 0$ de R^3, d'équations finies

$$X = f(x), \qquad Y = g(x) . y, \qquad Z = g(x) . z + h(x).$$

4. — Automorphismes infinitésimaux.

A) *Dérivées de Lie.* — Soit η un champ de vecteurs, ou transformation infinitésimale (*t. i.*) sur X. Le groupe local à un paramètre de transformations qu'il détermine sera noté exp. $(t\eta)$ [32] et la dérivation de Lie par rapport à η, $\mathfrak{L}(\eta)$.

Φ (resp. φ) étant une forme sur X à valeurs dans $\mathfrak{L}(M, P)$ (resp. M) (ch. II, § 2), comme $\mathfrak{L}(\eta)$ est une dérivation de degré zéro sur les formes scalaires, on voit immédiatement

$$\mathfrak{L}(\eta)(\Phi.\varphi) = (\mathfrak{L}(\eta)\Phi).\varphi + \Phi.(\mathfrak{L}(\eta)\varphi). \tag{1}$$

De même qu'une transformation μ de X à un prolongement $\tilde{\mu}$ à E(X) (cf. § 1), de même, une *t.i.* η sur X à un prolongement $\tilde{\eta}$ à E(X); il peut être défini par

$$\exp.\,(t\tilde{\eta}) = \widetilde{(\exp\,(t\eta))}$$

et satisfait par conséquent à

$$p \circ \exp(t\tilde{\eta}) = \exp(t\eta) \circ p \tag{2}$$

d'où

$$\mathfrak{L}(\tilde{\eta}) \circ p^* = p^* \circ \mathfrak{L}(\eta). \tag{3}$$

Si Φ est une forme tensorielle sur E(X), la forme $\mathfrak{L}(\tilde{\eta})\,\Phi$ est appelé « dérivée de Lie de Φ par rapport à η » et souvent notée $\mathfrak{L}(\eta)\,\Phi$: nous éviterons d'employer cette notation. Soit θ_U un corepère sur $U \subset X$: c'est une 1-forme sur U à valeurs dans R^m. $\mathfrak{L}(\eta)\,\theta_U$ est donc aussi une 1-forme à valeurs dans R^m de sorte que, si z_U est le repère dual de θ_U, $(\mathfrak{L}(\eta)\,\theta_U)_x \circ z_U(x)$ est un endomorphisme $a_U(x)$ de R^m et

$$(\mathfrak{L}(\eta)\,\theta_U)_x = a_U(x).z_U^{-1}(x)$$

c'est-à-dire qu'il existe une fonction a_U, $U \to \underline{L_m}$, telle que

$$\mathfrak{L}(\eta)\theta_U = a_U.\theta_U. \tag{4}$$

Réciproquement, la fonction locale a_U détermine le transformé du corepère θ_U par une transformation finie du groupe à un paramètre engendré par η :

$$(\exp\,(t\eta)^*\theta_U)_x = \left(\exp\int_0^t a_U[x(\tau)]d\tau\right).(\theta_U)_x \tag{5}$$

[32] Dans tout ce paragraphe, les notations qui ne sont pas totalement explicitées ici, se trouvent définies dans A. Lichnerowicz [23].

où $x(\tau) = \exp(\tau\eta).x$ et où, au second membre, exp désigne la représentation exponentielle $L_m \to L_m$.

Soit g_U la fonction sur E_U à valeurs dans $L_m \subset \overline{L_m}$ définie par la carte locale associée à z_U : $z = z_U(pz).g_U(z)$ pour $z \in E_U$. Si g_U^{-1}, est la fonction $z \to (g_U(z)^{-1})$, on a donc dans E_U la représentation suivante de la forme fondamentale θ de $E(X)$:

(6) $$\theta = g_U^{-1}.p^*\theta_U$$

or de $\tilde{\mu}^*\theta = \theta((4)\,\S\ 1)$ découle $\mathfrak{L}(\tilde{\mu})\theta = 0$ et, en appliquant (1) (3) et (4), la dérivation de Lie de (6) donne

$$\mathfrak{L}(\tilde{\eta})\theta = [\mathfrak{L}(\tilde{\eta})g_U^{-1} + g_U^{-1}(p^*a_U)]p^*\theta_U$$

d'où

(7) $$\mathfrak{L}(\tilde{\eta})g_U^{-1} = -g_U^{-1}.(p^*a_u)$$

et

(8) $$\mathfrak{L}(\tilde{\eta})g_u = (p^*a_U).g_U.$$

Soit alors Φ une forme tensorielle sur $E(X)$ à valeurs dans un espace vectoriel M et de type $\mathfrak{R}(L_m)$. On a dans E_U une représentation locale de Φ analogue à (6) :

(9) $$\Phi = \mathfrak{R}(g_U^{-1}).p^*\Phi_U \qquad \text{où} \qquad \Phi_U = z_U^*\Phi.$$

Par un calcul simple on déduit de (7)

(10) $$\mathfrak{L}(\tilde{\eta})(g_U^{-1}) = -\mathfrak{R}(g_U^{-1}).\tilde{\mathfrak{R}}(p^*a_U)$$

puis de (9)

(11) $$\mathfrak{L}(\tilde{\eta})\Phi = \mathfrak{R}(g_U^{-1}).p^*[\mathfrak{L}(\eta)\Phi_U - \tilde{\mathfrak{R}}(a_U).\Phi_U]$$

soit

(12) $$(\mathfrak{L}(\tilde{\eta})\Phi)_U = \mathfrak{L}(\eta)\Phi_U - \tilde{\mathfrak{R}}(a_U).\Phi_U.$$

Enfin, si π est une forme de connexion sur E, on a localement dans E_U

(13) $$\pi = (\mathrm{adj}\ g_U^{-1}).p^*\pi_U + g_U^{-1}.dg_U$$

d'où l'on déduit par un calcul faisant intervenir seulement les formules déjà établies

(14) $$\mathfrak{L}(\tilde{\eta})\pi = (\mathrm{adj}\ g_U^{-1}).p^*[\mathfrak{L}(\eta)\pi_U + [\pi_U,\ a_U] + da_U]$$

où $\pi_U = z_U^* \pi$; ceci met en évidence le caractère tensoriel de $\mathcal{L}(\tilde{\eta})\pi$ et peut s'écrire

$$(15) \qquad (\mathcal{L}(\tilde{\eta})\pi)_U = \mathcal{L}(\eta)\pi_U + [\pi_U, a_U] + da_U.$$

B) *Automorphismes infinitésimaux* (*a. i*) *d'une* G-*structure* S. Une *t.i.* de X est un *a.i.* de S si exp $(t\eta)$ est un automorphisme de S pour tout t pour lequel il est défini. Si ω_U est un corepère distingué de S sur U, la fonction a_U à valeurs dans $\underline{L_m}$ définie par (4) telle que $\mathcal{L}(\eta)\omega_U = a_U\omega_U$ prend ses valeurs dans $\underline{G}$. Réciproquement d'après (5), si a_U est à valeurs dans $\underline{G}$, exp $(t\eta)^*\omega_U$ est un corepère distingué de S et η est un *a.i.*

Parmi les G-structures, nous avons considéré (ch. III, § 2) les « G-structures définies par un tenseur ». En reprenant les mêmes notations, nous allons établir :

Proposition IV, 4, 1. — *Si* S *est une* G-*structure définie par un tenseur t sur* E(X), *pour que* η *soit une a.i. de* S *il faut et suffit que* $\mathcal{L}(\tilde{\eta})t = 0$.

En effet, d'après (12), on a dans un ouvert $V \subset X$ muni d'un corepère distingué ω_V de S, $(\mathcal{L}(\tilde{\eta})t)_V = \mathcal{L}(\eta)t_V - \tilde{\mathcal{R}}(a_V)t_V$; ω_V étant un corepère distingué, $t_V = u$ est constant et $\mathcal{L}(\eta)t_V = 0$. Pour que $\mathcal{L}(\tilde{\eta})t = 0$ il faut et suffit donc que $\tilde{\mathcal{R}}(a_V)u = 0$: or, pour cela, il faut et suffit que $a_V(x) \in \underline{G}$ c'est-à-dire que η soit un *a.i.* c.q.f.d. Ceci montre en particulier qu'il y a identité entre les isométries infinitésimales d'une structure riemanienne et les *a.i.* de la $O(m)$-structure qu'elle détermine.

Soit $\hat{G}$ le groupe des matrices $\lambda . g$ (λ réel > 0, $g \in G$) et $\hat{S}$ la $\hat{G}$-structure extension de S : un automorphisme (resp. *a.i.*) de $\hat{S}$ peut être appelé *transformation conforme* (resp. *transformation infinitésimale conforme* : *t.i.c.*) de S. En particulier, une transformation conforme μ est une « homothétie » s'il existe $\lambda \in R$ tel que, pour tout corepère distingué ω_U de S, $\frac{1}{\lambda}\mu^*\omega_U$ soit encore un corepère distingué de S. Pour que η soit une *homothétie infinitésimale*, c'est-à-dire que exp. $(t\eta)$ soit une homothétie quel que soit t, il faut que $a_U = k\mathrm{I} + \alpha_u$, $\alpha_u(x) \in \underline{G}$. Cela suffit d'après (5) car alors

$$\int_0^t a_u[x(\tau)]\,d\tau = kt\mathrm{I} + \int_0^t \alpha_u[x(\tau)]d\tau = kt\,\mathrm{I} + \beta_u(x, t) \quad \beta_u(x, t) \in \underline{G}$$

et $\exp.(kt\mathrm{I} + \beta_u(x, t)) = e^{kt}.\exp \beta_u(x, t)$ puisque $kt\mathrm{I}$ et $\beta_u(x, t)$ commutent. On a donc

$$(\exp(t\eta)^*\omega_{\mathrm{U}})_x = e^{kt}.\exp \beta_u(x, t)(\omega_{\mathrm{U}})_x \qquad \text{où} \qquad \exp \beta_{\mathrm{U}}(x, t) \in \mathrm{G}$$

c'est-à-dire que $e^{-kt}.(\exp(t\eta)^*\omega_{\mathrm{U}})$ est un corepère distingué et η une homothétie infinitésimale.

Les définitions données ici coïncident encore avec les notions usuelles dans le cas Riemannien.

Soit $\mathrm{S}' = \mathrm{S}.l$ une G′-structure équivalente à S. Si ω_{U} est un corepère distingué de S, $\omega'_{\mathrm{U}} = l^{-1}.\omega_{\mathrm{U}}$ est un corepère distingué de S′. Pour une *t.i.* η on a

$$\mathcal{L}(\eta)\omega'_{\mathrm{U}} = l^{-1}.\mathcal{L}(\eta)\omega_{\mathrm{U}} = l^{-1}.a_{\mathrm{U}}.\omega_{\mathrm{U}} = l^{-1}.a_{\mathrm{U}}.l.\omega'_{\mathrm{U}}.$$

Si $a_{\mathrm{U}} \in \underline{\mathrm{G}}$ (resp. $\underline{\hat{\mathrm{G}}}$), $l^{-1}.a_{\mathrm{U}}.l \in \underline{\mathrm{G}}'$ (resp. $\underline{\hat{\mathrm{G}}}'$) de sorte qu'il y a identité entre les *a.i.* (resp. *t.i.c.*) des structures S et S′ : ce sont les *a.i.* (resp. *t.i.c.*) de la $\mathcal{C}$-structure déterminée par S et S′. Il en est de même pour les homothéties infinitésimales.

Si S′ est une extension de S tout *a.i.* (resp. *t.i.c.*) de S est aussi un *a.i.* (resp. *t.i.c.*) de S′ : la réciproque n'est évidemment pas vraie en général et conduit au problème

P_1 : S *étant subordonnée à* S′, *dans quelles conditions peut-on affirmer qu'un a.i. de* S′ *est aussi un a.i. de* S?

Si pour le groupe G, les G-structures S admettent une S-connexion canonique de forme π_{S} (c'est-à-dire telle que $\tilde{\mu}^*\pi_{\mathrm{S}'} = \pi_{\mathrm{S}}$ pour tout isomorphisme μ d'une G-structure S sur la G-structure S′) un *a.i.* de S est une *t.i.* affine de π_{S} puisque $\exp(t\tilde{\eta})^*\pi_{\mathrm{S}} = \pi_{\mathrm{S}}$ entraîne $\mathcal{L}(\tilde{\eta})\pi_{\mathrm{S}} = 0$. La réciproque, généralement fausse même lorsqu'il existe une S-connexion canonique, pose le problème

P_2 : γ *étant une* S-*connexion, quand une t.i. affine pour* γ *est-elle une a.i. de* S?

Ces deux problèmes bien connus dans le cas du groupe orthogonal et de certains de ses sous-groupes (cf. [23]) ont été étudiés avec des hypothèses assez générales par R. Hermann ([16] et [17]) : nous allons pour terminer reprendre la méthode d'Hermann et en déduire des résultats en général plus larges que les siens.

C) *Lemme d'Hermann.* — Soient les sous-groupes $\mathrm{G} \subset \mathrm{G}' \subset \mathrm{L}_m$. Supposons G réductif dans G′ et soit une décomposition en somme direct $\mathrm{G}' = \underline{\mathrm{G}} \oplus \mathrm{M}$, où $adj.(\mathrm{G})\mathrm{M} \subset \mathrm{M}$. Soient S une

G-structure subordonnée à une G′-structure S′ et η un *a.i.* de S′. ω_U étant un corepère distingué de S, sa dérivée de Lie est $\mathcal{L}(\eta)\omega_U = a_U . \omega_U$. Décomposons a_U suivant

$$a_U = b_U + c_U, \quad b_U(x) \in \underline{G}, \quad c_U(x) \in M.$$

Proposition IV, 4, 2. — 1° *Les c_U définissent un tenseur* C *de type adjoint — c'est-à-dire un champ d'endomorphismes de l'espace tangent à* X *— dont la nullité est la condition nécessaire et suffisante pour que η soit un a.i. de* S; 2° *si de plus η est une t.i. affine d'une* S*-connexion γ,* C *est à dérivée covariante nulle dans γ.*

Le changement de corepère distingué de S étant défini dans $U \cap V$ par $\omega_V = M_{UV}\omega_U$ (M_{UV} fonction sur $H \cap V$ à valeurs dans G), la fonction a_U se transforme en

$$a_V = (ad\, M_{UV})\, a_U + i(\eta)\,(dM_{UV}(M_{UV})^{-1})\ ({}^{33})$$

d'où, en prenant les parties à valeurs dans M des deux membres

$$c_V = (ad\, M_{UV})\, c_U$$

ce qui démontre le premier résultat.

Si η est une *t.i.* affine de la S-connexion γ de forme π, en prenant la partie dans M des deux membres de la relation (15) il vient

$$[\pi_U, c_U] + dc_U = 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad (\nabla C)_U = 0$$

ce qui établit le second résultat.

D) *Sur le problème* P_1 nous allons établir

Théorème IV, 4, 1 [34]. — G *étant un sous-groupe de* $O(m)$ *et* S *une* G*-structure* presque intégrable *sur* X, *il y a identité entre les isométries infinitésimales de la structure riemannienne définie par* S *et les a.i. de* S *dans les cas suivants :*

1° X *est compacte*;

2° X *n'admet pas de 2-forme à dérivée covariante nulle — par exemple* X *est irréductible et n'admet pas de structure kählerienne*;

3° X *irréductible est kählerienne à courbure de Ricci différente de* 0;

[33] $i(\eta)\,\Phi$ désigne le produit intérieur de la forme Φ par le champ de vecteurs η.

[34] Le théorème 5 de [17] donne seulement ce résultat si X est compacte, le deuxième nombre de Betti étant nul.

4° X *complète admet, au moins en un point, une courbure de Ricci non dégénérée.*

G est réductif dans O(m) pour la décomposition $\underline{\mathrm{O}(m)} = \underline{\mathrm{G}} + \mathrm{M}$, où M est l'ortho-complément de $\underline{\mathrm{G}}$ dans $\underline{\mathrm{O}(m)}$ pour la métrique définie sur $\underline{\mathrm{O}(m)}$ par $(\alpha^i_j).(\alpha'^k_l) = \sum_{i,j} \alpha^i_j \alpha'^i_j$. S presque intégrable admet une S-connexion γ à torsion nulle qui induit donc une connexion euclidienne à torsion nulle, c'est-à-dire la connexion riemannienne. Une isométrie infinitésimale η étant un *t.i.* affine pour la connexion riemannienne, c'est une *t.i.* affine pour γ et on peut lui appliquer le lemme.

ω_{U} étant un corepère distingué de S sur $\mathrm{U} \subset \mathrm{X}$, gardons les notations du lemme : il s'agit de montrer la nullité de C dans les différentes hypothèses. C tenseur de type adjoint à valeurs dans $\mathrm{M} \subset \underline{\mathrm{O}(m)}$ à des composantes C^i_j antisymétriques et $\alpha_{ij} = g_{ik}\mathrm{C}^k_j$ sont les composantes d'une 2-forme α à dérivée covariante nulle (puisque $\nabla g = \nabla \mathrm{C} = 0$). Ceci montre le théorème dans l'hypothèse 2°) (pour l'exemple voir A. Lichnérowicz [22], p. 266). Dans les hypothèses 3° où 4° toute 2-forme à dérivée covariante nulle détermine un élément de l'algèbre de Lie du groupe d'holonomie homogène (cf. A. Lichnérowicz [22] p. 250 et [23] p. 104) donc $\mathrm{C}_{\mathrm{U}}(x) \subset \underline{\sigma_{z_u(x)}} \subset \underline{\mathrm{G}}$ puisque, $z_{\mathrm{U}}(x)$ repère dual de $(\omega_{\mathrm{U}})_x$ est un repère distingué de S : et $\mathrm{C}_{\mathrm{U}}(x) \in \underline{\mathrm{G}} \cap \mathrm{M}$ entraîne $\mathrm{C} = 0$.

Plaçons-nous dans le cas compact et utilisons les notations abrégées suivantes : ω^i composantes de ω_{U}, π^i_j composantes de $\pi_{\mathrm{U}} = z^*_{\mathrm{U}}\pi$ (π forme de connexion de γ) a^i_j (resp. C^i_j) composantes de a_{U} (resp. C_{U}). π étant la connexion riemanienne, on a

$$\pi^i_j + \pi^j_i = 0 \tag{16}$$

$$d\omega^i + \pi^i_k \wedge \omega^k = 0, \tag{17}$$

or, $\mathfrak{L}(\eta)\omega_{\mathrm{U}} = a_{\mathrm{U}}.\omega_{\mathrm{U}}$ c'est-à-dire

$$di(\eta)\omega^i + i(\eta)\, d\omega^i = a^i_j\omega^j \tag{18}$$

mais $i(\eta)\omega^i = \eta^i$ sont les composantes de η dans la base $z_{\mathrm{U}}(x)$ et (17) donne

$$i(\eta)\, d\omega^i + (i(\eta)\pi^i_k).\omega^k - \pi^i_k\eta^k = 0$$

(18) devient donc

$$a^i_j\omega^j = d\eta^i + \pi^i_k\eta^k - (i(\eta)\pi^i_j)\omega^j = (\nabla_j\eta^i - i(\eta)\pi^i_j)\omega^j \tag{19}$$

d'où l'on déduit

$$a^i_j = \nabla_j \eta^i - i(\eta)\pi^i_j. \tag{20}$$

Tout d'abord le fait que η soit une isométrie infinitésimale équivaut à $a_U \in \underline{O(m)}$ donc à $a^i_j + a^j_i = 0$. Comme $(i(\eta)\pi^i_j) \in \underline{O(m)}$ on retrouve la condition nécessaire et suffisante pour que η soit une isométrie infinitésimale :

$$\nabla_j \eta^i + \nabla_i \eta^j = 0. \tag{21}$$

D'autre part, γ étant une S-connexion et ω_U un corepère distingué pour S, $(i(\eta)\,\pi^i_j) \in \underline{G}$. On déduit donc de (20) avec des notations qui sont claires

$$C^i_j = (a^i_j)_M = (\nabla_j \eta^i)_M. \tag{22}$$

Soit le champ de vecteurs $\xi = C.\eta$ de composantes dans $z_U(x)$ $\xi^i = C^i_j \eta^j$; alors

$$\nabla_i \xi^i = c^i_j(\nabla_i \eta^j) \quad \text{puisque} \quad \nabla_k c^i_j = 0$$

et d'après (21)

$$\nabla_i \xi^i = -\sum_{i,j} c^i_j(\nabla_j \eta^i) = -\sum_{i,j} c^i_j(c^i_j + (\nabla_j \eta^i)_{\underline{G}})$$

soit, d'après l'orthogonalité de M et G

$$\nabla_i \xi^i = -\sum_{i,j}(c^i_j)^2 = -c^2.$$

Si X est orientable et si ν est l'élément de volume, il vient

$$0 = \int_X (\nabla_i \xi^i)\nu = -\int_X c^2 \nu \leqslant 0,$$

ce qui exige $C^2 = 0$ et $C = 0$. La proposition est alors démontrée. On se débarrasse de l'hypothèse X orientable en passant éventuellement au revêtement orientable de X muni des structures images réciproques.

On aurait aussi pu déduire notre théorème de l'étude du groupe de Kostant engendré par η (cf. A. Lichnérowicz [23]).

E) *Sur le problème* P_2.

Théorème IV, 4, . — *G étant réductif dans* L_m, *soit* X *munie d'une* G-*structures* S *et d'une* S-*connexion* γ *dont le groupe d'holonomie est irréductible dans le complexe. Alors toute t.i.*

affine pour γ *est une homothétie infinitésimale de* S. *De plus* η *est un a.i. de* S *dans les cas suivants:*

1° G *est invariant par homothétie* $(\hat{G} = G)$;

2° X *est compacte,* G *unimodulaire et* γ *sans torsion* (35).

Le champ de tenseurs C étant à dérivée covariante nulle, l'opérateur C_x qu'il définit sur T_x appartient au centralisateur de ψ_x (groupe d'holonomie homogène) dans l'algèbre des endomorphismes de T_x (cf. [22], § 54). Soient $h \in \psi_x$ $(h.C_x = C_x.h)$ et $v \in T_x$ un vecteur propre de C_x pour la valeur propre k (réelle ou complexe), et E_k l'espace des vecteurs propres pour la valeur propre k. On a

$$C_x v = kv \qquad \text{et} \qquad C_x(hv) = hC_x v = hkv = khv$$

c'est-à-dire que $v \in E_k$ entraîne $hv \in E_k$; E_k est invariant par ψ_x et, par suite de l'irréductibilité, $E_k = T_x^C$; $C_x v = kv$ quel que soit $v \in T_x^C$ et $C_x = k(x).I(x)$. C étant à dérivée covariante nulle il vient $k(x) = k$ constante sur X et $C = k.I$. Alors $a_U = b_U + k.I$, $b_U \in \underline{G}$, c'est-à-dire que η est une homothétie infinitésimale.

Si de plus G est invariant par homothétie $(\hat{G} = G)$ $C = kI$ entraîne $C \in \underline{G}$ c'est-à-dire $C = 0$ et η est un *a.i.* Si enfin G est unimodulaire, $b_U \in \underline{G}$ entraîne $tr\, b_U = 0$ et par conséquent $tr\, a_U = tr\, C_U = mk$. La nullité de la torsion de γ entraîne par un calcul déjà fait (formule (20))

$$a_j^i = \nabla_j \eta^i - i(\eta)\, \pi_j^i$$

π étant une forme à valeurs dans $\underline{G}$, $tr\,\pi = \pi_i^i = 0$ et il vient $tr\, a_U = \nabla_i \eta^i$ c'est-à-dire

$$mk = \nabla_i \eta^i. \tag{23}$$

X est orientable puisque G est unimodulaire; si donc elle est compacte, ν étant l'élément de volume, l'intégration de (23) fournit

$$mk \int_X \nu = \int_X (\nabla_i \eta^i)\, \nu = 0$$

d'où $k = 0$; puis $C = 0$ de sorte que η est un *a.i.*, c.q.f.d.

(35) Ce dernier cas de notre théorème fait l'objet du théorème IV de [17] dans des hypothèses un peu différentes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Aragnol. Sur la Géométrie différentielle des espaces fibrés, *thèse*, Paris, 1958.

[2] D. Bernard. Sur la structure des pseudogroupes de Lie, *C.R. de l'Acad. des Sc. de Paris*, 239, 1954, pp. 1263-1265.

[3] D. Bernard. Sur l'intersection des sous-espaces fibrés principaux d'un espace fibré principal, *Ibid.*, 243, 1956, pp. 1714-1716.

[4] D. Bernard. Sur les G-structures complexes, *Ibid.*, 243, 1956, pp. 1821-1824.

[5] D. Bernard. Définition globale du tenseur de structure d'une G-structure, *Ibid.*, 247, 1958, pp. 1546-1549.

[6] E. Cartan. Sur la structure des Groupes infinis de transformation, *Ann. Sc. Ec. Norm.*, 21, 1904, pp. 153-206 et 22, 1905, pp. 219-308; ou Œuvres Complètes, Paris, 1953, II, pp. 571-714.

[7] E. Cartan. La structure des Groupes infinis, Séminaire de Math., 4e An., 1936-37, exposé G. ou Œuvres Complètes, Paris, 1953, II, pp. 1335-1358.

[8] E. Cartan. Les Systèmes Différentiels extérieurs, Paris, Hermann, 1945.

[9] S. S. Chern. Géométrie différentielle, *Coll. Int. du C.N.R.S.*, Strasbourg 1953, pp. 119-135.

[10] S. S. Chern. On a Generalization of Kähler Geometry, *A symposium in honour of S. Lefchetz*, *Princeton*, pp. 103-121.

[11] C. Chevalley. Theory of Lie Groups, I, *Princeton*, 1946.

[12] C. Ehresmann, Sur la Théorie des espaces fibrés, *Coll. Int. du C.N.R.S.*, *Top. Alg.*, Paris, 1947, pp. 3-35.

[13] C. Ehresmann. Structures locales et structures infinitésimales, *C.R. de l'Acad. des Sc. de Paris*, 254, 1951, pp. 587-589.

[14] C. Ehresmann. Introduction à la théorie des Structures infinitésimales et des pseudogroupes de Lie. *Coll. Intern. du C.N.R.S.*, *Géom. Diff.*, Strasbourg, 1953, pp. 97-110.

[15] J. Frenkel. Cohomologie non abélienne et espaces fibrés, *Thèse*, Paris, 1957, ou *Bull. Soc. Math.*, *France*, 85, 1957, pp. 135-220.

[16] R. Hermann. Sur les isométries infinitésimales et le groupe d'holonomie d'un espace de Riemann. *C.R. de l'Acad. des Sc. de Paris*, 239, 1954, pp. 1178-1180.

[17] R. Hermann. Sur les automorphismes infinitésimaux d'une G-structure, *Ibid.*, 239, 1954, pp. 1760-1761.

[18] G. Legrand. Étude d'une généralisation..., *Thèse*, Paris, 1958.

[19] P. Libermann. Sur le problème d'équivalence de certaines structures infinitésimales, *Thèse*, *Annali di Matématica*, 36, 1954.

[20] P. LIBERMANN. Sur les structures presque complexes et autres structures infinitésimales régulières, *Bull. Soc. Math. France*, 83, 1955, p. 195-224.

[21] P. LIBERMANN. Pseudogroupes infinitésimaux. Application aux G-structures. *C.R. de l'Acad. des Sc. de Paris*, 246, 1958, p. 1365-1368.

[22] A. LICHNEROWICZ. Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie, Rome, 1955.

[23] A. LICHNEROWICZ. Géométrie des Groupes de Transformations, Paris, 1958.

[24] Y. MATSUSHIMA. Pseudogroupes de Lie Transitifs, *Séminaire Bourbaki*, 1955, polycopié.

[25] D. C. SPENCER. Différentiable Manifolds, (notes Miméographiées, Princeton University).

[26] N. STEENROD. The Topology of Fibre bundles (Princeton Math. Ser. nº 14).

[27] H. YAMABE. On an arcwise connected subgroup of a Lie Group, Osaka *Moth. journal*, 2, 1950, p. 13-14.

[28] W. KLINGENBERG. Eine Kennzeichnung der Riemannschen sowie der Hermiteschen Mannigfaltigkciten. *Math. Zeitschr*, 70, 1959, p. 300, 309.

(*Thèse, Fac. Sciences*, Paris, 1959).

TABLE DES MATIÈRES

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
10 (1960), 271-283.

THE WINDING NUMBER ON TWO MANIFOLDS

par Bruce L. REINHART (R.I.A.S.) (1).

In his thesis [6], Smale has found the regular homotopy classes of regular closed curves (*i. e.*, immersed circles) on a Riemannian manifold M. His work leaves unanswered the question : Which homotopy classes contain embedded circles? We may assume tha the dimension of M is 2, since otherwise the problem is trivial. Then our question has been answered for the plane by Whitney [9] by use of the winding number. For the torus, we have extended the winding number technique to get necessary conditions for the existence of a simple closed curve in a given regular homotopy class [3, 4].

In this paper, we shall define the winding number, or more precisely the winding homomorphism, for compact orientable two manifolds; it is a homomorphism from the regular homotopy group of M into the integers modulo $\varkappa$, where $\varkappa$ is the Euler characteristic of M. We shall compute the value of $\mathscr{w}$ for a regular simple closed curve, assuming its homotopy class (in the usual sense) is known. As applications, we get conditions for the nonexistence of periodic solutions of differential equations, and necessary and sufficient conditions for regular homotopy of curves on the sphere and the torus.

(1) This work was begun at the University of Michigan with the support of the Office of Naval Research, and completed at RIAS, partially supported by the United States Air Force Office of Scientific Research under contract number 49 (638)-382.

1. — The winding homomorphism. Axioms.

Let M be a compact, connected, oriented, two dimensional Riemannian manifold of class C^3 and Euler number χ. A parametrized curve on M will be a mapping of the unit interval $I = \{t/0 \leqslant t \leqslant 1\}$ into M; it will be called regular if it is C^1 and has everywhere a nonzero derivative, that is, the image has a nonzero tangent vector at each point. A regular curve is an equivalence class of parametrized regular curves under the relation: two parametrized curves are equivalent if their parameters are related by a function with everywhere positive derivative. Corresponding to every regular curve C there is an induced curve $\dot{C} : I \to T(M)$ where $T(M)$ is the bundle of unit vectors tangent to M. $\dot{C}$ will be called the tangent curve to C. A homotopy of curves will be called regular if each stage is a regular curve, and there is induced a homotopy of the tangent curves. A regular curve is closed if its initial point and direction coincide with its final point and direction. The notion of regular homotopy with fixed base and direction defines an equivalence relation on the set of regular closed curves beginning at this base. By the theorem of Smale [6], the regular homotopy classes are in one one correspondence with the elements of the fundamental group $\pi_1(T(M))$. This correspondence is such that the composition of regular curves on M by joining them end to end corresponds to the multiplication in $\pi_1(T(M))$; hence the set of regular homotopy classes may be given a natural group structure. We shall call this the regular homotopy group of M and denote it by $\pi_R(M)$. The zero of $\pi_R(M)$ is the class of a nullhomotopic curve shaped like a figure 8, traced out as in ordinary writing. For a fuller discussion of the concept of regular curves, see [6].

Let M be of genus g, and $\{A_i\}$ $i = 1, \ldots, 2g$ be a generating set for $\pi_1(M)$, satisfying the relation

$$A_1 A_2 A_1^{-1} A_2^{-1} \ldots A_{2g}^{-1} = 1.$$

Let H be a fibre of $T(M)$. Then it is proved by Seifert [5] that $\pi_1(T(M))$ is generated by $\{A_i, H\}$ with the relations: H commutes with each other generator, and

$$A_1 A_2 A_1^{-1} \ldots A_{2g}^{-1} H^{2g-2} = 1$$

(see also § 2 below). In the case of the torus, the methods of [4] show that there is defined a homomorphism

$$w : \pi_R(M) \to Z$$

such that the value of w on any regular curve with a finite number of selfintersections is equal to the number of nullhomotopic loops which it contains. Here Z is the ring of integers. For general M, we might seek a similar homomorphism. Such cannot be found, however, since it would depend only upon the abelianized form of $\pi_R(M)$, and in this form H is of order $|\chi|$. This suggests using instead a homomorphism into Z_χ, the integers modulo χ.

It will be convenient to introduce the notion of a regular generating system for $\pi_1(M)$ at the point Q; this will be a set of regular simple closed curves $\{A_i\}$ $i = 1, \ldots, 2g$, on M tangent to a fixed direction at Q. Let $D_1 \subset D_2$ be two discs about Q of small diameter. We shall assume that the curves A_i do not meet outside D_2; then from the structure of the 4 g sided polygon we see that their crossings of its boundary are arranged in the order.

$$1/o,\ 2/i,\ 1/i,\ 2/o,\ \ldots,\ (2g-1)/o,\ (2g)/i,\ (2g-1)/i,\ (2g)/o$$

where $1/o$ is the point where A_1 leaves D_2, $2/i$ the point where A_2 enters, etc. Moreover, we shall assume that the A_i meet within D_1 only at Q, and that their crossings of its boundary are arranged in the order $1/o$, $3/o$, $\ldots$, $(2g-1)/o$, $2/i$, $1/i$, $4/i$, $\ldots$, $(2g)/i$, $(2g-1)/i$, $2/o$, $4/o$, $\ldots$, $(2g)/o$. Finally, we shall assume that in $D_2 - D_1$, only those crossings occur which are necessitated by the relative order of the points on the two boundary curves; for this purpose, the ordering will be understood to be linear, not circular. The properties of a regular generating system will be examined more closely in § 3.

We may now define precisely the object of our study, the winding homomorphism.

Definition. — *The winding homomorphism w is a homomorphism of $\pi_R(M)$ into $Z\chi$ (the integers modulo χ) such that.*

(i) w has the value O on the regular homotopy class of each of the curves of a regular generating system for $\pi_1(M)$.

(ii) w has the value 1 on any positively oriented contractible regular simple closed curve passing through the base direction at Q.

Definition. — *The winding number of a regular closed curve* C *is the value of w on the regular homotopy class of* C; *by abuse of language, we shall denote this value by w* (C).

2. — Existence and uniqueness of the winding homomorphism.

In order to show the existence and uniqueness of w, we use the techniques of obstruction theory, as exposed in Steenrod [7]. It is known that there exists a cross section F of the unit tangent bundle T(M) defined on M minus one point P. Given any two such sections with the same singular point, hence the same primary obstruction, there is defined a difference cocycle, which is a coboundary if and only if the two sections are homotopic. Hence, the homotopy classes of such sections correspond one one to the elements of $H^1(M, P; Z)$, which is isomorphic to $H^1(M; Z)$.

Definition. — *If* C *is a closed curve on* M *and* F *and* F′ *are vector fields defined along* C, *we shall denote by* $d(C; F, F')$ *the value of the difference cohomology class of* F *and* F′ *on the homology class determined by* C. $d(C; F, F')$ *will be called the difference number of* C *with respect to* F *and* F′.

At any point of M — P, there is a signed angle from F′ to F defined by the Riemannian metric; denote this angle by F — F′.

Proposition 1. — *If* F *and* F′ *are of class* C^1,

$$d(C; F, F') = \frac{1}{2\pi}\int_C d(F - F').$$

Proof. The function F — F′ is a map from C onto the unit circle, considered as the set of angles. As shown in [4, Proposition 1], the degree of this mapping is given by the indicated integral. On the other hand, from obstruction theory it is clear that this degree is equal to the difference number.

DEFINITION. — *The winding number of a regular closed curve* C *with respect to a vector field* F *which has no singularity on* C *is*

$$w(C; F) = d(C; \dot{C}, F)$$

where $\dot{C}$ *is the tangent vector field to* C.

If C is of class C^2, then by Proposition 1

$$w(C; F) = \frac{1}{2\pi}\int_C d(\dot{C} - F).$$

It follows from Smale's theorem that any regular curve of class C^2 with tangent vectors close to those of a given curve C is regularly homotopic to C. On the other hand, the winding number is clearly unchanged by a small deformation. Hence, we shall allow ourselves approximations by C^2 regular curves whenever it is convenient.

Let A_i be a regular generating system for $\pi_1(M)$, so that the homology classes of these curves form a basis for $H_1(M; Z)$. Let H be a regular simple closed curve through the base direction at Q, contained in D_1 and positively oriented. Let F′ be a vector field with one singularity, located at a point P not lying on any of the curves in question. Finally, let $w(A_i; F') = \alpha_i$. Define a vector field F by the requirement that $d(A_i; F, F') = \alpha_i$. F is unique up to homotopy, and

$$w(A_i; F) = w(A_i; F') + d(A; F', F) = \alpha_i - \alpha_i = 0.$$

Let $\varkappa_*(z)$ for $z \in Z$ denote the class modulo $\varkappa$ to which z belongs.

DEFINITION. — *If* C *is any regular closed curve,*

$$w(C) = \varkappa_* w(C; F).$$

LEMMA 1. — *Let* D *be a closed disk about* P *and let* N = M — D. *Then* $w(C; F)$ *depends only upon the regular homotopy class of* C *in* N, *so defines a homomorphism* w' : $\pi_R(N) \to Z$ *such that*

(*i*) w' *vanishes on the classes determined by* A_i, $i = 1, \ldots, 2g$.

(*ii*) $w' = 1$ *on the class of any nullhomotopic positively oriented regular simple closed curve through the base direction.*

Proof. Consider a regular homotopy $C(t, \tau)$ on N, where t is

the parameter along the regular curves. Expressing the integral for $w(C; F)$ in terms of t and τ, it is clearly a continuous function of τ. Since it is integer valued, it must be constant. Thus we may define for $\xi \in \pi_R(N)$, $C \in \xi$, $w'(\xi) = w(C; F)$. w' is a homomorphism; this follows easily from the integral formula. (i) follows from the choice of F. To show (ii) let C be a curve of the kind required. Lifting this curve up into the universal covering space of N, we again get a closed curve, which is regularly homotopic to a small simple closed curve by the Whitney-Graustein theorem [9]. This homotopy projects into a regular homotopy in N; we may suppose that the final curve is small enough to lie on a given disc about the base point. Since any two nonsingular vector fields on a disc are homotopic, the winding number of the curve is the same as it would be in the plane, that is, $+1$.

It will be of interest later to note that the winding number of a regular « figure 8 » curve enclosing D, but nullhomotopic on M, is $2g - 2$. This follows by lifting the situation onto the universal covering space of M, then computing $w(C; F) = d(C; \dot{C}, F)$ by comparing each field with the field of constant direction.

In order to relate the results of lemma 1 to regular homotopy on M, we consider the injection map of N into M, and the induced injection of T(N) into T(M). The latter is consistent with the representation of regular homotopy classes by the homotopy of the tangent bundle. Using this fact, we may compute explicitly the map $i_{\#}: \pi_R(N) \rightarrow \pi_R(M)$ induced by the injection : $i: N \rightarrow M$. For this purpose, we use the notion of C W complexes, an exposition of which may be found in [8]. Our proof is simply a modernization of the work of Seifert [5]. We may give a C W decomposition of T(N) as follows :

Let Q be the base point on N, $A_i'(i = 1, \ldots, 2g)$ simple closed curves bounding a $4g$ sided polygon, and E a simple closed curve through Q, otherwise interior to the polygon, and enclosing D. T(N) has a product structure, given explicitly by the fact that F and its orthogonal field define a parallelization. Let H be the fibre through Q (this makes sense since N may be embedded as a cross section in T(N)). There is a deformation retract of N onto a manifold bounded by E, which gives rise to a deformation retract of T(N) onto a

manifold bounded by $H \times E$. Thus, we get the following decomposition of space or the homotopy type of $T(N)$:

I. Zero cell: Q.

II. One cells: A'_i, H, and E.

III. Two cells: the 4 g sided polygon minus a disc, and the products of H with of each the other one cells.

IV. One three cell.

In order to get a decomposition of $T(M)$, we need to add a one cell E' on $E \times H$, such that E' is contractible as a curve on the surface of the solid torus filling $E \times H$; the homology class of this in terms of E and H may be computed by using the known index of the singularity at P. We need also to add a two cell spanning E', and a three cell which is the rest of the solid torus. Then $\pi_1(T(N))$ has generators A'_i, H, and E and relations:

$$A'_1A'_2A_1'^{-1}A_2'^{-1} \dots A_{2g}'^{-1}E^{-1} = 1.$$

H commutes with all other generators

while $\pi_1(T(M))$ has generators A'_i, H, E, and E' and all the same relations, plus $EH^{2g-2} = E' = 1$. This may be rewritten so that we use the same generators as $\pi_1(T(N))$, but one additional relation;

$$EH^{2g-2} = 1.$$

Hence, the map on the fundamental group induced by the injection map becomes simply the quotient map by the least normal subgroup generated by EH^{2g-2}.

Proposition 2. — *There exists a unique homomorphism w of $\pi_R(M)$ into z_x such that.*

(i) w vanishes on the classes determined by A_i, $i = 1, \dots, 2g$ (where these are the A_i of lemma 1).

(ii) $w = 1$ on the class of any nullhomotopic positively oriented regular simple closed curve through the base direction.

Proof. Let $\xi \in \pi_R(M)$ and $C \in \xi$. Define

$$w(\xi) = w(C) = x_* w'(C; F).$$

It is clear from the definitions of w and w' that $w = x_* w' i_{\#}^{-1}$, when evaluated on a particular regular curve C. We need to show that w depends only upon the regular homotopy class of C in M. Let us represent the generating elements

of $\pi_1(T(M))$ and $\pi_1(T(N))$ by regular curves on M. Since $\varpi'(A_i)=0$, we may take A_i to represent the class of A_i'. Represent H by a positively oriented contractible regular simple closed curve on N. Finally, since E winds about the fibre over P $2g-2$ times, we represent it by a contractible « figure 8 » curve enclosing P. The kernel of $i_{\#}$ consists of products of conjugates of EH^{2g-2}; since

$$\chi_* \varpi'(EH^{2g-2}) = 0,$$

it follows that ϖ is a homomorphism on $\pi_R(M)$. Properties (i) and (ii) follow from lemma 1. These properties define ϖ on a generating system for $\pi_R(M)$; hence they determine it uniquely.

3 — The winding number of a regular simple closed curve.

Heretofore, we have defined the winding homomorphism and proved its exsitence and uniqueness. There remains the crucial question of computing the winding number for simple curves C. To do this, we represent the homotopy class of C in terms of a regular generating system for $\pi_1(M)$, then use a covering space argument to show that the winding number depends only upon the way the curves of the regular generating system used to represent C cross in D_2. Finally, we give an algorithm for computing the winding number.

We begin by extending the regular generating system to include curves representing A_i^{-1}. Each such curve will agree with the corresponding A_i outside D_1, except for the direction of motion. The curves A_{2i-1}^{-1} must cross the A_{2j-1}, $i<j$, in order to approach Q in the correct direction. The curves A_{2i}^{-1} must cross A_{2j}, $i<j$, and A_{2k-1}, all k, in order to approach Q in the correct direction. In leaving Q, A_{2i}^{-1} must cross A_{2i-1} and A_i^{-1} must cross A_j, provided there exists a k such that $i \leqslant 2k < j$. Only those intersections mentioned above will be permitted to occur. It is easily seen that $A_i\, A_i^{-1}$ is a nullhomotopic « figure 8 » curve; this justifies the notation A_i^{-1} and shows that $\varpi(A_i^{-1}) = 0$.

Let the homotopy class of C be given by $X_1 \ldots X_q$, where X_i is one of the classes $A_j^{\pm 1}$. We shall assume that no subsequence

$X_k X_{k+1} \ldots X_{k+r}$ is nullhomotopic; the total sequence can reduce to the empty sequence only in case C is nullhomotopic. In that case, the winding number is $+1$ if C is positively oriented and -1 if C is negatively oriented, by arguments used before.

LEMMA 2. — *On any orientable 2 manifold covered by the plane, every element of the fundamental group is of infinite order.*

Proof. The fundamental group acts on the plane as covering transformations. Thus, any element of finite order would generate a finite cyclic subgroup acting on the plane, such that only the identity has fixed points. But this is impossible, since by a theorem of Brouwer [1] and Kérékjarto [2], every such transformation is topologically équivalent to an orientation preserving linear map.

LEMMA 3. — *If* C *is a simple closed curve homotopic to* $X_1 \ldots X_q$, *the winding number of* C *is the sum of* q *integers, each associated to one of the ordered pairs* $X_1X_2, \ldots, X_{q-1}X_q$, X_qX_1.

Proof. Let $(\tilde{M}, p)$ be the universal covering space of M, that is, $p : \tilde{M} \to M$ and $\tilde{M}$ is either the sphere or the plane. In the first case, C must be nullhomotopic, so we may assume $\tilde{M}$ is the plane.

Let $\tilde{C}$ be a component of $p^{-1}(C)$; it is infinite in both directions because C is of infinite order, and it separates the plane. Let $\tilde{Q}_0$ be a point of $p^{-1}(Q)$ not lying on $\tilde{C}$. Let $\tilde{X}_1$ be a connected subset of $p^{-1}(X_1)$ beginning at $\tilde{Q}_0$ and covering every point of X_1 except Q exactly once, and let $\tilde{Q}_1$ be its endpoint.

By induction, define curves $\tilde{X}_i$ and points $\tilde{Q}_i$, $i = 2, \ldots, q$. The result is a curve X^* joining $\tilde{Q}_0$ to $\tilde{Q}_q$, whose projection is homotopic to C.

By proper choice of $\tilde{Q}_0$, we may assume that X^* does not meet $\tilde{C}$; then the same is true of the curve $\tilde{X}$ (infinite in both directions) made by duplicating X^* by the operation of the covering transformation $\bar{C}$ corresponding to C. $\tilde{X}$ is not necessarily a simple curve, since $\tilde{Q}_i$ has a connected

neighborhood in $p^{-1}(D_2)$ which may contain some points of intersection associated to the sequence $X_i X_{i+l}$; we may assume that the neighborhoods are also disjoint from C. Let P_1 be a point on $\tilde{X} \Leftrightarrow p^{-1}(D_2)$, R_1 a point on $\tilde{C}$, and P_2 and R_2 their transforms by $\overline{C}$. Let $\tilde{Y}$ be a regular simple closed curve tangent to $\tilde{C}$ at P_1 and $\tilde{X}$ at R_1, not otherwise meeting them, and not passing througt any singular point in $p^{-1}(P)$. By translating half of $\tilde{Y}$ to a curve P_2R_2, we may construct a regular closed curve $B(= P_1P_2R_2R_1)$ which, without loss of generality, may be assumed positively oriented. Then we have the following equations, in which K is the vector field of constant direction in the plane:

$$\text{(I)}\quad \frac{1}{2\pi}\int_B d(\dot{B} - F) = \frac{1}{2\pi}\int_B d(\dot{B} - K) + \frac{1}{2\pi}\int_B d(K - F)$$
$$\equiv \frac{1}{2\pi}\int_B d(\dot{B} - K)$$
$$\equiv 1 + \text{algebraic number of crossings in B} \pmod{x}.$$

(II)

$$\frac{1}{2\pi}\int_B d(\dot{B} - F) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{P_1P_2} + \int_{P_2R_2} + \int_{R_2R_1} + \int_{R_1P_1}\right) d(\dot{B} - F)$$
$$\equiv 1 + \frac{1}{2\pi}\int_{P_1P_2} d(\dot{C} - F) \equiv 1 + w(C) \pmod{x},$$

since the second and fourth integrals add up to 1, while the third integral is $w(X_1 \ldots X_q) = 0$, and the first integral is along the portion of B which covers C.

We conclude that $w(C)$ is equal to the algebraic number of crossings in B, which may be found by adding up the number of loops associated to each sequence $X_i\, X_{i+1}$. This proves the lemma.

Theorem. — *Let C be a regular simple closed curve homotopic in the usual sense to $X_1 \ldots X_q$, where $X_i = A_j^{\pm 1}$ and no subsequence $X_k X_{k+1} \ldots X_{k+r}$ is nullhomotopic. Then $w(C)$ is the sum of the integers associated to the sequences*

$$X_1\, X_2, \ldots, X_{q-1}\, X_q, X_q\, X_1$$

by the following algorithm:

Consider the schema

$$\begin{gathered} 1/o,\ 2/i,\ 1/i,\ 2/o,\ 3/o,\ 4/i,\ 3/i,\ 4/o,\ \ldots, \\ 2g-1/o,\ 2g/i,\ 2g-1/i,\ 2g/o \\ 1/o,\ 3/o,\ \ldots, \\ 2g-1/o,\ 2/i,\ 1/i,\ 4/i,\ 3/i,\ \ldots, \\ 2g/i,\ 2g-1/i,\ 2/o,\ 4/o,\ \ldots,\ 2g/o. \end{gathered}$$

Then to any sequence $A_j^e A_k^f (e,\ f = \pm 1)$ *we associate the two by two subschema formed by choosing the terms* j/x *and* k/y; *here*

$$x = \begin{cases} i \\ o \end{cases} \quad if \quad e = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} i \\ o \end{cases} \quad if \quad f = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

Convert this schema into an integer two by two matrix by the substitution of 0 *for* j/x *and* 1 *for* k/y; *let* s *denote the determinant of this matrix. If* $e = -f$, *define another integer* t *by the rule:*

$$t = 1 \text{ for the sequences } \begin{cases} A_{2j-1}^{-1} A_{2k-1} & j < k \\ A_{2j} A_{2k} & j < k \\ A_{2j}^{-1} A_{2k-1} & \end{cases}$$

$$t = -1 \text{ for the sequences } \begin{cases} A_{2j-1}\ A_{2j}^{-1} & \\ A_j A_k & k \leq 2l < j \text{ for some } l \end{cases}$$

$t = 0$ *otherwise.*

Then the integer associated to $A_j^e\ A_k^f$ *is the sum* $s + t$.

Proof. By lemma 3, we have reduced the problem to computing the number of loops produced by the crossings of A_j^e and A_k^f in the region D_2. Examination of the construction of the regular generating system for $\pi_1(M)$ reveals that these crossings give rise to loops of positive orientation in the cases indicated by $+1$, to loops of negative orientation in the cases indicated by -1, and to no loops in the cases indicated by 0 above. (The integer s expresses the number of loops necessitated by crossings in $D_2 - D_1$, and the integer t the number of loops necessitated by crossing in D_1).

Corollary 1. — *On the sphere and torus, the winding number of a regular simple closed curve is* ± 1 *if nullhomotopic, and* 0 *otherwise. Moreoever, two regular closed curves which*

are homotopic are regularly homotopic if and only if they have the same winding number. Both these results are false for surfaces of higher genus.

Proof. On the sphere, all curves are nullhomotopic. Delete the singular point of the standard vector field F; then we have the plane situation, in which a simple closed curve has winding ± 1. Hence, its winding number on the sphere is 1(modulo 2). On the torus, we deal with nullhomotopic curves easily by referring to the covering by the plane, since the standard vector field may be chosen to be that one covered by the field of constant direction. Curves which are not contractible we represent in the form $A_1^k A_2^l$ (using the abelian character of the fundamental group); thus we need only know that for each of the four pairs of sequences

$$A_1^e A_2^f \quad \text{and} \quad A_2^f A_1^e,$$

with $e, f = \pm 1$, the sum of the associated integers is zero. This proves the first statement.

Consider the presentation of $\pi_R(M)$ given in § 2. For the sphere or torus, the powers of H form a direct summand of an abelian group, and w is an isomorphism on this subgroup; this proves the second statement. On a surface of genus greater than 1, there is a simple closed curve in the homotopy class $A_1 A_4^{-1}$. By the algorithm, 0 is associated to $A_1 A_4^{-1}$ and 1 to $A_4^{-1} A_1$. Hence, the winding number is 1, showing that the first statement is false for such a surface. The second is disproved by the fact that the powers of H form an infinite cyclic subgroup of $\pi_R(M)$, hence cannot be distinguished by a homomorphism into a finite cyclic group.

Corollary 2. — *Let* F_1 *be a vector field on* M *having unique trajectories through nonsingular points and let* S *be its locus of singular points. Let* C *be a noncontractible closed curve and* w_0 *the winding number of any simple closed curve homotopic to* C. *Suppose*

$$\frac{1}{2\pi}\int_C d(F_1 - F) \not\equiv w_0 \mod \chi.$$

Then C *is not homotopic on* M — S *to any integral curve of* F_1

Proof. If C′ is any closed integral curve homotopic to C

on M — S, then C′ is a regular simple closed curve. Hence we have

$$\frac{1}{2\pi}\int_C d(F_1 - F) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{C'} d(F_1 - F)$$
$$\equiv \frac{1}{2\pi}\int_{C'} d(\dot{C}' - F) \equiv w_0 \pmod{\chi}.$$

BIBLIOGRAPHY

[1] L. E. J. Brouwer, Über die periodischen Transformationen der Kugel, *Math. Annalen*, 80 (1919), 39-41.

[2] B. Kéréjártó, Über die periodischen Transformationen der Kreisscheibe und Kugelfläche, *Math. Annalen*, 80 (1919), 36-38.

[3] B. L. Reinhart, Line Element Fields on the Torus, *Proc. N.A.S.*, U.S.A., 45 (1959), 49-50.

[4] B. L. Reinhart, Line Elements on the Torus, *Amer. J. Math.*, 81 (1959), 617-631.

[5] H. Seifert, Topologie 3 dimensionaler gefaserter Räume, *Acta Math.*, 60 (1932), 147-238.

[6] S. Smale, Regular Curves on Riemannian Manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 87 (1958), 492-512.

[7] N. E. Steenrod, Topology of Fibre Bundles, Princeton, *Princeton U. Press*, 1951.

[8] G. W. Whitehead, Homotopy theory, notes, *M.I.T.*, 1953.

[9] H. Whitney, On Regular Closed Curves in the Plane, *Compositio Math.* 4 (1937), 276-286.

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
10 (1960), 285-296.

THE TYPE AND THE GREEN'S KERNEL OF AN OPEN RIEMANN SURFACE

by M. S. NARASIMHAN

Tata Institute of Fundamental Research, Bombay
et Centre National de la Recherche Scientifique, Paris.

1. — Introduction.

We give in this paper a new approach to the determination of the type and the construction of the Green's function of an open Riemann surface.

We first define an open Riemann surface to be of hyperbolic type if the completion of the pre-Hilbert space of C^∞ functions with compact supports endowed with the Dirichlet scalar product is a space of currents. In this case we construct in a natural way an operator $\mathcal{G}$ and call the kernel in the sense of Schwartz of $\mathcal{G}$ the Green's kernel of the open Riemann surface. We then show that an open Riemann surface is of hyperbolic type if and only if it possesses the Green's function in the classical sense and that the Green's kernel is identical, upto a scalar factor, with the Green's function in the classical sense.

The invariance of the type of an open Riemann surface under quasi-conformal maps is derived as an immediate consequence of the definition of type.

2. — Some spaces of currents.

Let Ω be an open Riemann surface, that is, a non-compact connected complex analytic manifold of complex dimension one. We denote by $\overset{p}{\mathfrak{D}}(\Omega)$, $p = 0, 1, 2$, the space of C^∞ forms of degree p endowed with the topology of Schwartz [10, 11]. Let $\overset{p}{\mathfrak{D}}{}'(\Omega)$ denote the space of currents of degree p endowed with the strong topology [10, 11]. Let further $\overset{p}{\mathcal{E}}(\Omega)$ denote the space of C^∞ forms of degree p and $\overset{p}{\mathcal{E}}{}'(\Omega)$ the space of currents of degree p with compact supports, each endowed with the usual topology.

The operator $*$ is defined intrinsically on 1-forms in Ω [8]. The operator $*$ is defined on the currents of degree one by the formula:

$$\langle * T, \varphi \rangle = \langle T, - * \varphi \rangle, \qquad T \in \overset{1}{\mathfrak{D}}{}', \qquad \varphi \in \overset{1}{\mathfrak{D}},$$

$\langle , \rangle$ denoting the scalar product between $\overset{1}{\mathfrak{D}}{}'$ and $\overset{1}{\mathfrak{D}}$.

We denote by $L^2(\Omega)$ the Hilbert space of measurable square integrable 1-forms with the scalar product

$$(\omega_1, \omega_2) = \int_\Omega \omega_1 \wedge * \overline{\omega}_2, \qquad \omega_1, \omega_2 \in L^2.$$

Let further $BL(\Omega)$ be the pre-Hilbert space of currents T of degree 0 for which $dT \in L^2$ endowed with the scalar product

$$(T_1, T_2)_1 = (dT_1, dT_2), \qquad T_1, T_2 \in BL.$$

If $BL^\cdot(\Omega)$ denotes the quotient space of BL by the subspace of constants, $BL^\cdot$ is a *Hilbert space* with the induced scalar product [2, p. 308].

3. — The Laplacian $\tilde{\Delta}$.

On a Riemann surface the Laplacian is not defined intrinsically as an operator carrying functions into functions. However we can define an operator analogous to the Laplacian carrying functions into 2 forms.

We define an operator

$$\tilde{\Delta} : \overset{0}{\mathfrak{D}'} \to \overset{2}{\mathfrak{D}'}$$

by the formula

$$\tilde{\Delta} = d * d$$

where d denotes the exterior derivation. $\tilde{\Delta}$ is an elliptic operator of type (V_1, V_2) where V_1 denotes the trivial line bundle with $\mathbf{C}$ as the fibre and V_2 denotes the line bundle of 2-covectors [6].

We have the following elementary formulae:

1) $\langle T, \tilde{\Delta}\varphi \rangle = \langle \tilde{\Delta} T, \varphi \rangle$ for $T \in \overset{0}{\mathfrak{D}'}$, $\varphi \in \overset{0}{\mathfrak{D}}$.

2) For $T \in \overset{0}{\mathfrak{D}'}$, $\varphi \in \overset{0}{\mathfrak{D}}$ define:

$$(dT, d\varphi) = \langle dT, * d\bar{\varphi} \rangle.$$

We then have

$$(dT, d\varphi) = \langle -\tilde{\Delta} T, \bar{\varphi} \rangle.$$

4. — The type and the Green's kernel.

Let $\mathcal{H}_0(\Omega)$ denote the vector space $\overset{0}{\mathfrak{D}}$ endowed with the Dirichlet scalar product

$$(\varphi, \psi)_1 = \int_\Omega d\varphi \wedge * d\bar{\psi}, \qquad \varphi, \psi \in \overset{0}{\mathfrak{D}}.$$

Since Ω is non-compact and connected $\mathcal{H}_0(\Omega)$ is a separated pre-Hilbert space. Let $\mathcal{H}(\Omega)$ be the completion of $\mathcal{H}_0(\Omega)$.

Définition 1. — *An open Riemann surface Ω is said to be of* hyperbolic *type if the inclusion map*

$$i : \mathcal{H}_0(\Omega) \to \overset{0}{\mathfrak{D}'}(\Omega)$$

is continuous. Otherwise, it is said to be of parabolic *type.*

Thus we define an open Riemann surface to be of hyperbolic type if the following condition is satisfiedd: if $\{\varphi_n\}$ is a sequence of C^∞ functions with compact supports whose Dirichlet integrals tend to zero then the sequence $\{\varphi_n\}$ tends to zero in the sense of currents.

Let Ω be an open Riemann surface of hyperbolic type. Let

$$i' : \mathcal{H}(\Omega) \to \overset{0}{\mathfrak{D}}'(\Omega)$$

denote the canonical extension of the continuous inclusion

$$i : \mathcal{H}_0(\Omega) \to \overset{0}{\mathfrak{D}}'(\Omega).$$

The map i' is an injection. In fact, if $T \in \mathcal{H}$ we have for every $\varphi \in \overset{0}{\mathfrak{D}}$

$$(T, \varphi)_{\mathcal{H}} = \langle -\tilde{\Delta} i' T, \bar{\varphi} \rangle.$$

Since $\overset{0}{\mathfrak{D}}$ is dense in $\mathcal{H}$ it follows from the above equality that $i'T = 0$ if and only if $T = 0$.

We identify $\mathcal{H}$ with a subspace of $\overset{0}{\mathfrak{D}}'$ by means of the injection i'. The completion of $\mathcal{H}_0$ is thus a space of currents. It is easily seen that $\mathcal{H}$ is contained in BL.

Since $\overset{0}{\mathfrak{D}}$ is dense in $\mathcal{H}$ the dual $\mathcal{H}'(\Omega)$ of $\mathcal{H}(\Omega)$ is canonically identified with a subspace of $\overset{2}{\mathfrak{D}}'(\Omega)$. We assert that $\tilde{\Delta}$ defines an isomorphism of $\mathcal{H}$ onto $\mathcal{H}'$. In fact let Λ be the canonical isomorphism of $\mathcal{H}$ on the conjugate of its dual. Then for $T \in \mathcal{H}$, $\varphi \in \overset{0}{\mathfrak{D}}$ we have

$$\langle \Lambda T, \bar{\varphi} \rangle = (dT, d\varphi) = \langle -\tilde{\Delta} T, \bar{\varphi} \rangle$$

so that $\Lambda = -\tilde{\Delta}$. Hence $\tilde{\Delta} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ is an isomorphism. Let $\mathcal{G} : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$ be the inverse isomorphism.

Consider the spaces $\mathcal{H} \cap \overset{0}{\mathcal{E}}$ and $\mathcal{H}' \cap \overset{2}{\mathcal{E}}$; $\mathcal{H} \cap \overset{0}{\mathcal{E}}$ will be endowed with the topology upper-bound of those of $\mathcal{H}$ and $\overset{0}{\mathcal{E}}$; the same for $\mathcal{H}' \cap \overset{2}{\mathcal{E}}$. Let $\mathcal{H}' + \overset{2}{\mathcal{E}}'$ (resp. $\mathcal{H} + \overset{0}{\mathcal{E}}'$) be the strong dual of $\mathcal{H} \cap \overset{0}{\mathcal{E}}$ (resp. $\mathcal{H}' \cap \overset{2}{\mathcal{E}}$). [An element of the dual of $\mathcal{H} \cap \overset{0}{\mathcal{E}}$ can be written in the form $f + T$, $f \in \mathcal{H}'$, $T \in \overset{2}{\mathcal{E}}'$. Hence the above notation. A similar remark applies to $\mathcal{H} + \overset{0}{\mathcal{E}}'$]. Since $\tilde{\Delta}$ is an elliptic operator we see exactly as in Lions [5, p. 36] that the operator $\mathcal{G}$ can be extended to an isomorphism, still denoted by $\mathcal{G}$, of $\mathcal{H}' + \overset{2}{\mathcal{E}}'$ onto $\mathcal{H} + \overset{0}{\mathcal{E}}'$ and $\tilde{\Delta}$ is its inverse.

$\mathcal{G} : \mathcal{H}' + \overset{2}{\mathcal{E}}' \to \mathcal{H} + \overset{0}{\mathcal{E}}'$ is called the Green's operator.

Définition 2. — *Let Ω be an open Riemann surface of hyperbolic type. The kernel in the sense of Schwartz of the operator $\mathcal{G}$ is called the Green's kernel of Ω.*

The Green's kernel is a bilateral elementary kernel for $\tilde{\Delta}$. The green's kernel is very regular in the sense of Schwartz [11; 4, § 12; 5].

Remark 1. — An open Riemann surface is of hyperbolic type if and only if the inclusion map $\mathcal{H}_0 \to L^2_{loc}$ is continuous, where L^2_{loc} denotes the space of locally square summable functions endowed with the topology of convergence in L^2 on each compact set. [See 2, p. 321, Prop. 4. 1].

Remark 2. — Let $\mathcal{H}_1$ denote the pre-Hilbert space of C^1 functions with compact supports endowed with the Dirichlet scalar product. We see by regularization and Remark 1. that Ω is hyperbolic if and only if the inclusion map $\mathcal{H}_1 \to L^2_{loc}$ is continuous.

5. — Some properties of the Green's operator.

In this section we prove some propositions concerning the Green's operator.

Proposition 1. — *Ω is of hyperbolic type if and only if $\overset{2}{\mathfrak{D}} \subset \tilde{\Delta}(BL)$.*

Proof. If Ω is of hyperbolic type and $\psi \in \overset{2}{\mathfrak{D}}$, then $\mathcal{G}\psi \in BL$ and $\tilde{\Delta}\mathcal{G}\psi = \psi$.

Suppose conversely that $\overset{2}{\mathfrak{D}} \subset \tilde{\Delta}(BL)$. Let $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n \in \overset{0}{\mathfrak{D}}$ be a sequence converging to zero in $\mathcal{H}_0$. We shall show that $\langle \psi, \varphi_n \rangle \to 0$ for every $\psi \in \overset{2}{\mathfrak{D}}$. In fact let $T \in BL$ be such that $\tilde{\Delta}T = \bar{\psi}$. Then

$$\begin{aligned}\langle \psi, \varphi_n \rangle &= \langle \tilde{\Delta}\bar{T}, \varphi_n \rangle, \\ &= -(d\bar{T}, d\varphi_n).\end{aligned}$$

Since $d\bar{T} \in L^2$ and $d\bar{\varphi}_n \to 0$ in L^2, we see that $\langle \psi, \varphi_n \rangle \to 0$.

Proposition 2. — *Suppose that Ω is of hyperbolic type. Let Ω' be a subdomain of Ω. Then Ω' is hyperbolic and there*

exists a continuous linear map $u \to u^{\sim}$ *of* $\mathcal{H}(\Omega')$ *into* $\mathcal{H}(\Omega)$ *such that* $u^{\sim} = u$ *in* Ω' *and* $u^{\sim} = 0$ *in* $\complement\,\Omega'$. *One has*

$$(du, du)_{L^2(\Omega')} = (du^{\sim}, du^{\sim})_{L^2(\Omega)}.$$

Proof. For $\varphi \in \overset{0}{\mathfrak{D}}(\Omega')$ let $\varphi^{\sim} \in \overset{0}{\mathfrak{D}}(\Omega)$ be the function obtained by extending φ by zero outside Ω'. The map $j : \varphi \to \varphi^{\sim}$ is an isometry of $\mathcal{H}_0(\Omega')$ into $\mathcal{H}_0(\Omega)$. The inclusion map $\mathcal{H}_0(\Omega') \to \overset{0}{\mathfrak{D}}'(\Omega')$ is the composition of the map j, the continuous inclusion $\mathcal{H}_0(\Omega) \to \overset{0}{\mathfrak{D}}'(\Omega)$ and the restriction map r: $\overset{0}{\mathfrak{D}}'(\Omega) \to \overset{0}{\mathfrak{D}}'(\Omega')$ and is hence continuous. Since the map j can be extended into an isometry (still denoted by j) the second part of the proposition follows.

We identify $\mathcal{H}(\Omega')$ with a subspace of $\mathcal{H}(\Omega)$ by means of the isometry j.

PROPOSITION 3. — *Let* Ω *be of hyperbolic type. Let* $\{\Omega_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$ *be an increasing sequence of sub-domains of* Ω *such that* $\bigcup_k \Omega_k = \Omega$. *Let* $\mathcal{G}_k$ (*resp.* $\mathcal{G}$) *be the Green's operator of* Ω_k (*resp.* Ω). *Let* $T \in \mathcal{H}'(\Omega)$ *and let* T_k *be the restriction of* T *to* Ω_k. *Then* $\mathcal{G}_k T_k^{\sim} \to \mathcal{G}T$ *in* $\mathcal{H}(\Omega)$.

Proof. $\mathcal{H}(\Omega_k)$ is a closed subspace of $\mathcal{H}(\Omega)$ and $\mathcal{H}(\Omega)$ is the closure of $\bigcup_k \mathcal{H}(\Omega_k)$. If we verify that $\mathcal{G}_k T_k^{\sim}$ is the orthogonal projection of $\mathcal{G}T$ into the closed subspace $\mathcal{H}(\Omega_k)$ it would follow, from a known theroem on projections in a Hilbert space, that $\mathcal{G}_k T_k^{\sim} \to \mathcal{G}T$ in $\mathcal{H}(\Omega)$. Now for every $\varphi \in \overset{0}{\mathfrak{D}}(\Omega_k)$ we have

$$\begin{aligned}(\mathcal{G}_k T_k, \varphi)_{\mathcal{H}(\Omega_k)} &= \langle -\tilde{\Delta}\mathcal{G}_k T_k, \bar{\varphi}\rangle \\ &= -\langle T_k, \bar{\varphi}\rangle \\ &= -\langle T, \bar{\varphi}^{\sim}\rangle.\end{aligned}$$

On the other hand if P_k denotes the projection operator on $\mathcal{H}(\Omega_k)$ we have, for $\varphi \in \overset{0}{\mathfrak{D}}(\Omega_k)$,

$$\begin{aligned}(P_k\mathcal{G}T, \varphi)_{\mathcal{H}(\Omega)_k} &= (d\mathcal{G}T, \overline{d\varphi^{\sim}})_{L^2(\Omega)} \\ &= \langle -\tilde{\Delta}\mathcal{G}T, \bar{\varphi}^{\sim}\rangle \\ &= -\langle T, \bar{\varphi}^{\sim}\rangle.\end{aligned}$$

Hence $\mathcal{G}_k T_k^{\sim} = P_k \mathcal{G}T$.

PROPOSITION 4. — *Assume that* Ω *is of hyperbolic type. With the same notations as in Proposition* 3, *let* T *be an element of* $\overset{2}{\mathcal{E}}'(\Omega)$ *such that the support of* T *is contained in* Ω_1. *Then* $\mathcal{G}_k\mathrm{T}^{\sim} \to \mathcal{G}\mathrm{T}$ *in* $\overset{0}{\mathcal{D}}'(\Omega)$ *and the convergence is uniform on every compact set contained in the complement of the support of* T ($\mathcal{G}_k\mathrm{T}^{\sim}$ *denotes the extension of* $\mathcal{G}_k\mathrm{T}$ *to* Ω *by zero outside* Ω_k; $\mathcal{G}_k\mathrm{T}^{\sim}$ *and* $\mathcal{G}\mathrm{T}$ *are functions in the complement of the support of* T).

Proof. Let $\mathrm{S}_k = \mathcal{G}_k\mathrm{T}^{\sim}$. To prove that $\mathrm{S}_k \to \mathcal{G}\mathrm{T}$ in $\overset{0}{\mathcal{D}}'(\Omega)$ it is sufficient to prove that, for every $\psi \in \overset{2}{\mathcal{D}}(\Omega)$, $\langle \mathrm{S}_k, \psi\rangle$ tends to $\langle \mathcal{G}\mathrm{T}, \psi\rangle$. Now $\mathrm{T} \in \overset{2}{\mathcal{E}}'(\Omega_k)$ and $\psi \in \overset{2}{\mathcal{D}}(\Omega_k)$ for all sufficiently large k, say for $k \geqslant k_0$. In Ω_{k_0}, we have

$$\tilde{\Delta}(\mathcal{G}\psi - \mathcal{G}_k\psi) = \psi - \psi = 0.$$

Since $\tilde{\Delta}$ is an elliptic operator, $\overset{0}{\mathcal{D}}'$ and $\overset{0}{\mathcal{E}}$ induce the same topology on the space of solutions of the equations $\tilde{\Delta}f = 0$ [6, p. 331; 11, ch. v, Th. XII]. By Proposition 3, $\mathcal{G}_k\psi \to \mathcal{G}\psi$ in $\overset{0}{\mathcal{D}}'(\Omega_{k_0})$. Hence $\mathcal{G}_k\psi \to \mathcal{G}\psi$ in $\mathcal{E}(\Omega_{k_0})$. Now

$$\langle \mathrm{S}_k, \psi\rangle = \langle \mathcal{G}_k\mathrm{T}, \psi\rangle = \langle \mathrm{T}, \mathcal{G}_k\psi\rangle.$$

Since $\mathrm{T} \in \overset{2}{\mathcal{E}}'(\Omega_{k_0})$ and $\mathcal{G}_k\psi \to \mathcal{G}\psi$ in $\overset{0}{\mathcal{E}}(\Omega_{k_0})$, we see that $\langle \mathrm{T}, \mathcal{G}_k\psi\rangle \to \langle \mathrm{T}, \mathcal{G}\psi\rangle$. Hence $\langle \mathrm{S}_k, \psi\rangle$ tends to $\langle \mathrm{T}, \mathcal{G}\psi\rangle = \langle \mathcal{G}\mathrm{T}, \psi\rangle$. The second part follows from the property of elliptic equations used above.

PROPOSITION 5. — *Assume that* Ω *is hyperbolic. Let* Ω_0 *be a relatively compact sub-domain of* Ω *bounded by a finite number of disjoint analytic Jordan curves. Let* $\mathcal{G}_0$ *be the Greens' operator of* Ω_0. *Let* $p \in \Omega_0$ *and let* g_p *be the Green's function in the classical sense of* Ω_0 *with « pole »* p [7, 8]. *Then we have*

$$\mathcal{G}_0\delta_p = -\frac{1}{2\pi}g_p$$

where δ_p *is the Dirac measure at* p.

Proof. — We first remark that $\mathcal{G}_0\delta_p$ is the only element T of $\mathcal{H}(\Omega_0) + \overset{0}{\mathcal{E}}'(\Omega_0)$ which satisfies the equation $\tilde{\Delta}\mathrm{T} = \delta_p$.

One knows that $\tilde{\Delta}\left(-\frac{1}{2\pi} g_p\right) = \delta_p$. The lemma will be proved if we show that $g_p \in \mathcal{H}(\Omega_0) + \overset{0}{\mathcal{E}}'(\Omega_0)$.

g_p is a C^∞ function in Ω_0 except at p. Since g_p attains the boundary value zero on the boundary [8, § 28. 3] the reflection principle shows that g_p is C^∞ in $\overline{\Omega}_0$ except at p. Let $\varphi \in \overset{0}{\mathcal{D}}(\Omega_0)$ equal to 1 in a neighbourhood of p. φg_p is a current of degree 0, with compact support. $(1-\varphi)\, g_p$ is C^∞ in $\overline{\Omega}_0$ and hence has a finite Dirichlet integral; moreover $(1-\varphi)\, g_p$ vanishes on the boundary. It is known that such a function belongs to $\mathcal{H}_0(\Omega_0)$ [4, § 2.4; 8, § 32. 1]. Since $g_p = \varphi g_p + (1-\varphi)\, g_p$ we have $g_p \in \mathcal{H}(\Omega_0) + \overset{0}{\mathcal{E}}'(\Omega_0)$.

Remark 3. — Another method to prove Proposition 5 is to show directly, without using g_p, that $\mathcal{G}_0 \delta_p$ attains the boundary value zero (« Regularity at the boundary »). This may be shown as in [1, ch. vii, § 4] or [4, § 12.3].

6. — The potential with respect to the Green's function.

The proposition proved in this section is more or less classical.

Proposition 6. — *Let Ω be an open Riemann surface which has the Green's function $g(p, q)$ in the classical sense* [7, ch. vi, § 2]. *Then for $\psi \in \overset{2}{\mathcal{D}}(\Omega)$ the function*

$$h(p) = \int_\Omega g(p, q) \wedge \psi$$

belongs to BL.

Before proving the proposition we prove the following

Lemma. — *Let Ω_0 be a relatively compact sub-domain of Ω bounded by a finite number of disjoint analytic Jordan curves. Let $g_0(p, q)$ be the Green's function of Ω_0 and $\psi \in \overset{2}{\mathcal{D}}(\Omega_0)$. Then*

$$h_0(p) = \int_{\Omega_0} g_0(p, q) \wedge \psi$$

is C^∞ in $\overline{\Omega}_0$. $h_0(p)$ is zero on the boundary and one has

$$(dh_0, dh_0)_{L^2(\Omega_0)} = \langle -\tilde{\Delta} h_0, \overline{h_0} \rangle.$$

Proof. — Let K be the support of ψ and Ω' a relatively compact sub-domain of Ω_0 containing K. By Harnack's principle there exists, for $q_0 \in K$, a constant k such *that* $g(p, q) \leqslant k g(p, q_0)$ for each $q \in K$ and $p \in \complement \Omega'$. Hence

$$|h_0(p)| \leqslant k \left(\int_{\Omega_0} |\psi|\right) g(p, q_0) \qquad \text{for} \quad p \in \complement \Omega'.$$

Using the symmetry of the Green's function we see that

$$|h_0(p)| \leqslant k' g(q_0, p) \qquad \text{for} \quad p \in \complement \Omega',$$

where k' is a positive constant. Since $g(q_0, p)$ attains the boundary value zero we see that $h_0(p)$ is continuous in $\overline{\Omega}_0$ and is zero on the boundary. By the reflection principle h_0 is C^∞ in $\overline{\Omega}_0$ and an application of the Green's formula yields the equality $(dh_0, dh_0)_{L^2(\Omega_0)} = \langle -\tilde{\Delta} h_0, \overline{h}_0 \rangle$.

Proof of Proposition 6. — Let $\{\Omega_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$ be an exhaustion of Ω by relatively compact sub-domains Ω_k bounded by a finite number of analytic Jordan curves [8, p. 25]. We may assume that the support of ψ is contained in Ω_1. Let $g_k(p, q)$ be the Green's function of Ω_k. Let

$$\begin{aligned} h_k(p) &= \int g_k(p, q) \wedge \psi(q), \\ h(p) &= \int g(p, q) \wedge \psi(q). \end{aligned}$$

By the lemma,

$$\begin{aligned} (dh_k, dh_k)_{L^2(\Omega_k)} &= \langle -\tilde{\Delta} h_k, \overline{h}_k \rangle, \\ &= 2\pi \langle \psi, \overline{h}_k \rangle, \\ &= 2\pi \iint_{\Omega_k \times \Omega_k} g_k(p, q) \psi \otimes \overline{\psi}. \end{aligned}$$

Since $g_k(p, q)$ tends increasingly to $g\ (p, q)$ we have, for ψ, $\psi' \in \overset{2}{\mathfrak{D}}(\Omega)$,

$$\iint g_k \psi \otimes \psi' \rightarrow \iint g \psi \otimes \psi'.$$

Hence, if $h_k^{\sim}$ denotes the extension of h_k to Ω by zero outside Ω_k, $h_k^{\sim} \rightarrow h$ in $\overset{0}{\mathfrak{D}}{}'(\Omega)$ and $\|dh_k^{\sim}\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C$, C being a constant independant of k. Since $dh_k^{\sim}$ is bounded in $L^2(\Omega)$, there exists a weakly convergent subsequence $\{dh_{k_n}\}$ converging say to

$T \in L^2(\Omega)$. Since $dh_{k_n} \to T$ weakly in L^2, $dh_{k_n} \to T$ in $\overset{1}{\mathfrak{D}}{}'(\Omega)$. Since $h_k^\sim \to h$ in $\overset{0}{\mathfrak{D}}{}'(\Omega)$, $dh_k^\sim \to dh$ in $\overset{1}{\mathfrak{D}}{}'(\Omega)$. Hence $dh_{k_n} \to dh$ in $\overset{1}{\mathfrak{D}}{}'(\Omega)$. Consequently $T = dh$. Since $T \in L^2(\Omega)$, $dh \in L^2(\Omega)$, that is $h \in \mathrm{BL}$.

REMARK 4. — $h \in \mathcal{H}(\Omega)$.

7. — Green's kernel and the Green's function. Type

THEOREM. — *An open Riemann surface Ω is of hyperbolic type (in the sense of Definition 1) if and only if Ω possesses the Green's function in the classical sense and in this case the Green's kernel is equal to the Green's function in the classical sense multiplied by $-1/2\pi$.*

Proof. — Suppose that Ω is hyperbolic. Let $\{\Omega_k\}$ be an exhaustion of Ω by relatively compact subdomains Ω_k bounded by a finite number of disjoint analytic Jordan curves. Let $p \in \Omega$. We may suppose that $p \in \Omega_1$. Let $g_{k,p}$ be the Green's function of Ω_k with pole at p. By Proposition 5, $\mathcal{G}_k\delta_p = -\dfrac{1}{2\pi} g_{k,p}$ where $\mathcal{G}_k$ denotes the Green's operator of Ω_k. By Proposition 4, $\mathcal{G}_k\delta_p^\sim \to \mathcal{G}\delta_p$ in $\overset{0}{\mathfrak{D}}{}'(\Omega)$, the convergence being uniform on compact sets not containing p. Hence $-\dfrac{1}{2\pi} g_{k,p}^\sim \to \mathcal{G}\delta_p$ uniformly on compact sets not containing p. Hence Ω possesses a Green's function g_p with pole at p in the classical sense, and one has $\mathcal{G}\delta_p = -\dfrac{1}{2\pi} g_p$, $\mathcal{G}$ denoting the Green's operator of Ω. It follows that the Green's kernel is equal to the Green's function multiplied by $-1/2\pi$.

Suppose conversely that Ω has the Green's function $g(p, q)$ in the classical sense. Let $\psi \in \overset{2}{\mathfrak{D}}(\Omega)$. By Proposition 6

$$h(p) = -\frac{1}{2\pi}\int_\Omega g(p, q) \wedge \psi(q)$$

belongs to BL and one has $\tilde{\Delta} h = \psi$. By Proposition 1, Ω is of hyperbolic type.

REMARK 5. — The first part of the theorem has been proved for plane domains by Deny-Lions [2, ch. II, Th. 2.1, p. 350]. We may also refer to Weyl [12, § 7, § 8].

REMARK 6. — Another proof of the theorem may be given using the notion of the harmonic measure of the ideal boundary and Remark 4.

8. — The Invariance of type under quasi-conformal maps.

We shall show that the type of a Riemann surface is invariant under quasi-conformal maps. This result has been proved by Pfluger [9].

Let Ω_1 and Ω_2 be two open Riemann surfaces. Let $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ be a (C^∞) diffeomorphism which is quasi-conformal [8, § 43.4]. Let $\varphi \in \overset{0}{\mathfrak{D}}(\Omega_2)$ and write $\varphi' = \varphi \circ \Phi$. It is easily proved [3, p. 5] that there exists a constant $k > 0$ independent of φ such that

$$\frac{1}{k}(d\varphi, d\varphi)_{L^2(\Omega_2)} \leqslant (d\varphi', d\varphi')_{L^2(\Omega_1)} \leqslant k(d\varphi, d\varphi)_{L^2(\Omega_2)}.$$

That is, Φ induces an isomorphism of $\mathcal{H}_0(\Omega_2)$ onto $\mathcal{H}_0(\Omega_1)$. On the other hand Φ, being a diffeomorphism, induces an isomorphism of $\overset{0}{\mathfrak{D}}{}'(\Omega_2)$ onto $\overset{0}{\mathfrak{D}}{}'(\Omega_1)$. Hence $\mathcal{H}_0(\Omega_1) \to \overset{0}{\mathfrak{D}}{}'(\Omega_1)$ is continuous if and only if $\mathcal{H}_0(\Omega_2) \to \overset{0}{\mathfrak{D}}{}'(\Omega_2)$ is continuous. Hence the type is invariant under Φ.

REMARK 7. — In the above proof we assumed Φ to be C^∞. If we use Remark 2, it is sufficient to assume Φ to be C^1.

BIBLIOGRAPHY

[1] R. COURANT and D. HILBERT, *Methoden der Mathematischen Physik II*, Berlin, 1937.

[2] J. DENY and J. L. LIONS, Les espaces de type de Beppo-Levi, *Annales de l'Institut Fourier*, 5, (1953-1954), pp. 305-370.

[3] Mme J. LELONG-FERRAND, *Représentation conforme et transformations à intégrale de Dirichlet bornée*, Paris, 1955.

[4] J. L. LIONS, Lectures on elliptic partial differential equations, *Tata Institute of Fundamental Research*, Bombay, 1957.

[5] J. L. Lions, Problèmes aux limites en théorie des distributions, *Acta. Math.* 94, (1955), pp. 13-153.
[6] B. Malgrange, Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, *Annales de l'Institut Fourier*, VI (1955-1956), pp. 221-354.
[7] R. Nevanlinna, *Uniformisierung*, Berlin, 1953.
[8] A. Pfluger, *Theorie der Riemannschen Flächen*, Berlin, 1957.
[9] A. Pfluger, Sur une propriété de l'application quasi-conforme d'une surface de Riemann ouverte, *C.R. Acad. Sci* (Paris), 227 (1948), 25-26.
[10] G. de Rham, *Variétés différentiables*, Paris, 1955.
[11] L. Schwartz, *Théorie des distributions I*, Paris, 1957.
[12] H. Weyl, The method of orthogonal projection in potential theory, *Duke Math. J.*, 7 (1940), 411-444.

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
10 (1960), 297-302.

METRIC TRANSITIVITY AND INTEGER-VALUED FUNCTIONS (1)

by Solomon SCHWARTZMAN (Rias).

Let X be a measure space with measure μ satisfying

$$\mu(X) = 1.$$

Suppose φ is a measurable map of X onto itself such that $\mu(\varphi^{-1}(s)) = \mu(s)$ for every measurable set S. Throughout this paper B will denote the additive group of bounded measurable integer-valued functions. We will denote by H_p the subset of B consisting of all functions $f(x)$ in B such that

$$0 \leqq f(x) \leqq p - 1$$

for all x with the exception that we exclude the function which is identically equal to $p - 1$ from H_p. We will follow the convention that two functions are to be regarded as identical if they differ only set of measure zero.

THEOREM. — *Statements* 1,2, *and* 3_p (p *any integer greater than* 2) *are equivalent.*

1) φ is metrically transitive.

2) Every $f(x)$ in B has a unique representation of the form $k + \alpha_0 + (2 - T)\alpha_1 + \cdots + (2 - T)^n\alpha_n$ where k is an integral constant, $\alpha_i \in H_2$, and α_n is not identically zero.

3_p) Every non-negative $f(x)$ in B has a unique representation of the form $\alpha_0 + (p - T)\alpha_1 + \cdots + (p - T)^n\alpha_n$ where $\alpha_i \in H_p$ and α_n is not identically zero.

(1) This research was partially supported by the United States Air Force through the Air Force Office of Scientific Research of the Air Research and Development Command, under Contract Number AF 49(638)-382. Reproduction in whole or in part is permitted for any purpose of the United States Government.

In the above statements, $(p - \mathrm{T})^k$ is the k^{th} iterate of the operator which sends $f(x)$ into $pf(x) - f(\varphi(x))$.

Notice that if we take our measure space to consist of a single point and our transformation φ is just the identily map, statement 3_p simply tells us that any non-negative integer can be expressed uniquely in a « decimal » expansion to the base $p - 1$.

It is easy to see that metric transitivity follows from any one of the statements 2 or 3_p. Suppose 2 holds and φ is not metrically transitive. Let $f(x)$ denote the characteristic function of a proper invariant subset of X. If

$$f(x) = k + \alpha_0 + \cdots + (2 - \mathrm{T})^n\alpha_n,$$

then $(2-\mathrm{T})f(x) = k + (2-\mathrm{T})\alpha_0 + \cdots + (2 - \mathrm{T})^{n+1}\alpha_n$. Since $f(x)$ is invariant, $(2 - \mathrm{T})f(x) = f(x)$ so we get two expansions for $f(x)$. By the uniqueness part of 2), the expansions must be identical and therefore $f(x)$ must be a constant, which contradicts the fact that $f(x)$ is the characteristic function of a proper subset of X. If 3_p holds let $f(x)$ be as above. Since $f(x)$ is invariant, $(p - \mathrm{T})f(x) = (p-1)f(x)$. On the left side of the equation we have an expansion of type 3_p with $\alpha_1 = f(x)$ and all other $\alpha_i = 0$, while on the right hand side of the equation we have an expansion of type 3_p with $\alpha_0 = (p - 1)f(x)$ and all other $\alpha_i = 0$. Thus we again have a contradiction of uniqueness. The non-trivial part of our theorem therefore comes in showing that metric transitivity implies the existence and uniqueness of the expansions described in 2 and 3_p. To prove this we need a preliminary result. In all that follows we assume that φ is metrically transitive.

LEMMA. — *If $f(x) \in \mathrm{B}$ and p is any integer greater than or equal to two, there exists one and only one pair of functions $(\alpha(x), \mathrm{I}(x))$ such that $\alpha(x) \in \mathrm{H}_p$, $\mathrm{I}(x) \in \mathrm{B}$ and $f = \alpha + (p - \mathrm{T})\mathrm{I}$. Moreover the following relations hold between f, α and* I.

a) Ess sup $f \geq (p - 1)$ ess sup I, with equality holding if and only if $\alpha = 0$, $\mathrm{I} =$ constant.

b) Ess inf $f < (p - 1)\,(1 +$ ess inf I).

Once we know that a representation of the kind indicated exists it is a straightforward verification to show that relations

a) and *b*) must hold. In fact, suppose that $f = \alpha + (p - T)I$, $\alpha \in H_p$, $I \in B$. Let U be the set on which I assumes its essential supremum. For every $x \in U$, $(p - T)I$ evaluated at x is obviously $\geq (p - 1)$ ess sup I, with equality holding if and only if $\varphi(x) \in U$. Since $\alpha(x) \geq 0$, $\alpha + (p - T)I$ evaluated at x is $\geq (p - 1)$ ess sup I, and equality holds if and only if $\alpha(x) = 0$ and $\varphi(x) \in U$. If these conditions held for almost all points in U we would have $\varphi(U) \leq U$ and therefore by metric transitivity U would equal X; moreover $\alpha(x)$ would then have to be zero almost everywhere. In that case, we would have $f(x)$ and $I(x)$ constants with $f = (p - 1)I$ so our inequality would in fact be an equality. If these conditions de not hold almost everywhere in U, then there is a subset of U of positive measure on which $f(x) > (p - 1)$ ess sup I and therefore ess sup $f > (p - 1)$ ess sup I.

Similarly, in order to prove *b*) let L denote the subset of X consisting of all points x for which $I(x) =$ ess inf I. For any $x \in L$, $\alpha + (p - T)I$ evaluated at x is less than or equal to $(p - 1)(1 +$ ess inf I$)$, since $\alpha(x) \leq p - 1$. Moreover, equality holds if and only if $\alpha(x) = p - 1$ and $\varphi(x)$ belongs to L. If these conditions held for almost all points of L, by metric transitivity L would be almost all of X and so α would equal $p - 1$ almost everywhere. However this contradicts the assumption that α is in H_p. Therefore, there exists a subset of L of positive measure such that $\alpha + (p - T)I$ evaluated at any point of the subset is less than $(p - 1)(1 +$ ess inf I$)$. Thus ess inf $f < (p - 1)(1 +$ ess inf I$)$.

To complete the proof of the lemma we must now show that every $f \in B$ can be expressed in one and only one way in the form stated in the lemma. We begin by assigning to each f in B a function F whose value at any point x in X is given by the formula

$$F(x) = \exp 2\pi i \left(\frac{f(x)}{p} + \frac{f(\varphi(x))}{p^2} + \cdots + \frac{f(\varphi^n(x))}{p^{n+1}} + \cdots \right).$$

Clearly $F(x)$ is a measurable function of absolute value one satisfying the equation $F(\varphi(x)) = [F(x)]^p$. If we denote by G_p the collection of all measurable functions of absolute value one satisfying this functional equation, it is clear that G_p forms a group under multiplication. As usual we identify

two functions in G_p which agree except on a set of measure zero.

Now let ρ stand for the transformation which assigns to each f in B the function F in G_p defined above. It is trivial to verify that ρ is homomorphism of the additive group of B into the multiplicative group G_p. We wish to determine the kernel of this homomorphism.

We regard B as a subset of $L^2(X)$ and let T denote, as usual, the transformation sending $f(x)$ into $f(\varphi(x))$. Since T is a transformation of norm one, the operator series $I/p + T/p^2 + \cdots + T^n/p^{n+1} + \cdots$ converges to the operator $(p-T)^{-1}$. A function in B belongs to the kernel of ρ if and only if $f(x)/p + \cdots + f(\varphi^n(x))/p^{n+1} + \cdots$ is integer-valued; that is, if and only if $(p-T)^{-1}f$ belongs to B. Thus every f in the kernel of ρ can be expressed in one and only one way in the form $(p-T)\mathrm{I}$, where I belongs to B. Thus the lemma will be proved if we can show that each coset of the homomorphism contains exactly one element of H_p.

Now let g be any function in G_p. There is one and only one function $\alpha(x)$ such that $0 \leq \alpha(x) < 1$ and $g(x) = \exp 2\pi i\alpha(x)$. The set S of points at which $\alpha(x)$ is a p-adic rational is clearly invariant under φ because of the equation $g(\varphi(x)) = [g(x)]^p]$. In fact, if 0 denotes the set of points at which $\alpha(x) = 0$, it is clear that $S = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{-n}(0)$. It is obvious that $\varphi^{-(n+1)}(0) \geq \varphi^{-n}(0)$. Since φ is measure preserving $\mu(0) = \mu(S)$ because S is defined the union of an increasing sequence of sets, with all sets in the sequence having the same measure and therefore differing by a null set from the set 0 which begins the sequence. Since φ is metrically transitive and S is invariant, S is either the whole space or a null set. Since S differs from 0 by a null set it follows that if g is not the function which is identically 1, the set of points x at which $\alpha(x)$ is a p-adic rational is a null set; i.e., $\alpha(x)$ admits of a unique expansion as a p-adic decimal almost everywhere. Thus, if $\alpha(x)$ is not identically zero there exists a unique sequence of integer-valued functions $e_1(x), \ldots, e_k(x), \ldots$ taking values from zero through $p-1$ and satisfying the equation $\alpha(x) = e_1(x)/p + e_2(x)/p^2 + \cdots$. Since $\exp 2\pi i\alpha(\varphi(x)) = \exp 2\pi i p\alpha(x)$ it follows that $e_1(\varphi(x))/p + e_2(\varphi(x))/p^2 + \cdots$ differs from $e_1(x) + e_2(x)/p + \cdots + e_{k+1}(x)/p^k + \cdots$ and hence from

$e_2(x)/p + \cdots + e_{k+1}/p^k + \cdots$ by an integer. Since, however, both these expression represent functions taking on values greater than or equal to zero but less than one it follows that they must be equal. Since, moreover, the set of points x for which $\alpha(x)$ is a p-adic rational is a null set not only the functions but the expansions as p-adic decimals must be identical almost everywhere; i.e., $e_n(\varphi(x)) = e_{n+1}(x)$ and therefore $e_k(x) = e_1(\varphi^{k-1}(x))$. Clearly $e_1(x)$ belongs to H_p and we have $g(x) = \exp 2\pi i(e_1(x)/p + \cdots + e_1(\varphi^k(x))/p^{k+1} + \cdots)$. Moreover no other function in H_p would serve in place of e_1 since that would give a second p-adic decimal expansion for $\alpha(x)$. Thus for each g in G_p there is one and only one function in H_p which gets sent into g by the homomorphism ρ. This completes the proof of the lemma.

We now proceed to the proof of our main theorem. Let f be any function in B. Then $f = \alpha_0 + (p - \mathrm{T})\mathrm{I}_0$ where $\alpha_0 \in \mathrm{H}_p$, $\mathrm{I}_0 \in \mathrm{B}$. Inductively we define α_n and I_n in H_p and B respectively by the equation $\mathrm{I}_{n-1} = \alpha_n + (p - \mathrm{T})\mathrm{I}_n$. Then by successive substitutions we see that

$$f = \alpha_0 + (p - \mathrm{T})\mathrm{I}_0 = \alpha_0 + (p - \mathrm{T})\alpha_1 + (p - \mathrm{T})^2\mathrm{I}_1 = \cdots$$
$$= \alpha_0 + (p - \mathrm{T})\alpha_1 + \cdots + (p - \mathrm{T})^n\alpha_n + (p - \mathrm{T})^{n+1}\mathrm{I}_n.$$

Applying the two inequalities of our lemma to the representation $\mathrm{I}_{n-1} = \alpha_n + (p - \mathrm{T})\mathrm{I}_n$ we get ess sup $\mathrm{I}_{n-1} \geqq (p - 1)$ ess sup I_n and ess inf $\mathrm{I}_{n-1} < (p - 1)(1 + \text{ess inf } \mathrm{I}_n)$. Next let $a_n =$ ess sup I_n — ess inf I_n. By subtracting our two inequalities we see that $a_{n-1} > (p - 1)(a_n - 1)$. Therefore, $a_{n-1} > a_n - 1$, and since the numbers a_n are integers, $a_{n-1} \geqq a_n$. Thus the sequence $\{a_n\}$ is a decreasing sequence of non-negative integers and so must eventually equal some non-negative integer k.

We wish to show that k must be zero. Suppose this is not the case. Then in the inequality ess sup $\mathrm{I}_n \geqq (p - 1)$ ess sup I_{n+1} we could not have equality holding, since the complete statement of inequality *a*) of our main lemma tells us that if equality holds I_{n+1} must be a constant. If that were so a_{n+1} and therefore k would have to be zero.

In the remaining case, since we are dealing with integers, our inequalities become ess sup $\mathrm{I}_n \geqq 1 + (p - 1)$ ess sup I_{n+1} and ess inf $\mathrm{I}_n \leqq -1 + (p - 1)(1 + \text{ess inf } \mathrm{I}_{n+1})$. Subtrac-

ting and taking n sufficiently large we get

$$k \geq 2 + (p-1)(k-1)$$

or equivalently $(2-p)(k-1) \geq 1$. Since p is greater than or equal to two this can only be the case if k is zero. Thus for sufficiently large values of n we get ess sup $I_n =$ ess inf I_n; i.e., I_n is a constant. If we let N be the smallest integer for which I_N is a constant, then clearly $n \geq N$ implies I_n is a constant.

Let us next confine our attention to the case $p = 2$. Since I_N is a constant, $I_N = 0 + (2-T)I_N$; i.e., $\alpha_{N+1} = 0$ and $I_{N+1} = I_N$. Proceeding inductively we see that $\alpha_n = 0$ for $n \geq N + 1$. Now the equation

$$f = \alpha_0 + (2-T)\alpha_1 + \cdots + (2-T)^N\alpha_N + I_N$$

holds, since $(2-T)^{N+1}I_N = I_N$. This shows the existence of the representation described in 2) of our main theorem. Moreover, if $f = \bar{\alpha}_0 + (2-T)\bar{\alpha}_1 + \cdots + (2-T)^r\bar{\alpha}_r + k$ is any representation for f of the type described, it is clear that $f = \bar{\alpha}_0 + (2-T)(\bar{\alpha}_1 + \cdots + (2-T)^{r-1}\bar{\alpha}_r + k)$ and so $\bar{\alpha}_0 = \alpha_0$ by the uniqueness part of our main lemma. Proceeding inductively, we see that $\bar{\alpha}_i = \alpha_i$ for all i. Finally, solving for k and I_N in each of the equations giving the two representations for f shows that $k = I_N$. This shows the existence and uniqueness in the case $p = 2$.

For p greater than 2 the proof that there is at most one representation of the type described proceeds exactly as above. To complete the proof we therefore need only show that there exists a represehtation of the type described and for this we need only show that I_n is eventually zero. Since we are now in the case 3_p we have available the assumption that $f(x)$ is non-negative. Thus using our inequality b we see that $0 \leq$ ess inf $f < (p-1)(1 +$ ess inf $I_0)$ and so ess inf $I_0 > -1$; or, since we are dealing with integers, ess inf $I_0 \geq 0$. Proceeding inductively we see that ess inf $I_n \geq 0$ for all n. On the other hand, by inequality a) ess sup $I_k \leq$ ess sup $I_0/(p-1)^k$. Thus for sufficiently large values of n, ess sup $I_n \leq 0$ and ess inf $I_n \geq 0$; i.e., ess sup $I_n =$ ess inf $I_n = I_n = 0$. This completes the proof of our theorem.

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
10 (1960), 303-306.

EXISTENCE DE NOYAUX SUR $R \times R$, INDÉFINIMENT DIFFÉRENTIABLES DANS L'OUVERT $\{(x, y) \in R \times R, x \neq y\}$, SEMI-RÉGULIER EN x, NON SEMI-RÉGULIER EN y (1)

par **Henri MOREL** (Paris).

On rencontre en théorie de l'hypoellipticité des noyaux-distributions dont on doit vérifier qu'ils sont simultanément : indéfiniment différentiables en dehors de la diagonale, semi-régulier en x et semi-régulier en y. On peut se demander (lettre de M. Trèves à M. Schwartz) si les deux premières propriétés entraînent la troisième; on montre que non en construisant l'exemple suivant.

Soit $\alpha(x)$ une fonction réelle d'une variable réelle, indéfiniment dérivable, à support dans $(-1 \leqslant x \leqslant 0)$ et telle que $0 < \alpha(x) \leqslant 1$ dans $(-1 < x < 0)$; $\alpha\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$; $\int_{-1}^{0} \alpha(x)\, dx = \frac{1}{2}$; $\alpha(x) < |x|$ pour $x > -\frac{1}{4}$; α est décroissante pour $x > -\frac{1}{2}\cdot$ Alors si $x \to 0$, $\forall p > 0$, $\alpha(x)/x^p \to 0$.

Soit $m_p = \sup\limits_{x \in R} \left|\frac{d^p\alpha(x)}{dx^p}\right|$.

(1) L. Schwartz, *Théorie des distributions*, tome I, 2e édition, p. 138, Paris, Hermann.

Soit $g(x, y)$ la fonction définie dans R^2 comme suit :

pour $x \leqslant -\frac{1}{2}$ et $x \geqslant 0$, on a $g(x, y) = 0$;

pour $-\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant x \leqslant -\frac{1}{2^n}$, $n \geqslant 2$, on a

$$g(x, y) = \alpha\left[\left(x+\frac{1}{2^n}\right)\Big/\frac{1}{2^n}\right]\alpha\left[\left(-y+\frac{1}{2^n}\right)\Big/\alpha\left(-\frac{1}{2^n}\right)\right].$$

Vérifions successivement que

I. $g(x, y)$ est un noyau indéfiniment différentiable en dehors de la diagonale : c'est une fonction indéfiniment différentiable dans le complémentaire de l'origine et bornée donc localement sommable; elle est d'ailleurs indéfiniment dérivable en x et en y partout : les dérivées à l'origine sont toutes nulles; mais la fonction $g(x, y)$ n'est pas continue en ce point; on peut d'ailleurs construire un exemple ayant les trois propriétés que nous vérifions pour $g(x, y)$ et en plus celle d'être partout différentiable jusqu'à un ordre fini quelconque.

II. Elle n'est pas semi-régulière en y:

Soit $u(x) \in \mathcal{D}(R)$, $u(x) = 1$ pour $-1 \leqslant x \leqslant 0$; la distribution :

$$\varphi(y) \in \mathcal{D}(R) \to \iint_{R^2} g(x, y)\, u(x)\, \varphi(y)\, dx\, dy$$

est définie par la fonction :

$$I(y) = \int_R g(x, y)\, u(x)\, dx = \int_{-1}^{0} g(x, y)\, dx.$$

Il suffit de voir que $I(y)$ n'est pas dérivable pour $y = 0$: on a $I(0) = 0$; pour

$$y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\alpha\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right), \qquad g(x, y_n) = \alpha\frac{x+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n},$$

donc $I(y) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2}$; si n tend vers $+\infty$ le quotient différentiel

$$\frac{I(y_n) - I(0)}{y_n} = \frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\alpha\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)} \to \frac{1}{2}$$

d'ailleurs, d'autres suites de quotients différentiels $\to 0$: il n'y a même pas de dérivée à droite.

III. $g(x, y)$ est semi-régulière en x : soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathrm{R})$; la distribution $u(x) \in \mathcal{D}(\mathrm{R}) \to \iint_{\mathrm{R}^2} g(x, y)\, u(x)\, \varphi(y)\, dx\, dy$ est définie par la fonction $\mathrm{J}(x) = \int_{\mathrm{R}} g(x, y)\, \varphi(y)\, dy$; pour $x \neq 0$, il est clair que J est indéfiniment dérivable; voyons-le pour $x = 0$: soit $|\varphi(y)| < \mathrm{M}$; soit $n(x)$ l'entier tel que $\frac{-1}{2^{n(x)-1}} < x \leqslant \frac{-1}{2^{n(x)}}$ (pour $x < 0$) on a donc : $\frac{2}{|x|} > 2^{n(x)}$ (1) on a

$$|g(x, y)| \leqslant \alpha\left[\left(-y + \frac{1}{2^{n(x)}}\right) \Big/ \alpha\left(-\frac{1}{2^{n(x)}}\right)\right]$$

on a

$$\mathrm{J}(0) = 0; \; |\mathrm{J}(x)| < \mathrm{M} \int g(x, y) dy \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{M}\, \alpha\left(-\frac{1}{2^{n(x)}}\right) < \frac{1}{2}\mathrm{M}\alpha(x)$$

donc, $\left|\frac{\mathrm{J}(x) - 0}{x}\right| \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{M}\frac{\alpha(x)}{x} \to 0$ si $x \to 0$ et $\mathrm{J}(x)$ a une dérivée première $\mathrm{J}'(0) = 0$.

$|\mathrm{J}(x)|$ est majorée par une fonction $\alpha(x)$ dont toutes les dérivées sont nulles pour $x = 0$; cela implique que $\mathrm{J}'(0)$ existe et $\mathrm{J}'(0) = 0$, mais une fonction satisfaisant à ces conditions seulement pourrait très bien ne pas avoir d'autres dérivées $\left(\text{exemple } \mathrm{J}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \sin e^{\frac{1}{x^2}}\right)$. Montrons que $\mathrm{J}(x)$ est indéfiniment dérivable pour $x = 0$ par récurrence : supposons que $\mathrm{J}^p(0)$ existe et $\mathrm{J}^p(0) = 0$; on a

$$\Big|\underset{x \neq 0}{\mathrm{J}p(x)}\Big| = \left|\int \frac{d^p}{dx^p} g(x, y) \;\; \varphi(y) dy\right| \leqslant \mathrm{M} \int \left|\frac{d^p}{dx^p} g(x, y)\right| dy$$

or,

$$\frac{d^p}{dx^p} g(x, y) = 2^{pn(x)}\alpha^p\left(\frac{x + \frac{1}{2^{n(x)}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n(x)}}\right)\alpha\left(\frac{-y + \frac{1}{2^{n(x)}}}{\alpha\left(-\frac{1}{2^{n(x)}}\right)}\right)$$

donc

$$\Big|\underset{x \neq 0}{\mathrm{J}^p(x)}\Big| \leqslant \mathrm{M} \,.\, m_p \,.\, (2^{n(x)})^p \,.\, \frac{1}{2}\alpha\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n(x)}\right)$$

donc, d'après (1),

$$\left|\underset{x\neq 0}{\mathrm{J}^p(x)}\right| \leqslant \mathrm{M}\,.\,m_p\,.\,2p^{-1}\alpha(x)/x^p$$

donc

$$|\mathrm{J}^p(x) - \mathrm{J}^p(0)|/|x| \leqslant \mathrm{M}\,.\,m_p\,.\,2p^{-1}\alpha(x)/x^{p+1} \to 0 \quad \text{si} \quad x \to 0.$$

Donc $\mathrm{J}^{p+1}(0)$ existe et $\mathrm{J}^{p+1}(0) = 0$.

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
10 (1960), 307-336.

CATÉGORIES INDUCTIVES ET PSEUDOGROUPES

par Charles EHRESMANN (Paris)

Le but de cet article est de préciser certaines notions algébriques qui permettent d'esquisser une théorie générale des structures locales. Il sera suivi d'une étude des pseudogroupes construits à partir d'un groupoïde différentiable, où seront développés en particulier les notions et résultats résumés dans [4].

1. — Groupoïdes inductifs.

Nous précisons et complétons ici l'exposé qui se trouve dans [1]. Étant donnée une catégorie, nous désignons encore par α la fonction qui associe à tout élément de la catégorie son unité à droite, par β la fonction qui lui associe son unité à gauche.

Définition. — Un groupoïde inductif *est un groupoïde $\mathfrak{S}$ muni d'un foncteur généralisé covariant φ de $\mathfrak{S}$ dans $\mathfrak{S}$, appelé foncteur d'induction, un élément de $\varphi(f)$, où $f \in \mathfrak{S}$, s'appelant* élément induit par f. *Ce foncteur vérifie les axiomes suivants:*

1) *Pour $s \in \varphi(\alpha(f))$, $f \in \mathfrak{S}$, il existe un seul $g \in \varphi(f)$ tel que $s = \alpha(g)$; g est appelé l'élément induit par f sur s.*
2) *Si $f' \in \varphi(f)$, alors $\varphi(f') \subset \varphi(f)$.*
3) *$\varphi(f) = \varphi(f')$ entraîne $f = f'$.*
4) *Pour toute sous-classe A de $\varphi(f)$, il existe un $g \in \varphi(f)$ tel que $A \subset \varphi(g)$ et que $g \in \varphi(h)$ pour tout h tel que $A \subset \varphi(h)$.*

Ces axiomes entraînent les propriétés suivantes:

$\varphi(\alpha(f)) = \alpha(\varphi(f))$; ceci résulte de la définition d'un foncteur

généralisé [1] qui donne les relations: $\varphi(f)\varphi(\alpha(f)) = \varphi(f)$ et $\varphi(f^{-1})\varphi(f) = \varphi(\alpha(f))$.

$\varphi(f^{-1}) = (\varphi(f))^{-1}$, c'est-à-dire les éléments induits par f^{-1} sont les inverses des éléments induits par f.

L'élément g de 4) est unique et s'appelle l'*agrégat* de A; on le désignera par $\cup$ A. L'agrégat d'une classe d'unités est une unité. $\alpha(\cup A) = \cup\alpha(A)$; $\beta(\cup A) = \cup\beta(A)$; $\cup\varphi(f) = f$.

La relation $g \in \varphi(f)$ est une relation d'ordre que nous noterons $g \prec f$. Les fonctions α et β et la loi de composition de $\mathfrak{S}$ sont compatibles avec cette structure d'ordre. Toute classe majorée A admet une borne supérieure $\cup$ A. Nous supposerons dorénavant que $\mathfrak{S}$ admet un plus petit élément noté 0; si cette condition n'est pas vérifiée initialement, nous complèterons $\mathfrak{S}$ par l'adjonction de l'élément 0 tel que $0 \prec f$ pour tout $f \in \mathfrak{S}$ et $\alpha(0) = 0$, $0.0 = 0$. Toute famille A de $\mathfrak{S}$ admet alors une intersection ou borne inférieure; c'est l'agrégat de $\bigcap_{f \in A} \varphi(f)$.

Une classe munie d'une relation d'ordre telle que toute partie admette une intersection s'appellera ici une *classe inductive*. Il en résulte l'existence d'un agrégat pour toute partie majorée. En particulier $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}_0$ sont des classes inductives, $\mathfrak{S}_0$ désignant la classe des unités de $\mathfrak{S}$.

On peut étendre la multiplication définie dans $\mathfrak{S}$ à tous les couples $(f', f) \in \mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$, en posant $f'f = g'g$, où g est l'élément induit par f tel que $\beta(g) = \alpha(f') \cap \beta(f)$ et g' l'élément induit par f' tel que $\alpha(g') = \alpha(f') \cap \beta(f)$. La multiplication ainsi étendue sera appelée *pseudomultiplication* dans $\mathfrak{S}$. Elle possède les propriétés suivantes: Elle est associative. Sa restriction aux couples d'unités de $\mathfrak{S}$ est commutative. Les unités de $\mathfrak{S}$ forment une classe d'éléments idempotents (il peut y en avoir d'autres). Elle admet au plus une unité, l'agrégat, lorsqu'il existe, de toutes les unités de $\mathfrak{S}$. Si cette condition n'est pas remplie, on peut toujours compléter $\mathfrak{S}$ par l'adjonction d'un élément Ω qui soit une unité pour la multiplication de $\mathfrak{S}$ et pour la pseudomultiplication. Les éléments induits de $f \in \mathfrak{S}$ sont les pseudoproduits de f avec les unités de $\mathfrak{S}$. Le groupoïde inductif $\mathfrak{S}$ considéré avec sa pseudomultiplication sera appelé *pseudogroupe*.

Inversement, soit $\mathfrak{S}$ une classe munie d'une loi de composition appelée pseudomultiplication, partout définie et associa-

tive. De plus, supposons donnée une classe $\mathfrak{S}_0$ d'éléments idempotents, stable pour la pseudomultiplication, telle que les conditions suivantes soient vérifiées :

1) La restriction de la pseudomultiplication à $\mathfrak{S}_0$ est commutative.

Soient e et e' deux éléments de $\mathfrak{S}_0$ tels qu'il existe $\varepsilon \in \mathfrak{S}_0$ satisfaisant à l'équation $e = e'\varepsilon$. Alors nous écrivons $e \prec e'$ et on montre que cette relation est une relation d'ordre dans $\mathfrak{S}_0$, équivalente à la relation $e = ee'$. Tout couple d'éléments (e, e') de $\mathfrak{S}_0$ admet une borne inférieure à savoir ee'.

2) Pour tout $f \in \mathfrak{S}$, la classe des éléments $e \in \mathfrak{S}_0$ tels que $fe = f$ admet une borne inférieure $\alpha(f)$ vérifiant l'équation $f\alpha(f) = f$; de même la classe des éléments $e \in \mathfrak{S}_0$ tels que $ef = f$ admet une borne inférieure $\beta(f)$ vérifiant l'équation $\beta(f)f = f$. (Il en résulte que $fe = f$ est équivalent à $\alpha(f) \prec e$.)

3) Pour tout $f \in \mathfrak{S}$, il existe un $f' \in \mathfrak{S}$ tel que $f'f = \alpha(f)$ et $ff' = \beta(f)$.

Proposition. — *L'axiome* 3) *entraîne l'existence pour tout* $f \in \mathfrak{S}$ *d'un élément* f^{-1} *tel que* $f^{-1}f = \alpha(f)$, $ff^{-1} = \beta(f)$ *et* $\alpha(f^{-1}) = \beta(f)$.

Montrons que $\beta(f) \prec \alpha(f')$. En effet, on a :

$$ff'\alpha(f') = \beta(f) = ff'\alpha(ff').$$

En multipliant par $(ff')'$, on a

$$\alpha(ff')\,\alpha(f') = \alpha(ff') = \beta(f) = \beta(f)\,\alpha(f').$$

Soit $f^{-1} = f'\,\beta(f)$ et montrons que : $f^{-1}f = \alpha(f)$ et $ff^{-1} = \beta(f)$. En effet :

$$f^{-1}f = f'\,\beta(f)f = f'f = \alpha(f).$$
$$ff^{-1} = ff'\,\beta(f) = \beta(f).$$

De plus on a : $\alpha(f^{-1}) = \beta(f)$, en vertu du lemme :

Lemme. — $\alpha(fe) = e\alpha(f)$, $\beta(ef) = e\beta(f)$, où $e \in \mathfrak{S}_0$.

Posons $\varepsilon = \alpha(f)e$ et montrons que $\alpha(f\varepsilon) = \varepsilon$. L'équation $f\varepsilon = (f\varepsilon)\varepsilon$ entraîne $\alpha(f\varepsilon) \prec \varepsilon$. L'équation $f\varepsilon\alpha(f\varepsilon) = f\varepsilon$ entraîne, en multipliant à gauche par f' : $\alpha(f)\varepsilon\alpha(f\varepsilon) = \alpha(f)\varepsilon = \varepsilon = \varepsilon\alpha(f\varepsilon)$; d'où $\varepsilon \prec \alpha(f\varepsilon)$ et par suite $\alpha(f\varepsilon) = \varepsilon$, c'est-à-dire $\alpha(fe) = e\alpha(f)$. On démontre de même la deuxième formule.

Dans $\mathfrak{S}$ on définit la relation $f \prec f'$ équivalente à : il existe $e \in \mathfrak{S}_0$ tel que $f = f'e$. Cette relation est une relation d'ordre :

$f \prec f'$ et $f' \prec f''$ entraînent évidemment $f \prec f''$. En vertu de 2), on a $f \prec f$. Enfin, $f = f'e'$ et $f' = fe$ entraînent :

$$f' = fe = f'e'e = fee'e = fee' = f.$$

En vertu du lemme et de l'axiome 2), $f \prec f'$ entraîne $\alpha(f) \prec \alpha(f')$ et $\beta(f) \prec \beta(f')$.

Soit A une partie de $\mathfrak{S}_0$ admettant une borne inférieure dans $\mathfrak{S}$. Alors cette borne est aussi borne inférieure dans $\mathfrak{S}_0$. De même, si $A \subset \mathfrak{S}_0$ admet une borne inférieure dans $\mathfrak{S}_0$, celle-ci est aussi borne inférieure dans $\mathfrak{S}$. Ceci résulte du fait que tout élément inférieur à une unité est une unité. Nous poserons encore l'axiome suivant :

4) Pour la relation d'ordre dans $\mathfrak{S}_0$, toute partie de $\mathfrak{S}_0$ admet une borne inférieure. (Cet axiome entraîne l'existence d'un plus petit élément noté 0).

Si A est une partie majorée de $\mathfrak{S}_0$, (il revient au même de supposer majorée dans $\mathfrak{S}_0$ ou dans $\mathfrak{S}$), alors A admet une borne supérieure dans $\mathfrak{S}_0$, égale à la borne inférieure des majorants de A, dans $\mathfrak{S}_0$; remarquons que cette borne supérieure est aussi borne supérieure de A dans $\mathfrak{S}$.

Théorème. — *La donnée de $\mathfrak{S}_0$ et de la pseudomultiplication vérifiant* 1), 2), 3), 4) *détermine sur $\mathfrak{S}$ une structure de groupoïde inductif: la classe de ses unités est $\mathfrak{S}_0$; sa multiplication est la restriction de la pseudomultiplication donnée aux couples (f', f) tels que $\alpha(f') = \beta(f)$; le produit correspondant sera désigné par $f'.f$; l'inverse de f est l'élément f^{-1} dont nous avons prouvé l'existence. La relation d'induction $f \prec f'$ est la relation d'ordre définie ci-dessus; la pseudomultiplication donnée coïncide avec la pseudomultiplication déduite de la loi d'induction et définit sur $\mathfrak{S}$ une structure de pseudogroupe.*

Démontrons que $\mathfrak{S}_0$ est la classe des unités de $\mathfrak{S}$. Si $e \in \mathfrak{S}_0$, on a $\alpha(e) = \beta(e) = e$ d'après 2). Si $f.e$ est défini, on a $\alpha(f) = \beta(e) = e$, donc $f.e = f\alpha(f) = f$. De même si $e.f$ est défini, on a $e.f = f$. Donc e est une unité. Si ε est une unité, $\varepsilon\alpha(\varepsilon) = \varepsilon = \alpha(\varepsilon) \in \mathfrak{S}_0$.

Si $f'.f$ est défini, on a $\alpha(f'.f) = \alpha(f)$ et $\beta(f'.f) = \beta(f')$. En effet, si $e \in \mathfrak{S}_0$, $fe = f$ est équivalent à $f'fe = f'f$; car cette dernière équation entraîne $f'^{-1}f'fe = f'^{-1}f'f$, c'est-à-dire $\alpha(f')fe = \alpha(f')f$, ou encore, comme $\alpha(f') = \beta(f)$, $fe = f$. De même $ef' = f'$ est équivalent à $e(f'f) = f'f$. Ce qui précède

montre que $\mathfrak{S}$ est une catégorie pour la multiplication restreinte. D'autre part l'élément f^{-1} est l'inverse « à gauche » de f pour la multiplication restreinte, car $\alpha(f^{-1}) = \beta(f)$. Donc $\mathfrak{S}$ est un groupoïde pour la multiplication restreinte d'après le lemme :

LEMME. — *Si dans une catégorie tout élément x admet un inverse à gauche x' (tel que $x'x = \alpha(x)$), cet inverse est inverse à droite (c'est-à-dire $xx' = \beta(x)$); la catégorie est un groupoïde et x' est l'inverse de x.*

En effet, soit $x'x = \alpha(x)$. On a

$$\alpha(x') = \beta(x) \quad \text{et} \quad \beta(x'x) = \beta(x') = \alpha(x).$$

Donc xx' est défini : $(xx')(xx') = x(x'x)x' = x\alpha(x)x' = xx'$. Il existe y tel que

$$y(xx') = \alpha(xx') = \beta(x) = y(xx')(xx') = \beta(x)xx' = xx',$$

donc $xx' = \beta(x)$.

PROPOSITION. — *La relation d'ordre $f \prec f'$ est encore définie par : il existe $e' \in \mathfrak{S}_0$ tel que $f = e'f'$.*

Montrons que $f'e = \beta(f'e)f'$. En effet :

$$\beta(f'e)\, f' = (f'e)\, (f'e)^{-1}\, f' = f'ef'^{-1}\, f' = f'e\; \alpha(f') = f'e.$$

Nous avons utilisé ici la formule $(ge)^{-1} = eg^{-1}$ qui s'obtient en écrivant : $(eg^{-1})\,(ge) = e\;\alpha(g)e = e\;\alpha(g) = \alpha(ge)$. Donc eg^{-1} est inverse « à gauche » de ge. Il est aussi inverse « à droite » d'après le lemme précédent.

On démontre de même que $e'f = f\alpha(e'f)$.

Pour compléter la démonstration du théorème, montrons que la fonction qui associe à f la classe des éléments $f' \prec f$ est un foncteur généralisé. Soit $h = g.f$; pour tout $e \in \mathfrak{S}_0$, on a : $he = (g.f)e = gfe$; posons $f' = fe$ et $g' = g\beta(f')$; alors $\alpha(g') = \beta(f')\alpha(g) = \beta(f')\beta(f) = \beta(f')$ et $g'.f' = g\beta(f')f' = gfe = he$. Inversement, soit $g' = g\varepsilon$ et $f' = f\varepsilon'$ tels que $\alpha(g') = \beta(f')$; alors $g'f' = g\varepsilon f\varepsilon'$; d'après le dernier lemme, $\varepsilon f = f\varepsilon''$, donc $g'f' = gf\varepsilon''\varepsilon' \prec h$.

Si g et f sont des éléments quelconques de $\mathfrak{S}$, leur pseudo-produit déduit de la loi d'induction est leur composé gf; en effet $gf = g\alpha(g)\;\beta(f)f = (ge)\;(ef)$, où $e = \alpha(g)\beta(f)$.

Démontrons que deux éléments quelconques f et g de $\mathfrak{S}$ ont une borne inférieure. Soit L la classe des éléments l tels que

$l \prec f$ et $l \prec g$. Montrons que ces éléments l ont un agrégat; soit $e = \bigcup_{l \in L} \alpha(l)$, $f' = fe$ et $g' = ge$. Alors $f' = g'$: En effet f' et g' sont deux éléments ayant même unité à droite et qui induisent des éléments égaux sur tout $\varepsilon = \alpha(l)$; on démontre que $\beta(f')$ est l'agrégat des $\beta(f'\varepsilon)$ et comme $f'\varepsilon = g'\varepsilon$, on a $\beta(f') = \beta(g')$. Le composé $g'^{-1}.f'$ est donc défini; il induit sur chaque ε l'élément $(g'\varepsilon)^{-1}.(f'\varepsilon) = \varepsilon$. Par conséquent l'agrégat des ε est induit par $g'^{-1}.f'$; comme $e = \alpha(g'^{-1}f')$, on a $e = g'^{-1}.f'$. Il en résulte $g' = f'$ et cet élément est la borne inférieure de f et g.

Si A est une partie bornée supérieurement dans $\mathfrak{S}$, alors il existe un agrégat $\bigcup$A, qui est l'élément fe où $e = \bigcup\alpha(A)$ et où f est un majorant pour A. En effet, fe est un majorant de A; soit g un majorant quelconque de A; alors $fe = ge$, d'après la démonstration qui précède; donc $fe \prec g$, c'est-à-dire $fe = \bigcup A$.

Définition. — *Un sous-pseudogroupe d'un pseudogroupe $\mathfrak{S}$ est une partie $\mathfrak{S}'$ de $\mathfrak{S}$ qui vérifie les axiomes suivants :*

1) *Le pseudoproduit fg de deux éléments f et g de $\mathfrak{S}'$ appartient à $\mathfrak{S}'$.*

2) *L'inverse f^{-1} de $f \in \mathfrak{S}'$ appartient à $\mathfrak{S}'$.*

3) *L'agrégat d'une partie de $\mathfrak{S}'$ majorée dans $\mathfrak{S}$ appartient à $\mathfrak{S}'$.*

L'axiome 3) appliqué à la partie vide de $\mathfrak{S}'$ entraîne que $0 \in \mathfrak{S}'$.

Ces axiomes sont équivalents aux suivants :

a) $\mathfrak{S}'$ est un sous-groupoïde de la structure de groupoïde de $\mathfrak{S}$ (relativement à la multiplication restreinte).

b) Si e est une unité appartenant à $\mathfrak{S}'$ et si $f \in \mathfrak{S}'$, alors $fe \in \mathfrak{S}'$.

c) L'agrégat d'une famille d'éléments de $\mathfrak{S}'$ majorée dans $\mathfrak{S}$ appartient à $\mathfrak{S}'$.

Remarque. — La classe des unités $\mathfrak{S}'_0$ de $\mathfrak{S}'$ est une sous-classe de $\mathfrak{S}_0$ stable par rapport à l'intersection de deux éléments et par rapport à l'agrégation dans $\mathfrak{S}_0$. Cependant, l'intersection de deux éléments f_1 et f_2 de $\mathfrak{S}'$ appartient à $\mathfrak{S}'$ si la *relation de compatibilité* suivante est remplie :

$$\alpha(f_1 \cap f_2) = \alpha(f_1) \cap \alpha(f_2),$$

relation équivalente à : $f_1 \cap f_2 = f_1(\alpha(f_1) \cap \alpha(f_2))$.

On rencontre aussi des sous-classes $\mathfrak{S}'$ de $\mathfrak{S}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

$\mathfrak{S}'$ satisfait 1), 2), et

3') L'agrégat d'une partie de $\mathfrak{S}'$, majorée dans $\mathfrak{S}'$, appartient à $\mathfrak{S}'$.

Une telle sous-classe $\mathfrak{S}'$ sera appelée *sous-pseudogroupe faible* de $\mathfrak{S}$. Elle vérifie encore *a*), *b*) et contient l'intersection de deux éléments de $\mathfrak{S}'$ liés par la relation de compatibilité.

On peut remplacer 3) par un axiome 3'') encore plus faible que 3') :

3'') Toute partie A de $\mathfrak{S}'$ majorée dans $\mathfrak{S}'$ admet une borne supérieure pour la relation d'ordre induite dans $\mathfrak{S}'$ (mais cette borne supérieure n'est pas forcément l'agrégat de A dans $\mathfrak{S}$).

Une classe $\mathfrak{S}'$ qui vérifie 1), 2) et 3'') est encore un groupoïde inductif pour la relation d'ordre induite dans $\mathfrak{S}'$. Nous dirons que $\mathfrak{S}'$ est un pseudogroupe *contenu* dans $\mathfrak{S}$.

L'intersection d'une famille de sous-pseudogroupes de $\mathfrak{S}$ est un sous-pseudogroupe de $\mathfrak{S}$. Si B est une sous-classe de $\mathfrak{S}$, l'intersection des sous-pseudogroupes de $\mathfrak{S}$ contenant B sera appelée *sous-pseudogroupe de* $\mathfrak{S}$ *engendré par* B.

En particulier, soit B une partie de $\mathfrak{S}$ vérifiant les axiomes 1) et 2) et soit $\mathfrak{S}'$ le sous-pseudogroupe engendré par B. Alors $\mathfrak{S}'$ contient les agrégats dans $\mathfrak{S}$ des parties de B. En particulier $\mathfrak{S}'_0$ contient l'agrégat d'une classe d'unités A appartenant à B. Donc si e' est une unité de B, $\mathfrak{S}'_0$ contient aussi $e' \cap \left(\bigcup_{e \in A} e\right) = e'\left(\bigcup_{e \in A} e\right)$.

Supposons vérifié dans $\mathfrak{S}_0$ l'*axiome de distributivité* suivant :

$$\text{(D)} \qquad e' \cap \left(\bigcup_{e \in A} e\right) = \bigcup_{e \in A} (e' \cap e)$$

où

$$e'\left(\bigcup_{e \in A} e\right) = \bigcup_{e \in A} (e'e).$$

Alors on montre que $\mathfrak{S}'$ est la classe des agrégats des familles d'éléments de B. Dans ce cas, nous dirons que B est une *base* du pseudogroupe $\mathfrak{S}'$.

On est ainsi conduit à poser la définition suivante :

DÉFINITION. — *Un groupoïde inductif* $\mathfrak{S}$ *sera appelé* groupoïde local *lorsque la classe* $\mathfrak{S}_0$ *de ses unités vérifie l'axiome de distributivité* (D).

Proposition. — *Si $\mathfrak{S}_0$ vérifie l'axiome* (D), *alors $\mathfrak{S}$ vérifie aussi l'axiome de distributivité :*

$$f' \cap \Big(\bigcup_{f\in A} f\Big) = \bigcup_{f\in A} (f \cap f')$$

où A *est une classe majorée d'éléments de $\mathfrak{S}$.*

En effet, soit $g = (\cup A) \cap f'$. Démontrons que l'on a : $g = (\cup A) \cap g = \bigcup_{f\in A} (f \cap g)$. Comme g et f sont induits par $\cup A$, l'unité à droite de $(\cup A) \cap g$ est $\alpha(\cup A) \cap \alpha(g)$, l'unité à droite de $\bigcup_{f\in A} (f \cap g)$ est $\bigcup_{f\in A} (\alpha(f) \cap \alpha(g))$. Comme $\alpha(\cup A)$ est l'agrégat des $\alpha(f)$, où $f \in A$, l'axiome (D) dans $\mathfrak{S}_0$ donne $\alpha(\cup A) \cap \alpha(g) = \bigcup_{f\in A} (\alpha(f) \cap \alpha(g))$. Il en résulte

$$(\cup A) \cap g = \bigcup_{f\in A} (f \cap g),$$

car les deux membres de cette égalité sont des éléments induits par $\cup A$. De plus $f \cap f' = f \cap g$, car $g \prec f'$ et $f \cap f' \prec g$. Donc $g = \bigcup_{f\in A} (f \cap f')$.

Soit $\mathfrak{S}'$ un sous-pseudogroupe du pseudogroupe $\mathfrak{S}$. Sur tout $e \in \mathfrak{S}'_0$, la donnée de $\mathfrak{S}'$ détermine [1] une *paratopologie* $T(\mathfrak{S}', e)$; c'est la classe des éléments $\varphi(e) \cap \mathfrak{S}'_0$. Tout $f \in \mathfrak{S}'$ détermine un isomorphisme de la paratopologie $T(\mathfrak{S}', \alpha(f))$ sur $T(\mathfrak{S}', \beta(f))$; c'est l'application : $\varepsilon \to \beta(f\varepsilon)$, où $\varepsilon \in T(\mathfrak{S}', \alpha(f))$. Si $e_1 \prec e$, $e_1 \in \mathfrak{S}'_0$, alors $T(\mathfrak{S}', e_1)$ est la paratopologie induite sur e_1 par $T(\mathfrak{S}', e)$.

Soit $\mathfrak{E}$ le groupoïde inductif de toutes les applications biunivoques (d'un ensemble quelconque sur un ensemble quelconque). Un sous-pseudogroupe Γ de $\mathfrak{E}$ sera appelé un *pseudogroupe de transformations*. En particulier, supposons que les unités de Γ admettent un agrégat qui sera l'application identique d'un ensemble E. Alors Γ est appelé *pseudogroupe de transformations sur* E. C'est un sous-pseudogroupe du pseudogroupe $\mathfrak{E}_E$ de toutes les applications biunivoques d'une partie de E sur une partie de E. Le pseudogroupe de transformations Γ détermine sur E une topologie $T(\Gamma, E)$ dont les ouverts sont les ensembles $\alpha(f)$, où $f \in \Gamma$; chaque $f \in \Gamma$ est un homéomorphisme de $\alpha(f)$ sur $\beta(f)$ par rapport à cette topologie.

Un exemple de sous-pseudogroupe faible s'obtient de la manière suivante : Soit E un ensemble muni d'une topologie T non séparée. Soit $\mathfrak{S}'_0$ la classe des ouverts séparés de E et $\mathfrak{S}'$ la classe des homéomorphismes dont la source et le but appartiennent à $\mathfrak{S}'_0$. Alors $\mathfrak{S}'$ est un sous-pseudogroupe faible de $\mathfrak{C}_E$.

Un exemple de pseudogroupe $\mathfrak{S}'$ *contenu* dans $\mathfrak{S}$ s'obtient de la manière suivante : $\mathfrak{S}'_0$ est la classe des ensembles convexes contenus dans R^n et $\mathfrak{S}'$ est la classe des isomorphismes affines d'un convexe sur un convexe.

Les *pseudogroupes d'isomorphismes locaux* [1] sont aussi des exemples de pseudogroupes. Soit $\mathfrak{S}$ un pseudogroupe et soit $\mathfrak{S}^l$ la classe des triplets (S', f, S), où S et S' sont des éléments de $\mathfrak{S}_0$, $f \in \mathfrak{S}$, $\alpha(f) \prec S$, $\beta(f) \prec S'$. Munissons $\mathfrak{S}^l$ de la pseudomultiplication suivante :

$$(S'_1, f_1, S_1)\,(S', f, S) = \left| \begin{array}{lll} (S'_1, f_1 f, S) & \text{si} & S_1 = S' \\ (0, 0, 0) & \text{si} & S_1 \neq S'. \end{array} \right.$$

Soit $\mathfrak{S}^l_0$ la classe des éléments idempotents (S, e, S), où $e \prec S \in \mathfrak{S}_0$. Alors $\mathfrak{S}^l$ est un pseudogroupe : Les éléments induits par (S', f, S) sont les éléments (S', fe, S), c'est-à-dire (S', g, S), où $g \prec f$. La multiplication restreinte est :

$$(S'_1, f_1, S_1)\,(S', f, S) = (S'_1, f_1 f, S) \quad \text{si} \quad S_1 = S' \quad \text{et} \quad \alpha(f_1) = \beta(f).$$

Si l'on restreint la pseudomultiplication à :

$(S'_1, f_1, S_1)\,(S', f, S) = (S'_1, f_1 f, S)$ si et seulement si $S_1 = S'$, alors $\mathfrak{S}^l$ devient une catégorie dont les unités sont les triplets (S, S, S). Le groupoïde des éléments inversibles de $\mathfrak{S}^l$ s'identifie avec $\mathfrak{S}$, en identifiant (S', f, S) avec f lorsque $\alpha(f) = S$ et $\beta(f) = S'$. Donc $\mathfrak{S}^l$ est une catégorie d'homomorphismes pour $\mathfrak{S}$ (appelée catégorie des isomorphismes locaux déduite de $\mathfrak{S}$ dans [1]).

2. — Catégories inductives.

DÉFINITION. — Une catégorie inductive *est une catégorie* $\mathfrak{C}$ *munie d'une relation d'ordre appelée* loi d'induction, *la classe des éléments* f' *induits par* f, *c'est-à-dire tels que* $f' \prec f$, *étant notée* $I(f)$. *Cette loi d'induction vérifie les axiomes suivants :*

1) *Il existe un sous-groupoïde* $\mathfrak{S}$ *de* $\mathfrak{C}$ *admettant les mêmes unités que* $\mathfrak{C}$ *et tel que, si* $\varphi(f) = I(f) \cap \mathfrak{S}$, *pour tout* $f \in \mathfrak{S}$,

alors φ *est un foncteur d'induction dans le groupoïde* $\mathfrak{S}$. Remarquons que $\varphi(e)$ est alors une classe d'unités lorsque $e \in \mathfrak{C}_0$ (classe des unités de $\mathfrak{C}$).

2) *Soit* $p(h) = (\beta(h), \alpha(h))$, *pour* $h \in \mathfrak{C}$. *Alors l'application* p *applique* $\mathrm{I}(h)$ *d'une façon biunivoque sur une partie de* $\varphi(\beta(h)) \times \varphi(\alpha(h))$.

3) *Toute partie de* $\mathfrak{C}$ *a une borne inférieure.* Il en résulte que toute partie A majorée de $\mathfrak{C}$ admet un agrégat $\bigcup \mathrm{A}$.

4) *Si* h_1 *et* h_2 *sont induits par* $h \in \mathfrak{C}$, *on a:*

$$\alpha(h_1 \cap h_2) = \alpha(h_1) \cap \alpha(h_2); \qquad \beta(h_1 \cap h_2) = \beta(h_1) \cap \beta(h_2).$$

5) $$\alpha(\bigcup \mathrm{A}) = \bigcup_{h \in \mathrm{A}} \alpha(h), \qquad \beta(\bigcup \mathrm{A}) = \bigcup_{h \in \mathrm{A}} \beta(h).$$

6) $$\mathrm{I}(h'h) = \mathrm{I}(h')\mathrm{I}(h).$$

Remarquons que ces axiomes entraînent que $\mathfrak{C}$ est une espèce de structures inductives au-dessus du groupoïde inductif $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$ (voir [1]). La notion de catégorie inductive exposée ici est équivalente à celle de catégorie inductive de morphismes de [1].

L'axiome 2) peut encore s'énoncer :

2') Si $h \in \mathfrak{C}$, $e \in \mathfrak{C}_0$, $e' \in \mathfrak{C}_0$, $e \prec \alpha(h)$, $e' \prec \beta(h)$, alors il existe au plus un $h' \prec h$ tel que $\alpha(h') = e$ et $\beta(h') = e'$.

Remarquons que les axiomes 2) et 4) entraînent : Si $h_1 \prec h$, $h_2 \prec h$, $\alpha(h_1) \prec \alpha(h_2)$, $\beta(h_1) \prec \beta(h_2)$, alors on a $h_1 \prec h_2$.

Proposition. — $\mathfrak{C}_0$ *est une sous-classe inductive de* $\mathfrak{C}$, *c'est-à-dire que si* e *et* $e' \in \mathfrak{C}_0$, *alors* $e \cap e' \in \mathfrak{C}_0$ *et si* E *est une sous-classe de* $\mathfrak{C}_0$, *majorée dans* $\mathfrak{C}$, *alors* $\bigcup \mathrm{E} \in \mathfrak{C}_0$.

En effet, il résulte de l'axiome 5) que, si E est une classe d'unités, majorée dans $\mathfrak{C}$, alors $\alpha(\bigcup \mathrm{E}) = \bigcup \alpha(\mathrm{E}) = \bigcup \mathrm{E} \in \mathfrak{C}_0$. Soit e et $e' \in \mathfrak{C}_0$, $e \bigcap_{\mathfrak{S}} e' = \varepsilon$, $e \cap e' = \varepsilon'$; alors $\varepsilon \prec \varepsilon'$. Inversement soit A la classe des $u \in \mathfrak{C}$ tels que $u \prec e$ et $u \prec e'$; on a $\alpha(u) \prec e$ et $\alpha(u) \prec e'$, d'où $\alpha(u) \prec \varepsilon$; de même $\beta(u) \prec \varepsilon$. Or $\varepsilon' = \bigcup \mathrm{A}$, donc $\alpha(\varepsilon') \prec \varepsilon$ et $\beta(\varepsilon') \prec \varepsilon$ d'après l'axiome 5). Comme ε et ε' sont induits par e, on a $\varepsilon' \prec \varepsilon$, donc $\varepsilon = \varepsilon'$ et, puisque $\varepsilon \in \mathfrak{C}_0$, on a $\varepsilon' \in \mathfrak{C}_0$.

Proposition. — *Si* A *est une classe d'éléments de* $\mathfrak{S}$, *majorée dans* $\mathfrak{C}$, *l'agrégat* $\bigcup_{\mathfrak{S}} \mathrm{A}$ *de* A *dans* $\mathfrak{S}$ *est identique à l'agrégat* $\bigcup \mathrm{A}$ *de* A *dans* $\mathfrak{C}$.

En effet, $\alpha(\bigcup A) = \bigcup \alpha(A) = \alpha(\bigcup_{\mathfrak{S}} A)$, $\beta(\bigcup A) = \bigcup \beta(A) = \beta(\bigcup_{\mathfrak{S}} A)$. Or $\bigcup A \prec \bigcup_{\mathfrak{S}} A$ et, en vertu de 2), on a $\bigcup A = \bigcup_{\mathfrak{S}} A$.

Si A est une sous-classe de $\mathfrak{S}$, on a $\bigcap_{\mathfrak{S}} A \prec \bigcap A$.

On peut étendre la multiplication dans $\mathfrak{C}$ en posant :

$h'h = \bigcup(l'l)$, où $l' \prec h'$, $l \prec h$, $\alpha(l') = \beta(l)$, lorsque cet agrégat existe. Cette multiplication étendue appelée *pseudo-multiplication* est associative. Remarquons que si f et f' appartiennent à $\mathfrak{S}$, leur pseudoproduit ainsi défini dans $\mathfrak{C}$, s'il existe, peut être différent du pseudoproduit défini dans $\mathfrak{S}$ par la structure de groupoïde inductif de $\mathfrak{S}$.

On voit que $\alpha(h'h) \prec \alpha(h)$ et que $\beta(h'h) \prec \beta(h')$. Si $e \in \mathfrak{C}_0$ et si $e \prec \alpha(h')$, alors $h'e$ est défini et on a $h'e \prec h'$. De même, si $e \prec \beta(h)$, alors eh est défini et on a $eh \prec h$.

Remarque. — Si pour tout $e \in \mathfrak{C}_0$, la classe $I(e)$ est un ensemble, on peut démontrer par récurrence transfinie que $h'h$ est toujours défini.

Proposition. — *$\alpha(h)$ est l'intersection de la classe* E *des $e \in \mathfrak{C}_0$ tels que $he = h$; de même $\beta(h)$ est l'intersection de la classe* E′ *des $e' \in \mathfrak{C}_0$ tels que $e'h = h$.*

En effet, $h\alpha(h) = h$, donc $\bigcap E \prec \alpha(h)$; inversement, si $he = h$, alors $\alpha(he) = \alpha(h) \prec e$, d'après ce qui précède, donc $\alpha(h) \prec \bigcap E$; de même $\beta(h) = \bigcap E'$.

Remarquons que $\mathfrak{S}$ peut être réduit à $\mathfrak{C}_0$; mais le cas le plus intéressant est celui où $\mathfrak{S}$ est la classe de tous les éléments inversibles de $\mathfrak{C}$. Cette notion est alors équivalente à celle de catégorie inductive d'homomorphismes (voir [1]). On peut définir une telle catégorie à l'aide des axiomes 2′), 3), 4), 5), 6), 7), 8), où :

7) Si f est inversible et $e \in \mathfrak{C}_0$, $e \prec \alpha(f)$, il existe un élément inversible unique $g \prec f$ tel que $\alpha(g) = e$.

8) L'agrégat d'une famille d'éléments inversibles majorée par un élément inversible est inversible.

Une famille d'éléments (h_i) de $\mathfrak{C}$ est dite *compatible* si :

$$\alpha(h_i \cap h_j) = \alpha(h_i) \cap \alpha(h_j), \quad \beta(h_i \cap h_j) = \beta(h_i) \cap \beta(h_j).$$

Une catégorie inductive sera appelée *complète* si toute famille (h_i) compatible et telle que $\bigcup_i \alpha(h_i)$ et $\bigcup_i \beta(h_i)$ existent admet un agrégat dans $\mathfrak{C}$.

Si l'axiome (D) est vérifié dans $\mathfrak{C}_0$, il est vérifié dans $\mathfrak{C}$, qui sera appelé alors *catégorie locale.*

Une catégorie inductive sera dite *régulière* si elle vérifie les axiomes supplémentaires : *a*) Si $h \in \mathfrak{C}$, $e \in \mathfrak{C}_0$, $e \prec \alpha(h)$, alors $\alpha(he) = e$. *b*) Si $h \in \mathfrak{C}$, $e' \in \mathfrak{C}_0$, $e' \prec \beta(h)$, alors $\beta(e'h) = e'$. Elle sera dite *normale à droite* (resp. *à gauche*) si elle vérifie *a*) (resp. *b*)) et : *c*) si $f \in \mathfrak{S}$, $e \prec \alpha(f)$, $e \in \mathfrak{C}_0$, alors $fe \in \mathfrak{S}$ (resp. $e' \succ \beta(f)$, $e' \in \mathfrak{C}_0$, alors $e'f \in \mathfrak{S}$).

Proposition. — *Dans une catégorie inductive régulière, $h'h$ est défini pour tout couple (h', h) et on a : $h'h = (h'e)(eh)$, où $e = \alpha(h') \cap \beta(h)$.*

En effet, soit $l \prec h$ et $l' \prec h'$ avec $\alpha(l') = \beta(l) \prec e$. Montrons que $l'l \prec (h'e)(eh)$. Or $l'\alpha(l') \prec h'e$ et $\beta(l)l \prec eh$, donc $l'l \prec (h'e)(eh)$. Par suite $h'h$ est défini et $h'h \prec (h'e)(eh)$. De plus, $(h'e)(eh) \prec h'h$, car $h'e \prec h'$, $eh \prec h$, $\alpha(h'e) = \beta(eh) = e$, donc $(h'e)(eh) = h'h$.

Proposition. — *Si $\mathfrak{C}$ est une catégorie inductive régulière,* $\mathrm{I}(h)$ *est la classe des pseudoproduits $e'he$, où $e' \prec \beta(h)$, $e \prec \alpha(h)$.*

En effet, $he \prec h$ et $e'(he)$ est l'agrégat des éléments $l'l$, où $l' \prec e' \prec \beta(h)$ et $l \prec he \prec h$; comme $l'l \prec \beta(h)h = h$, on a $e'he \prec h$. Montrons que si $h_1 \prec h$, alors $h_1 = \beta(h_1)h\alpha(h_1)$: On a $h_1 = h_1\alpha(h_1) \prec h\alpha(h_1)$ et $h_1 = \beta(h_1)h_1 \prec \beta(h_1)h\alpha(h_1)$. D'autre part, $\beta(h_1)h\alpha(h_1)$ et h_1 sont induits par h, car $\alpha(h_1) \prec \alpha(h)$ et $\beta(h_1) \prec \beta(h\alpha(h_1))$. Les unités à droite et à gauche de $\beta(h_1)h\alpha(h_1)$ étant induites par $\alpha(h_1)$ et $\beta(h_1)$, on a $\beta(h_1)h\alpha(h_1) \prec h_1$.

En particulier la catégorie des applications continues d'un espace topologique dans un autre et la catégorie des applications continues d'un espace topologique sur un autre sont des catégories inductives; la première est régulière.

Définition. — *Si $\mathfrak{C}$ est une catégorie inductive, une sous-catégorie $\mathfrak{C}'$ de $\mathfrak{C}$ est appelée* sous-catégorie inductive *lorsque les axiomes suivants sont vérifiés :*

1) *L'intersection de deux unités de $\mathfrak{C}'$ appartient à $\mathfrak{C}'$.*

2) *Pour toute partie* A *de $\mathfrak{C}'$, majorée dans $\mathfrak{C}$, l'agrégat* $\cup$A *appartient à $\mathfrak{C}'$.*

3) *Soit* $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S} \cap \mathfrak{C}'$. Si $f \in \mathfrak{S}'$, $e \in \mathfrak{C}'_0$, $e \prec \alpha(f)$, *alors il existe $g \in \mathfrak{S}'$ tel que $g \prec f$ et $\alpha(g) = e$.*

Il en résulte que $\mathfrak{S}'$ est un sous-pseudogroupe de $\mathfrak{S}$.

Si $\mathfrak{C}$ est une catégorie inductive régulière, une sous-caté-

gorie inductive $\mathfrak{C}'$ est dite *régulière* si elle vérifie de plus l'axiome :

4) Si $e \in \mathfrak{C}'_0$, $e' \in \mathfrak{C}'_0$, $h \in \mathfrak{C}'$, $e \prec \alpha(h)$ $e' \prec \beta(h)$, alors $he \in \mathfrak{C}'$ et $e'h \in \mathfrak{C}'$.

Le système d'axiomes 1), 2), 3), 4) est équivalent au suivant :

a) $\mathfrak{C}'$ est une sous-catégorie stable pour la pseudomultiplication.

b) $\mathfrak{S}'$ est un sous-pseudogroupe de $\mathfrak{S}$.

c) Identique à 2).

On dira que $\mathfrak{C}'$ est une *sous-catégorie inductive faible* si l'axiome 2) est remplacé par :

2') Pour toute partie A de $\mathfrak{C}'$, majorée dans $\mathfrak{C}'$, l'agrégat $\bigcup A$ appartient à $\mathfrak{C}'$.

Il en résulte alors que $\mathfrak{S}'$ est un sous-pseudogroupe faible de $\mathfrak{S}$.

3. — Catégorie des filtres déduite d'une catégorie inductive.

Soit $\mathfrak{A}$ une classe munie d'une relation d'ordre telle que deux éléments quelconques de $\mathfrak{A}$ admettent une intersection et qu'il y ait un plus petit élément 0.

DÉFINITION. — *Une partie* F *de* $\mathfrak{A}$ *sera appelée* filtre *sur* $\mathfrak{A}$ *si l'intersection de deux éléments de* F *appartient à* F *et si tout élément majorant d'un élément de* F *appartient à* F. *Une partie* B *de* $\mathfrak{A}$ *sera appelée une base de filtre lorsque l'intersection de deux éléments de* B *contient un élément de* B.

Si B est une base de filtre, la classe des majorants des éléments de B forme un filtre F appelé *filtre engendré par* B.

Si le filtre F contient 0, il est identique à $\mathfrak{A}$ et s'appellera le *filtre trivial*, ou *filtre* 0. Les autres filtres sont les *filtres propres*.

THÉORÈME. — *Soit* $\mathfrak{C}$ *une catégorie inductive régulière, la classe* $\mathfrak{F}$ *des filtres de* $\mathfrak{C}$ *forme une catégorie inductive régulière.*

La classe des éléments $\alpha(f)$, où $f \in$ F, est une base de filtre dans $\mathfrak{C}_0$ ou dans $\mathfrak{C}$, car $\alpha(f \cap g) \prec \alpha(f) \cap \alpha(g)$. Le filtre engendré par cette base de filtre sera désigné par α(F) et sera appelé la *source de* F. De même, le *but* de F est le filtre β(F) engendré par les éléments $\beta(f)$, $f \in$ F.

LEMME. — *Si* $h \in$ F, $\varepsilon \in \beta$(F) *et* $\varepsilon \prec \beta(h)$, *alors* $\varepsilon h \in$ F. *De même, si* $h \in$ F, $e \in \alpha$(F) *et* $e \prec \alpha(h)$, *alors* $he \in$ F.

En effet, il existe $l \in F$ tel que $\beta(l) \prec \varepsilon$. Soit $l' = l \cap h$; on a $l' \prec h$ et $\beta(l') \prec \varepsilon$; posons $l'' = l' \cup \varepsilon h$; alors $l'' \in F$ et on a $l'' \prec h$, $\beta(l'') = \beta(l') \cup \beta(\varepsilon h) = \varepsilon$. Donc $l'' \prec \varepsilon h$ et par suite $\varepsilon h \in F$. De même on démontre que $he \in F$.

Démonstration du théorème. — Soient F′ et F deux filtres sur $\mathfrak{C}$ tels que $\alpha(F') = \beta(F)$. Le produit F′F sera alors le filtre engendré par la classe des éléments $f'f$, où $f' \in F'$, $f \in F$, $\alpha(f') = \beta(f)$. Montrons que la classe M des éléments $f'f$ est la base d'un filtre. Si $h' \in F'$ et $h \in F$, alors le pseudoproduit $h'h$ est un élément de M, à savoir $(h'\varepsilon)(\varepsilon h)$, où $\varepsilon = \alpha(h') \cap \beta(h)$. Soient $f'f$ et $g'g$ deux éléments de M. Soit $h = f \cap g$ et $h' = f' \cap g'$. Alors $h' \in F'$ et $h \in F$ et le pseudoproduit $h'h$ appartient à M. Or $h'h \prec f'f$ et $h'h \prec g'g$, donc $h'h \prec f'f \cap g'g$. Donc M est la base d'un filtre que nous désignerons par F′F. Remarquons que M est aussi la classe des pseudoproduits $h'h$, où $h \in F$, $h' \in F'$.

Si B est une base de F, B′ une base de F′, alors B′B est une base de F′F, en désignant par B′B la classe des pseudoproduits $b'b$, où $b \in B$, $b' \in B'$. En effet, tout $f'f$ contient un tel élément $b'b$, où $b \prec f$, $b' \prec f'$.

Si E est un filtre dont une base est formée d'unités, alors $F'E = F'$ et $EF = F$, pour tous les filtres F et F′ tels que $\alpha(F') = E$ et $\beta(F) = E$. En effet, soit $f' \in F'$, e une unité appartenant à E; si $\varepsilon = \alpha(f') \cap e$, alors $\varepsilon \in E$, $f'\varepsilon \in F'$ et $f'\varepsilon \prec f'e$. Donc $F'E \subset F'$. D'autre part, $F' \subset F'E$. On démontre de même que $EF = F$.

Si $F \in \mathfrak{F}$, $F' \in \mathfrak{F}$, $\alpha(F') = \beta(F)$, alors $\alpha(F'F) = \alpha(F)$ et $\beta(F'F) = \beta(F')$. En effet, soit $f \in F$; il existe $f' \in F'$ tel que $\alpha(f') \prec \beta(f)$. L'élément $\alpha(f')f$ est un élément f_1 de F. On a $\alpha(f'f_1) = \alpha(f_1) \prec \alpha(f)$. Donc $\alpha(F) \subset \alpha(F'F)$. Comme $\alpha(F'F) \subset \alpha(F)$, on a $\alpha(F'F) = \alpha(F)$. On a de même $\beta(F'F) = \beta(F')$.

Les résultats précédents montrent que $\mathfrak{F}$ est une catégorie dont les unités sont les filtres ayant une base formée d'unités, l'unité à droite de F étant $\alpha(F)$, son unité à gauche $\beta(F)$.

Soit $\mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$ la classe des filtres F admettant une base B formée d'éléments de $\mathfrak{S}$. Alors $\mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$ est un groupoïde; en effet, $F \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$ est inversible et son inverse F^{-1} admet pour base la classe des inverses f^{-1}, où $f \in B$. Remarquons qu'une base de filtre dans $\mathfrak{S}$

est une base de filtre dans $\mathfrak{C}$ et une base de filtre dans $\mathfrak{C}$ formée d'éléments de $\mathfrak{S}$ est une base de filtre dans $\mathfrak{S}$. Il en résulte que les éléments f^{-1} forment bien une base de filtre, car $f \in \mathfrak{S}$, $g \in \mathfrak{S}$ entraîne $f \bigcap_{\mathfrak{S}} g \in \mathfrak{S}$ et $f^{-1} \bigcap_{\mathfrak{S}} g^{-1} = \left(f \bigcap_{\mathfrak{S}} g\right)^{-1}$.

Considérons dans $\mathfrak{F}$ la relation d'ordre $F \prec F'$ équivalente à $F' \subset F$. Cette relation d'ordre est une loi d'induction dans $\mathfrak{F}$. La borne inférieure d'une famille de filtres pour cette loi d'induction est le filtre engendré par la réunion des filtres de la famille. Le plus petit élément est le filtre 0. Toute partie bornée A de $\mathfrak{F}$ admet un agrégat; c'est l'intersection de tous les filtres $F \in A$.

Pour la relation d'ordre induite sur $\mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$, le groupoïde $\mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$ est un groupoïde inductif : c'est le groupoïde inductif privilégié qui intervient dans la définition d'une catégorie inductive. En effet, si $F \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$, $E \prec \alpha(F)$, $E \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$, alors le filtre induit par F sur E est le filtre engendré par les éléments induits par f sur e, où $f \in F$, $e \in E$, e est une unité $\prec \alpha(f)$.

Pour tout $F \in \mathfrak{F}$ et tout $E \in \mathfrak{F}_0$, $E \prec \alpha(F)$, la classe des pseudoproduits fe, où $f \in F$, $e \in E$, forme une base de filtre. Appelons FE le filtre qu'elle engendre; FE admet aussi pour base la classe des éléments fe, où $f \in F$, $e \in E$ et $e \prec \alpha(f)$. On définit de même $E'F$ si $E' \prec \beta(F)$. On a $\alpha(FE) = E$, $\beta(E'F) = E'$. Si $G \prec F$, alors

$$\beta(G) \prec \beta(F\,\alpha(G)) \text{ et } G = \beta(G)F\,\alpha(G).$$

On démontre que, si $H \prec F'F$, alors $H = (\beta(H)F'E')\,(E'F\alpha(H))$, où $E' = \beta(F\alpha(H)) \cap \alpha(\beta(H)F')$, donc $H = K'K$, avec $K' \prec F'$, $K \prec F$. Ce qui précède permet de vérifier facilement les axiomes d'une catégorie inductive.

Remarquons que $\mathfrak{C}$ est plongé dans $\mathfrak{F}$, en identifiant l'élément f au filtre formé de tous les majorants de f, que nous noterons $[f]$; la relation d'induction dans $\mathfrak{C}$ est induite par celle de $\mathfrak{F}$.

Soit $\mathfrak{C}'$ une sous-catégorie inductive, $\mathfrak{F}'$ la classe des filtres $F \in \mathfrak{F}$, ayant une base formée d'éléments de $\mathfrak{C}'$; on montre facilement que $\mathfrak{F}'$ est une sous-catégorie inductive de $\mathfrak{F}$. Si $\mathfrak{C}'$ est une sous-catégorie inductive faible, alors $\mathfrak{F}'$ est une sous-catégorie faible de $\mathfrak{F}$.

4. — Groupoïdes inductifs au-dessus d'un groupoïde inductif.

Définition. — *Soient $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$ deux groupoïdes inductifs, φ et φ' leurs foncteurs d'induction. $\mathfrak{S}$ est appelé groupoïde inductif au-dessus de $\mathfrak{S}'$ lorsqu'il est muni d'un foncteur covariant p de $\mathfrak{S}$ vers $\mathfrak{S}'$ vérifiant les axiomes suivants :*

1) *Soit $f \in \mathfrak{S}$, $s \in \mathfrak{S}_0$, tels que $p(s) = \alpha(p(f))$. Alors il existe $g \in \mathfrak{S}$ tel que $\alpha(g) = s$ et $p(g) = p(f)$.*

2) *L'élément g ci-dessus est unique.*

3) *$\varphi(f)$ est appliqué d'une façon biunivoque par p sur une sous-classe de $\varphi'(f')$, où $f' = p(f)$.*

4) *Si $s_1 \prec s$, $s_2 \prec s$, où s, s_1 et s_2 sont des unités de $\mathfrak{S}$, alors $p(s_1 \cap s_2) = p(s_1) \cap p(s_2)$.*

5) *Si A est une sous-classe de $\mathfrak{S}_0$ majorée par $s \in \mathfrak{S}_0$, il existe $s_1 \prec s$ tel que $p(s_1) = \bigcup p(\mathrm{A})$.*

Les axiomes 1) et 2) entraînent : $p(\mathfrak{S})$ est un sous-groupoïde G de $\mathfrak{S}'$ et G est un groupoïde d'opérateurs sur $\mathfrak{S}_0$. En effet, reprenant les notations de 1), le composé de $(p(f), s)$ sera $\beta(g)$, c'est-à-dire on peut écrire $s' = p(f)s$, où $s' = \beta(g)$. Cette multiplication vérifie les axiomes d'un groupoïde d'opérateurs, en d'autres termes, *$\mathfrak{S}_0$ est une espèce de structures sur* G *ou au-dessus* (1) *de $\mathfrak{S}'$.*

Les axiomes 3), 4), 5) expriment que $\mathfrak{S}_0$ est une espèce de structures *inductives* au-dessus de $\mathfrak{S}'$ (voir [1]) : l'élément f de $\mathfrak{S}$ peut être identifié avec le couple $(p(f), \alpha(f))$.

On démontre les propriétés suivantes :

$f_1 \prec f$ est équivalent à : $\alpha(f_1) \prec \alpha(f)$ et $p(f_1) \prec p(f)$.

Étant données trois unités s, s_1, s_2 de $\mathfrak{S}$ telles que $s_1 \prec s$, $s_2 \prec s$, pour que $s_1 \prec s_2$, il faut et il suffit que $p(s_1) \prec p(s_2)$.

(1) En accord avec la définition suivante (qui généralise légèrement celle de [1] page 52).

Définition. — Une catégorie $\mathfrak{C}$ est appelée *catégorie d'opérateurs* sur une classe E lorsqu'on a défini une multiplication pour certains couples (f, z), $(f, z) \to fz$, où $f \in \mathfrak{C}$, $z \in \mathrm{E}$, $fz \in \mathrm{E}$ satisfaisant aux axiomes suivants :

1) Si l'un des éléments $g(fz)$ ou $(gf)z$ est défini, alors les deux éléments sont définis et $g(fz) = (gf)z$.

2) Si gf et fz sont définis, alors $g(fz)$ est défini.

3) Si e est une unité de $\mathfrak{C}$ et si ez est défini, alors $ez = z$.

4) Pour tout $z \in \mathrm{E}$, il existe $f \in \mathfrak{C}$ tel que fz soit défini.

5) Pour tout $f \in \mathfrak{C}$, il existe $z \in \mathrm{E}$ tel que fz soit défini.

On dira aussi que E est une espèce de structures (covariantes) *sur* $\mathfrak{C}$. Si ces axiomes sont vérifiés sauf 5), on dira que E est une espèce de structures *au-dessus* de $\mathfrak{C}$; c'est alors une espèce de structures *sur* une sous-catégorie de $\mathfrak{C}$.

On a : $p(\bigcup A) = \bigcup p(A)$, où A est une partie majorée de $\mathfrak{S}_0$. Si B est une partie majorée de $\mathfrak{S}$, on a :

$$p(\bigcup B) = \bigcup p(B), \quad \alpha(\bigcup B) = \bigcup \alpha(B), \quad \beta(\bigcup B) = \bigcup \beta(B).$$

Si f_1 et f_2 sont deux éléments quelconques de $\mathfrak{S}$ et si $f_2 f_1$ est leur pseudoproduit, alors $p(f_2 f_1) \prec p(f_2)p(f_1)$. Si $s \prec \alpha(f)$, on a $p(fs) = p(f)p(s)$.

En général, $p(\mathfrak{S})$ n'est pas un sous-groupoïde inductif contenu dans $\mathfrak{S}'$. Si $p(\mathfrak{S})$ est un sous-groupoïde inductif contenu dans $\mathfrak{S}'$, alors $p(f_2 f_1) = p(f_2)p(f_1)$, où le deuxième membre est un pseudoproduit dans $p(\mathfrak{S})$. Si p est un foncteur biunivoque de $\mathfrak{S}$ dans $\mathfrak{S}'$, alors $p(\mathfrak{S})$ est un sous-pseudogroupe faible de $\mathfrak{S}'$.

Si $\mathfrak{S}'$ est un groupoïde local, alors $\mathfrak{S}$ est un groupoïde local.

Une famille d'éléments f_i de $\mathfrak{S}$ est appelée *compatible relativement à* $\mathfrak{S}'$ si elle possède les propriétés suivantes :

a) $p(s_i \cap s_j) = p(s_i) \cap p(s_j)$, où $s_i = \alpha(f_i)$, $s_j = \alpha(f_j)$.

b) $\alpha(p(f_i) \cap p(f_j)) = p(s_i) \cap p(s_j)$.

Il en résulte : $\alpha(f_i \cap f_j) = s_i \cap s_j$, $p(f_i \cap f_j) = p(f_i) \cap p(f_j)$. c'est-à-dire f_i et f_j sont compatibles dans $\mathfrak{S}$, $p(f_i)$ et $p(f_j)$ sont compatibles dans $\mathfrak{S}'$.

Définition. — *Un groupoïde inductif $\mathfrak{S}$ au-dessus de $\mathfrak{S}'$ est dit complet relativement à $\mathfrak{S}'$ lorsque l'axiome suivant est vérifié :*

c) *Toute famille d'éléments de $\mathfrak{S}$ qui est compatible relativement à $\mathfrak{S}'$ et dont la projection dans $\mathfrak{S}'$ admet un agrégat dans $\mathfrak{S}'$ admet elle-même un agrégat dans $\mathfrak{S}$.*

5. — Catégories inductives au-dessus d'une catégorie inductive :

Définition. — *Soient $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$ deux catégories inductives, $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$ les sous-groupoïdes inductifs privilégiés dans $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$,* I *et* I′ *les lois d'induction dans $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$; on appellera $\mathfrak{C}$ une catégorie inductive au-dessus de $\mathfrak{C}'$ lorsque $\mathfrak{C}$ est muni d'un foncteur covariant π de $\mathfrak{C}$ vers $\mathfrak{C}'$ vérifiant les axiomes suivants :*

1) *Soient s, s_1, s_2 des unités de $\mathfrak{C}$, $s_1 \prec s$, $s_2 \prec s$. Alors $\pi(s_1 \cap s_2) = \pi(s_1) \cap \pi(s_2)$. De plus, $\pi(s_1) = \pi(s_2)$ entraîne $s_1 = s_2$.*

2) *Soit* A *une partie de $\mathfrak{C}_0$, majorée par* S *dans $\mathfrak{C}_0$, alors il existe $\sigma \prec$ S tel que $\pi(\sigma) = \bigcup \pi(A)$.*

3) *Soit $h \in \mathfrak{C}$; alors $\pi(I(h)) \subset I'(\pi(h))$.*

4) *L'application $h \rightarrow (\beta(h), \pi(h), \alpha(h))$ de $\mathfrak{C}$ sur une partie de $\mathfrak{C}_0 \times \mathfrak{C}' \times \mathfrak{C}_0$ est biunivoque.*

5) $\pi(\mathfrak{S}) \subset \mathfrak{S}'$.

6) *Soit* $f \in \mathfrak{S}$, $s \in \mathfrak{C}_0$, *où* $\pi(s) = \pi(\alpha(f))$. *Alors il existe un* $g \in \mathfrak{S}$ *et un seul tel que* $\alpha(g) = s$ *et* $\pi(g) = \pi(f)$.

On obtient un système d'axiomes équivalent en remplaçant 1), 2), 5), 6) par l'axiome : La restriction de π à $\mathfrak{S}$ définit $\mathfrak{S}$ comme groupoïde inductif au-dessus de $\mathfrak{S}'$. Une catégorie inductive $\mathfrak{C}$ au-dessus de $\mathfrak{C}'$ a été appelée dans [1] catégorie inductive d'homomorphismes au-dessus de $\mathfrak{C}'$.

Les éléments induits par $h \in \mathfrak{C}$ s'identifient à des triplets (s_2, h', s_1) où $s_1 \prec \alpha(h)$, $s_2 \prec \beta(h)$, $h' \prec \pi(h)$. Si h_1 et h_2 sont induits par h, on a $\pi(h_1 \cap h_2) = \pi(h_1) \cap \pi(h_2)$ Si B est une partie de $\mathfrak{C}$, majorée dans $\mathfrak{C}$, alors $\pi(\bigcup B) = \bigcup \pi(B)$.

$\pi(\mathfrak{C})$ est une sous-catégorie de $\mathfrak{C}'$, mais, en général, ce n'est pas une sous-catégorie inductive.

Si $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$ sont des catégories régulières, pour la pseudo-multiplication on a :

$$\pi(h_2 h_1) \prec \pi(h_2)\pi(h_1).$$

Si $\pi(\mathfrak{C})$ est une sous-catégorie régulière faible de $\mathfrak{C}'$, alors π est un isomorphisme de $\mathfrak{C}$ sur $\pi(\mathfrak{C})$ pour leurs structures de catégorie inductive.

Une famille d'éléments h_i de $\mathfrak{C}$ est dite *compatible relativement à* $\mathfrak{C}'$ si on a :

a) $\quad \pi(s_i \cap s_j) = \pi(s_i) \cap \pi(s_j), \quad \pi(s'_i \cap s'_j) = \pi(s'_i) \cap \pi(s'_j),$

où $\quad s_i = \alpha(h_i), \quad s_j = \alpha(h_j), \quad s'_i = \beta(h_i), \quad s'_j = \beta(h_j).$

b) $\alpha(\pi(h_i) \cap \pi(h_j)) = \pi(s_i) \cap \pi(s_j), \quad \beta(\pi(h_i) \cap \pi(h_j)) = \pi(s'_i) \cap \pi(s'_j).$

Définition. — *Une catégorie inductive* $\mathfrak{C}$ *au-dessus de* $\mathfrak{C}'$ *est dite* complète relativement à $\mathfrak{C}'$ *lorsque l'axiome suivant est vérifié :*

c) *Toute famille d'éléments de* $\mathfrak{C}$ *qui est compatible relativement à* $\mathfrak{C}'$ *et dont la projection admet un agrégat dans* $\mathfrak{C}'$ *admet un agrégat dans* $\mathfrak{C}$.

Si $\mathfrak{C}'$ est une catégorie locale, alors $\mathfrak{C}$ est une catégorie locale.

Proposition. — *Au-dessus d'une catégorie inductive normale à droite (resp. à gauche)* $\mathfrak{C}$, *on peut définir une catégorie inductive normale* $\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$ *dont les objets sont les paratopologies sur les unités de* $\mathfrak{C}$.

Soit T une paratopologie sur $e \in \mathfrak{C}_0$; c'est-à-dire T est une partie de $\varphi(e)$, classe des unités induites par e, telle que T soit saturé par rapport à l'intersection de deux éléments et par rapport à l'agrégation quelconque et contienne e et 0. Soit $\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$ la classe des triplets (T', h, T), où $h \in \mathfrak{C}$, T est une paratopologie sur $\alpha(h)$, T′ une paratopologie sur $\beta(h)$, tels que $e \in T$ entraîne $\beta(he) \in T'$ (resp. $e' \in T'$ entraîne $\alpha(e'h) \in T$). La classe $\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$ est une catégorie inductive pour la loi de composition : $(T'', h' T_1)(T', h, T) = (T'', h'h, T)$, si et seulement si $T_1 = T'$, et pour la loi d'induction :

$(t', h', t) \prec (T', h, T)$ si et seulement si $h' \prec h$, $t = T \cap \varphi(\alpha(h'))$, $\alpha(h') \in T$, $\beta(h') \in T'$, $t' = T' \cap \varphi(\beta(h'))$.

Une unité de $\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$ est un triplet (T, e, T), où $e \in \mathfrak{C}_0$. Il correspond d'une façon biunivoque à T; c'est-à-dire, la classe des paratopologies sur les unités de $\mathfrak{C}$ est une classe d'objets pour $\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$.

Le sous-groupoïde inductif privilégié de $\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$ est la classe $\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$ de triplets (T', f, T), où $f \in \mathfrak{S}$, $T' = fT =$ classe des éléments $\beta(fe)$, où $e \in T$, fe est l'élément de $\mathfrak{S}$ induit par f sur e.

Soit $h' = he$, $e \prec \alpha(h)$, $e \in T$, t la paratopologie induite par T sur e, t' la paratopologie induite par T′ sur $\beta(h')$. Alors $(t', h', t) \in \mathfrak{T}(\mathfrak{C})$. On a :

$$(T', h, T)(t, e, t) = (t', he, t), \tag{1}$$

où le premier membre est un pseudoproduit dans la catégorie inductive $\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$. On a respectivement une formule analogue :

$$(t_1, e_1, t_1)(T', h, T) = (t_1, e_1h, t_1'). \tag{2}$$

Ces deux formules montrent que $\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$ est une catégorie inductive régulière, si $\mathfrak{C}$ est régulier.

$\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$ est une catégorie inductive au-dessus de $\mathfrak{C}$ par rapport au foncteur projection $\pi : (T', h, T) \to h$.

La formule (1) entraîne :

$$\pi((T', h, T)(t, e, t)) = he.$$

De même respectivement :

$$\pi((t_1, e_1, t_1)(T', h, T))) = e_1h.$$

Si $\mathfrak{C}$ est une catégorie locale, alors $\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$ est une catégorie locale complète relativement à $\mathfrak{C}$.

Définition. — *La catégorie* $\mathfrak{C}$ *est dite suprarégulière au-dessus de* $\mathfrak{C}'$ *lorsque* $\mathfrak{C}$ *et* $\mathfrak{C}'$ *sont des catégories inductives régulières,* $\mathfrak{C}$ *étant au-dessus de* $\mathfrak{C}'$ *par rapport à un foncteur projection* π *vérifiant l'axiome :*

$$\pi(hs) = \pi(h)\pi(s), \qquad \pi(s'h) = \pi(s')\pi(h),$$

où

$$h \in \mathfrak{C},\ s \in \mathfrak{C}_0, \qquad s' \in \mathfrak{C}_0, \qquad s \prec \alpha(h), \qquad s' \prec \beta(h).$$

En particulier la catégorie $\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$ est suprarégulière au-dessus de $\mathfrak{C}$ si $\mathfrak{C}$ est régulier.

Définition. — *Soit* $\mathfrak{C}$ *une catégorie inductive au-dessus de la catégorie inductive* $\mathfrak{C}'$. *La catégorie* $\mathfrak{C}$ *sera dite* étalée au-dessus de $\mathfrak{C}'$ *lorsque la restriction du foncteur projection* π *à la classe* $\mathrm{I}(h)$ *est biunivoque sur* $\mathrm{I}'(\pi(h))$ *et que la restriction de* π *à* $\varphi(s)$, $s \in \mathfrak{C}_0$, *est biunivoque sur* $\varphi'(\pi(s))$.

Si $\mathfrak{C}$ est étalé au-dessus de $\mathfrak{C}'$ et si $\mathfrak{C}$ ou $\mathfrak{C}'$ est régulière, alors $\mathfrak{C}$ est suprarégulière au-dessus de $\mathfrak{C}'$.

Proposition. — *Si* $\mathfrak{C}$ *est suprarégulière au-dessus de* $\mathfrak{C}'$ *normal, alors* $\mathfrak{C}$ *est étalée et suprarégulière au-dessus de* $\mathfrak{T}(\mathfrak{C}')$ *par rapport au foncteur projection* $\tau : h \to (\mathrm{T}', \pi(h), \mathrm{T})$, *où* T *est la paratopologie sur* $\pi(s)$ *définie par* $\pi(\varphi(s))$, *où* $s = \alpha(h)$, T' *étant la paratopologie définie de la même façon sur* $\pi(s')$, *où* $s' = \beta(h)$.

Le groupoïde privilégié de $\mathfrak{C}$ au-dessus de $\mathfrak{T}(\mathfrak{C}')$ est $\mathfrak{S}$. De plus on a : $\pi = \pi'\tau$, où π' est le foncteur projection de $\mathfrak{T}(\mathfrak{C}')$ sur $\mathfrak{C}'$.

Cette proposition généralise la proposition de [1] page 64. $\tau(\mathfrak{C})$ est une sous-catégorie inductive faible de $\mathfrak{T}(\mathfrak{C}')$, qui est aussi suprarégulière au-dessus de $\mathfrak{C}'$. Si de plus la catégorie $\mathfrak{C}$ est complète relativement à $\mathfrak{C}'$, alors elle est complète relativement à $\mathfrak{T}(\mathfrak{C}')$, mais la catégorie $\tau(\mathfrak{C})$ n'est pas forcément complète relativement à $\mathfrak{C}'$.

Soit $\mathfrak{C}$ une catégorie inductive au-dessus de $\mathfrak{C}'$ telle que le foncteur projection π soit biunivoque sur $\pi(\mathfrak{C})$. Alors $\pi(\mathfrak{C})$ est une sous-catégorie inductive faible de $\mathfrak{C}'$. Si $\mathfrak{C}$ est suprarégulière au-dessus de $\mathfrak{C}'$, alors $\pi(\mathfrak{C})$ est une sous-catégorie inductive régulière faible. Si $\mathfrak{C}$ est complet au-dessus de $\mathfrak{C}'$, alors $\pi(\mathfrak{C})$ est une sous-catégorie inductive de $\mathfrak{C}'$. Si $\mathfrak{C}$ est étalé au-dessus de $\mathfrak{C}'$, alors $\pi(\mathfrak{C})$ est saturé par induction.

Une catégorie $\mathfrak{C}$ étalée et complète au-dessus de $\mathfrak{C}'$ généralise la notion de faisceau d'ensembles : Si $\mathfrak{C}$ se réduit à la classe des unités $\mathfrak{C}_0$, alors $\mathfrak{C}_0$ peut s'appeler un faisceau de structures au-dessus de $\mathfrak{C}'_0$. En ajoutant des structures algébriques supplémentaires dans $\mathfrak{C}$, on peut généraliser la notion de faisceau (d'ensembles munis de structures algébriques).

6. — Jets locaux.

PROPOSITION. — *Soit $\mathfrak{C}$ une catégorie inductive suprarégulière au-dessus de $\mathfrak{C}'$, π le foncteur projection. La classe $\Theta(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'_0)$ des triplets (e', h, e), où $h \in \mathfrak{C}$, $e \in \mathfrak{C}'_0$, $e' \in \mathfrak{C}'_0$, $e \prec \alpha(\pi(h))$, $e' \prec \beta(\pi(h))$, $e \prec \alpha(\pi(s'h))$, $e' \prec \beta(\pi(hs))$ pour tout $s \prec \alpha(h)$ et tout $s' \prec \beta(h)$ tels que $e \prec \pi(s)$, $e' \prec \pi(s')$, est une catégorie inductive lorsqu'on la munit de la loi de composition: $(e'', h', e'_1)(e', h, e) = (e'', h'h, e)$, si et seulement si $e' = e'_1$ et $\alpha(h') = \beta(h)$, et de la loi d'induction :*

$$(e'_1, h_1, e_1) \prec (e', h, e) \quad \textit{si et seulement si} \quad e_1 = e,\ e'_1 = e',\ h_1 \prec h.$$

Les unités sont les triplets (e, s, e), où $e \prec \pi(s)$, $s \in \mathfrak{C}_0$. Le groupoïde inductif privilégié dans $\Theta(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'_0)$ est la classe des triplets (e', f, e), où $f \in \mathfrak{S}$, $e' = \beta(g)$, où $g \in \mathfrak{S}'$, $g \prec \pi(f)$, $\alpha(g) = e$.

La catégorie $\mathfrak{C}$ s'identifie à une sous-catégorie de $\Theta(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'_0)$ par $h \to (\pi(\beta(h)), h, \pi(\alpha(h)))$. Si $\mathfrak{C}$ est étalé au-dessus de $\mathfrak{C}'$, la catégorie $\Theta(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'_0)$ est une catégorie inductive au-dessus de $\Theta(\mathfrak{C}', \mathfrak{C}'_0)$, le foncteur projection étant : $(e', h, e) \to (e', \pi(h), e)$.

Dans $\Theta(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'_0)$, nous considérons la relation d'équivalence ρ suivante :

$(e', h, e) \sim (e'_1, h_1, e_1)$ si et seulement si $e = e_1$, $e' = e'_1$, $e \prec \alpha(\pi(h \cap h_1))$, $e' \prec \pi(\beta(h \cap h_1))$.

ρ est effectivement une relation d'équivalence : $e \prec \pi(\alpha(h \cap h_1))$ et $e \prec \pi(\alpha(h_1 \cap h_2)$ entraînent $e \prec \pi(\alpha(h \cap h_2))$, car $(h \cap h_1) \cap (h_1 \cap h_2) \prec h \cap h_2$ et comme $h \cap h_1$ et $h_1 \cap h_2$ sont induits par h_1, on a :

$$\pi((h \cap h_1) \cap (h_1 \cap h_2)) = \pi(h \cap h_1) \cap \pi(h_1 \cap h_2)).$$

Si $(e', h, e) \sim (e', h_1, e)$ et $(e'_1, l, e_1) \sim (e'_1, l_1, e_1)$ et si de plus h et l sont majorés dans $\mathfrak{C}$, alors $(e' \cap e'_1, h \cap l, e \cap e_1) \sim (e' \cap e'_1,$

$h_1 \cap l_1$, $e \cap e_1)$. Si A est une famille d'éléments (e'_i, h_i, e_i) majorée dans $\Theta(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'_0)$ et si $(e'_i, h_i, e_i) \sim (e'_i, l_i, e_i)$, alors $\cup A \sim \cup B$, où B est la famille d'éléments (e'_i, l_i, e_i).

La relation d'équivalence ρ *est compatible avec la multiplication dans* $\Theta(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'_0)$. *Par passage au quotient, on en déduit une multiplication dans la classe* $\mathfrak{J}'$ *dont les éléments sont les classes d'équivalence suivant* ρ. Désignons par ${}_{e'}j_e h$ la classe d'équivalence de (e', h, e). Alors la multiplication dans $\mathfrak{J}'$ est définie par :

$$(1) \quad ({}_{e''}j_{e'}h')\,({}_{e'}j_e h) = {}_{e''}j_e(h'h), \qquad \text{où} \qquad \alpha(h') = \beta(h).$$

Pour cette multiplication $\mathfrak{J}'$ est une catégorie : l'unité à droite ou *source* de ${}_{e'}j_e h$ est ${}_e j_e \alpha(h)$, son unité à gauche ou *but* est ${}_{e'}j_{e'}\beta(h)$. Une unité quelconque ${}_e j_e s$, où $s \in \mathfrak{C}_0$, $e \prec \pi(s)$, sera appelée *germe de structure* au-dessus de $\mathfrak{C}'$. Un élément de $\mathfrak{J}'$ sera appelé *jet local* de $\mathfrak{C}$ au-dessus de $\mathfrak{C}'$.

Le jet local ${}_{e'}j_e h$ est aussi le filtre le plus fin dans $\Theta\,(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'_0)$ possédant les propriétés suivantes : il contient (e', h, e) et le foncteur $(e', l, e) \to \pi(l)$ de $\Theta\,(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'_0)$ vers $\mathfrak{C}'$ l'applique dans le filtre η engendré par les éléments $h' \prec \pi(h)$ tels que $e \prec \alpha(h')$, $e' \prec \beta(h')$. Remarquons que l'application ${}_{e'}j_e h \to \eta$ n'est pas un foncteur.

Soit $h \in \mathfrak{C}$ tel qu'il existe $g \in \mathfrak{C}'$ où $g \prec \pi(h)$, $\alpha(g) = e$, $\beta(g) = e'$. Les jets locaux ${}_{e'}j_e h$ correspondants forment une sous-classe $\mathfrak{J}$ de $\mathfrak{J}'$. $\mathfrak{J}$ est une sous-catégorie de $\mathfrak{J}'$ contenant tous les germes de structures au-dessus de $\mathfrak{C}'$. Le filtre η correspondant à ${}_{e'}j_e h$ est alors le filtre $[g]$ engendré dans $\mathfrak{C}'$ par g. L'application : ${}_{e'}j_e h \to g$ est un foncteur.

Proposition. — *$\mathfrak{J}'$ est une catégorie inductive régulière pour la loi d'induction suivante :*

${}_{e'_1}j_{e_1}h_1 \prec {}_{e'}j_e h$ si et seulement si $e'_1 \prec e'$, $e_1 \prec e$ et ${}_{e'_1}j_{e_1}h_1 = {}_{e'_1}j_{e_1}h$.

Le groupoïde inductif privilégié dans $\mathfrak{J}'$ est le groupoïde dont les éléments sont les jets ${}_{e'}j_e f$, où $f \in \mathfrak{S}$, $e' = \beta(\pi(f)e)$, où $\pi(f)e$ est l'élément de $\mathfrak{S}'$ induit par $\pi(f)$ sur e.

$\mathfrak{J}$ est une sous-catégorie inductive de $\mathfrak{J}'$. De plus la formule (1) est aussi valable plus généralement lorsque la condition $\alpha(h') = \beta(h)$ est remplacée par ${}_{e'}j_{e'}\alpha(h') = {}_{e'}j_{e'}\beta(h)$ en considérant $h'h$ comme un pseudoproduit.

PROPOSITION. — *Si $\mathfrak{C}$ est suprarégulier au-dessus de $\mathfrak{C}'$, alors $\mathfrak{J}$ est une catégorie inductive étalée au-dessus de $\mathfrak{C}'$.*

PROPOSITION. — *Si $\mathfrak{C}$ est suprarégulier au-dessus de $\mathfrak{C}'$ normal, la catégorie $\mathfrak{J}_{(\mathfrak{C},\mathfrak{C}')}$ des jets locaux de $\mathfrak{C}$ au-dessus de $\mathfrak{C}'$ est une catégorie inductive étalée au-dessus de $\mathfrak{J}_{(\mathfrak{T}(\mathfrak{C}'),\mathfrak{C}')}$, le foncteur projection étant: ${}_{e'}j_e h \to {}_{e'}j_e \tau(h)$, où τ est le foncteur qui étale $\mathfrak{C}$ au-dessus de $\mathfrak{T}(\mathfrak{C}')$.*

La catégorie $\mathfrak{C}$ s'identifie avec une sous-catégorie $[\mathfrak{C}]$ de $\mathfrak{J}_{(\mathfrak{C},\mathfrak{C}')}$, en identifiant $h \in \mathfrak{C}$ avec $[h] = {}_{e'}j_e h$, où $e = \pi(\alpha(h))$, $e' = \pi(\beta(h))$; la loi d'induction dans $\mathfrak{C}$ correspond à la restriction à $[\mathfrak{C}]$ de la loi d'induction dans $\mathfrak{J}_{(\mathfrak{C},\mathfrak{C}')}$. L'intersection de deux éléments de $[\mathfrak{C}]$ appartient à $[\mathfrak{C}]$: $[h] \cap [h'] = [h \cap h']$. L'agrégat d'une partie de $[\mathfrak{C}]$ majorée dans $\mathfrak{J}_{(\mathfrak{C},\mathfrak{C}')}$ appartient à $[\mathfrak{C}]$. Tout élément de $\mathfrak{J}_{(\mathfrak{C},\mathfrak{C}')}$ est induit par un élément de $[\mathfrak{C}]$. Nous exprimons ces trois dernières propriétés en disant que $[\mathfrak{C}]$ est une *paratopologie* sur $\mathfrak{J}_{(\mathfrak{C},\mathfrak{C}')}$.

7. — Catégories inductives au-dessus de la catégorie des applications.

Soit $\tilde{\mathfrak{C}}$ la catégorie inductive des applications d'un ensemble quelconque dans un ensemble quelconque, le sous-groupoïde inductif priviligié étant $\mathfrak{C}$. Une sous-catégorie inductive (faible) de $\tilde{\mathfrak{C}}$ sera appelée catégorie inductive (faible) d'applications.

Soit $\mathfrak{C}$ une catégorie inductive suprarégulière au-dessus de $\tilde{\mathfrak{C}}$, π le foncteur projection de $\mathfrak{C}$ vers $\tilde{\mathfrak{C}}$, $\mathfrak{S}$ la classe des éléments inversibles. Soit $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$ la sous-catégorie de $\mathfrak{J}_{(\mathfrak{C},\tilde{\mathfrak{C}})}$, formée des *jets locaux* « *atomiques* » de la forme ${}_{x'}j_x f$, où $f \in \mathfrak{C}$, où x est un point de $\pi(\alpha(f))$, $x' = \pi(f)(x)$; un tel jet sera désigné par $j_x^\lambda f$. Soit $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C}_0)$ la classe de ses unités ou *germes structuraux* « *atomiques* ». $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{S})$ s'identifie avec le groupoïde des éléments inversibles de $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$.

L'image $\hat{f}$ de $\alpha(\pi(f))$ par l'application $j^\lambda f\colon x \to j_x^\lambda f$ sera appelée *ouvert élémentaire* de $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$. L'intersection de deux ouverts élémentaires est un ouvert élémentaire. Les réunions quelconques d'ouverts élémentaires sont les ouverts d'une « métatopologie » sur $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$, c'est-à-dire d'une structure définie

sur la classe $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$ par la donnée d'une famille de parties vérifiant les axiomes des ouverts d'une topologie. $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$ devient alors une catégorie topologique [2]. $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{S})$ est un ouvert de $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$. Si $\mathfrak{S}'$ est un sous-pseudogroupe de $\mathfrak{S}$, alors $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{S}')$ est un sous-groupoïde ouvert de $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$. Inversement un sous-groupoïde ouvert G de $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{S})$ détermine le sous-pseudogroupe $\mathfrak{S}'$ dont les éléments sont les éléments f de $\mathfrak{S}$ tels que $\hat{f} \subset G$; tout sous-pseudogroupe $\mathfrak{S}''$ de $\mathfrak{S}$ tel que $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{S}'') = G$ est un sous-pseudogroupe de $\mathfrak{S}'$. Les éléments de $\mathfrak{S}$ correspondent d'une façon biunivoque aux ouverts élémentaires de $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{S})$. Un élément f de $\mathfrak{C}$ peut s'identifier au couple $(U', \hat{f})$, où U' est un ouvert élémentaire de $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$ contenant $\beta(\hat{f})$. Plus généralement on montre que $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$ détermine complètement $\mathfrak{J}(\mathfrak{C}, \tilde{\mathfrak{C}})$.

L'application α étale l'espace topologique $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$ au-dessus de $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C}_0)$. L'application β est une application continue de $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$ dans $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C}_0)$. Les applications α et β sont ici les applications source et but dans $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$.

Soit $\mathfrak{T}$ la catégorie $\mathfrak{T}(\tilde{\mathfrak{C}})$ dont les objets sont les topologies. Alors $\mathfrak{C}$ est étalé au-dessus de $\mathfrak{T}$ par le foncteur τ. Désignons $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{T})$ par $\mathfrak{J}^\lambda$, $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{T}_0)$ par $\mathfrak{J}^\lambda_0$ qui est la classe des germes de topologies, ces classes étant munies des métatopologies définies ci-dessus. Alors on a :

Proposition. — *La restriction $\hat{\tau}$ à $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$ du foncteur qui étale $\mathfrak{J}(\mathfrak{C}, \tilde{\mathfrak{C}})$ au-dessus de $\mathfrak{J}(\mathfrak{T}, \tilde{\mathfrak{C}})$ étale l'espace topologique $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$ au-dessus de $\mathfrak{J}^\lambda$ et de même $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C}_0)$ au-dessus de $\mathfrak{J}^\lambda_0$. L'application $\hat{\tau}$ est : $j^\lambda_x f \to j^\lambda_x \tau(f)$, où $f \in \mathfrak{C}$.*

Le procédé d'élargissement d'une espèce de structures [1] conduit à munir $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$ d'une métastructure de l'espèce $\mathfrak{C}_0$ élargie; nous considérons $\mathfrak{C}_0$ comme une espèce de structures au-dessus de $\tilde{\mathfrak{C}}$ (pour laquelle $\mathfrak{C}$ est une catégorie inductive d'homomorphismes au-dessus de $\tilde{\mathfrak{C}}$). Le couple $(j^\lambda f, s)$, où $s \in \mathfrak{C}_0$, $f \in \mathfrak{C}$, est une *carte locale élémentaire* de $\mathfrak{C}_0$ sur l'ouvert élémentaire $\hat{f}$ de $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$. Étant donnée une deuxième carte locale $(j^\lambda g, s')$, le changement de carte est le triplet $(\sigma, \varepsilon, \sigma)$, où $\sigma = \alpha(\hat{f} \cap \hat{g})$ et $\varepsilon = \pi(\sigma)$. La métastructure sur $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$ est définie par l'atlas formé par les cartes locales élémentaires. En supposant $\mathfrak{C}$ complet au-dessus de $\tilde{\mathfrak{C}}$, le couple $(j^\lambda f, s)$ définit une structure

$\hat{s}$ de l'espèce $\mathfrak{C}_0$ sur $\hat{f}$. Les structures $\hat{s}$ forment une classe de structures compatibles qui définit également la métastructure sur $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$.

En particulier, soit $\mathfrak{C}^r$ la catégorie des applications r fois continûment différentiables dont les objets sont les structures de variétés r fois continûment différentiables de classe $\mathfrak{C}_0^r$. Soit $\mathfrak{J}^{\lambda, r} = \mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C}^r)$, $\mathfrak{J}_0^{\lambda, r} = \mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C}_0^r)$ = classe des germes (atomiques) de structures r fois continûment différentiables. Alors $\mathfrak{J}^{\lambda, r}$ ainsi que $\mathfrak{J}_0^{\lambda, r}$ est muni d'une métastructure r fois continûment différentiable. Si $k \leqslant r$, $\mathfrak{C}^r$ est étalé au-dessus de $\mathfrak{C}^k$, qui est étalé au-dessus de $\mathfrak{T}$. De plus $\mathfrak{J}^{\lambda, r}$ est étalé au-dessus de $\mathfrak{J}^{\lambda, k}$, qui est étalé *au-dessus* de $\mathfrak{J}^\lambda$, ces classes étant munies des métastructures correspondantes.

Étant donné un germe de structure $\hat{x} \in \mathfrak{J}_0^{\lambda, r}$, un *repère* pour $\hat{x}$ est un jet inversible $h \in \mathfrak{J}^{\lambda, r}$ tel que $\beta(h) = \hat{x}$ et $\alpha(h)$ = germe $\hat{O}_n$ de R^n en l'origine O. Dans $\mathfrak{J}^{\lambda, r}$ on a la relation d'équivalence ρ_r: $j_x^\lambda f \sim j_x^\lambda g$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

1) $j_x^\lambda f$ et $j_x^\lambda g$ ont la même unité à droite $\hat{x}$ ainsi que la même unité à gauche $\hat{x}'$.

2) Soit h un repère pour $\hat{x}$, h' un repère pour $\hat{x}'$. Soit $h'^{-1}(j_x^\lambda f)h = j_0^\lambda \bar{f}$, où $\bar{f} \in \mathfrak{C}^r$ est une application dans R^p d'un voisinage de O relativement à R^n telle que $O = \bar{f}(O)$. Soit de même $h'^{-1}(j_x^\lambda g)h = j_0^\lambda \bar{g}$. Alors $\bar{f} - \bar{g}$ est une fonction définie dans un voisinage de O telle que toutes ses dérivées partielles d'ordre $\leqslant r$ soient nulles.

La classe d'équivalence de $j_x^\lambda f$ suivant ρ_r sera désignée par $j_x^r f$ et s'appellera un *jet infinitésimal d'ordre r de $\hat{x}$ vers $\hat{x}'$*. La relation d'équivalence ρ_r est compatible avec la multiplication dans $\mathfrak{J}^{\lambda, r}$; la classe $\mathfrak{J}^r$ des jets infinitésimaux d'ordre r est une catégorie admettant encore $\mathfrak{J}_0^{\lambda, r}$ comme classe d'objets. Soit Π^r le groupoïde des éléments inversibles de $\mathfrak{J}^r$.

Les catégories $\mathfrak{J}^r$ sont les catégories fondamentales de la géométrie différentielle. Une classe d'éléments infinitésimaux d'ordre r (ou d'*objets géométriques d'ordre r*) est une classe $\mathfrak{M}$ admettant Π^r comme groupoïde d'opérateurs, plus généralement admettant $\mathfrak{J}^r$ ou une de ses sous-catégories comme catégorie d'opérateurs. Soit $\mathfrak{M}'$ une classe d'éléments infinitésimaux d'ordre k, par rapport à Π^k, où $k \leqslant r$. Une *application*

covariante de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{M}'$ est une application γ de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{M}'$ telle que :

$$\gamma(Xz) = (j^k X)\gamma(z),$$

où $X \in \Pi^r$, $j^k X$ l'élément de Π^k qui se déduit de X par le foncteur canonique j^k de Π^r sur Π^k; l'élément $\gamma(z)$ est appelé *covariant différentiel* de z.

Ces notions conduisent à une théorie générale des prolongements d'ordre r d'une variété différentiable ainsi que des structures infinitésimales définies par des sections de ces prolongements (voir les références dans [3]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Ehresmann, Gattungen von lokalen Strukturen (*Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung*, 60, 1957, p. 49-77).

[2] Catégories topologiques et catégories différentiables (*Colloque Geométrie Différentielle Globale*, Bruxelles, 1958 CBRM).

[3] Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudogroupes de Lie (*Colloque Int. de Géométrie diff. de Strasbourg, C.N.R.S.*, 1953).

[4] Grupoides diferenciables y pseudogrupos de Lie (*Revista Union Mat. Argentina*, 1960, vol XIX, p. 48).

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
10 (1960), 333-344.

LE THÉORÈME DE REPRÉSENTATION INTÉGRALE DANS LES ENSEMBLES CONVEXES COMPACTS

par Gustave CHOQUET (Paris).

Dans un travail antérieur (1), nous avons démontré le théorème suivant :

Soit $\mathfrak{V}$ un espace vectoriel séparé localement convexe, $\mathfrak{B}$ une partie convexe compacte de $\mathfrak{V}$, et $\mathcal{E}$ l'ensemble des points extrémaux de $\mathfrak{B}$. Alors si $\mathfrak{B}$ est métrisable, $\mathcal{E}$ est un G_δ de $\mathfrak{B}$, et tout point de $\mathfrak{B}$ est barycentre d'au moins une mesure de Radon positive portée par $\mathcal{E}$.

Récemment (2) Errett Bishop et Karel de Leeuw, en utilisant une idée nouvelle fort intéressante, ont pu simplifier notre démonstration et étendre le théorème, sous une forme atténuée, au cas où $\mathfrak{B}$ n'est pas métrisable :

Tout point de $\mathfrak{B}$ est alors barycentre d'une mesure de Radon positive sur $\mathfrak{B}$, pseudo-portée par $\mathcal{E}$ en ce sens qu'elle ne charge aucun compact de Baire [1] disjoint de $\mathcal{E}$; et il existe des cas où l'expression « pseudo-portée » ne peut être remplacée par « portée ».

L'utilisation fréquente, en analyse, du théorème de représentation intégrale, en rend souhaitable pour l'enseignement une démonstration simple. Nous allons ici reprendre la méthode de Bishop et de Leeuw; nous la simplifierons, notamment en supposant dès le départ que $\mathfrak{B}$ est métrisable; d'autre part nous n'utiliserons pas comme eux l'inégalité de Schwartz;

[1] Un compact de Baire dans $\mathfrak{B}$ est un compact de $\mathfrak{B}$ qui a, dans $\mathfrak{B}$, une base dénombrable de voisinages, autrement dit qui est un G_δ.

pour cela nous remplacerons leurs fonctions f^2 (où f est linéaire) par des fonctions convexes quelconques, plus maniables.

Dans une seconde et dans une troisième partie, nous reviendrons sur quelques points de leur travail pour en préciser la portée; cet examen nous amènera à poser quelques problèmes.

I. — LE THÉORÈME DE REPRÉSENTATION INTÉGRALE

Les outils que nous utiliseront sont :

1) Lemme de Zorn sur les ensembles ordonnés inductifs.

2) Théorème élémentaire des sections ([2]) : Soit E topologique séparé et réunion dénombrable de compacts métrisables, et soit f une application continue de E sur F topologique séparé; alors il existe une application g de 1re classe ([3]) de F dans E telle que $f \circ g =$ identité.

3) Intégration des mesures : Soient A et B deux espaces compacts, et φ une application faiblement continue de A dans l'espace $\mathcal{M}^+(B)$ des mesures de Radon positives sur B. Nous supposons connue la définition et les propriétés élémentaires de $\int \varphi d\mu$, où μ est une mesure de Radon positive sur A.

Notations. — $\mathcal{V}$, espace vectoriel topologique (sur R), séparé et localement convexe.

$\mathcal{B}$, partie convexe compacte de $\mathcal{V}$.

$\mathcal{E}$, ensemble des points extrémaux de $\mathcal{B}$.

$\mathcal{M}^+$ (resp. $\mathcal{M}^1$), l'ensemble des mesures de Radon positives sur $\mathcal{B}$ (resp. positives et de norme 1).

$\mathcal{A}$, ensemble des fonctions affines continues sur $\mathcal{V}$ (linéaires + C^{te}).

([2]) En vue de l'enseignement, en voici une démonstration simple.

L'ensemble triadique de Cantor A est homéomorphe à $\{0,1\}^{\aleph_0}$, donc aussi à $(\{0,1\}^{\aleph_0})^{\aleph_0}$; donc A est homéomorphe à $A^{\aleph_0}$. Comme $[0,1]$ est image continue de A, il en est alors de même de $[0,1]^{\aleph_0}$. Comme tout espace compact métrisable est plongeable dans $[0,1]^{\aleph_0}$ un tel espace est image continue d'une partie fermée de A.

Il en résulte aussitôt que l'espace E de l'énoncé est image continue d'un fermé de R^+ : $E = \varphi(B)$ avec φ continue et B fermé $\subset R^+$.

Posons $h = f \circ \varphi$ et, pour tout $x \in F$, posons $k(x) = inf.\ ((h^{-1}(x))$; l'application k de F dans R^+ est semi-continue inférieurement, donc de 1re classe. L'application $g = \varphi \circ k$ de F dans E est la section cherchée.

([3]) C'est-à-dire que $g^{-1}(\omega)$ est un F_σ pour tout ouvert ω de E.

$\mathcal{C}$, ensemble des fonctions convexes continues et positives sur $\mathcal{B}$.

Nous noterons partout par $X \setminus Y$ l'ensemble $X \cap \complement Y$.

Relation d'ordre sur $\mathcal{M}^+$.

Soient $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}^+$; on dira que μ_2 majore μ_1, ce qui se notera $\mu_1 \prec \mu_2$, si :

1) $\int f d\mu_1 = \int f d\mu_2$ pour toute $f \in \mathcal{A}$

(Cette condition revient à dire que μ_1 et μ_2 ont même masse totale et même barycentre.)

2) $\int f d\mu_1 \leqslant \int f d\mu_2$ pour toute $f \in \mathcal{C}$.

La reflexivité et la transitivité de la relation sont évidentes; d'autre part si $\mu_1 \prec \mu_2$ et $\mu_2 \prec \mu_1$, on a :

$\int f d\mu_1 = \int f d\mu_2$ pour toute $f \in \mathcal{C}$ d'où [4] $\mu_1 = \mu_2$.

Donc cette relation est bien une relation d'ordre.

Lemme 1. — *L'ensemble $\mathcal{M}^+$ ainsi ordonné est inductif.*

En effet, soit X une partie totalement ordonnée de $\mathcal{M}^+$; toutes les $\mu \in X$ ont même masse totale, donc X est relativement compact. Soit μ_0 une valeur d'adhérence de X suivant le filtre des sections finissantes de X.

Évidemment $\int f d\mu = \int f d\mu_0$ pour toute $f \in \mathcal{A}$ et toute $\mu \in X$.

D'autre part, pour toute $f \in \mathcal{C}$, les $\int f d\mu$ convergent en croissant vers $\int f d\mu_0$, d'où :

$$\int f d\mu \leqslant \int f d\mu_0 \text{ pour toute } f \in \mathcal{C} \text{ et toute } \mu \in X.$$

Donc μ_0 majore bien X. La démonstration montre en outre l'*unicité* de μ_0.

Du lemme 1 et du lemme de Zorn résulte aussitôt l'énoncé suivant :

Corollaire 1. — *Toute $\nu \in \mathcal{M}^+$ est majorée par une mesure maximale.*

Ce corollaire s'applique en particulier aux mesures ponctuelles ε_x (où $x \in \mathcal{B}$), d'où :

(4) $\mathcal{A}$ sépare les points de $\mathcal{B}$ donc (Stone-Weierstrass) les polynômes par rapport aux éléments de $\mathcal{A}$ forment un ensemble total dans $C(\mathcal{B})$; or un tel polynôme est différence de deux fonctions convexes positives; donc $\mathcal{C}$ est total dans $C(\mathcal{B})$, d'où la propriété.

Corollaire 2. — *Tout point x de $\mathcal{B}$ est barycentre d'une mesure positive maximale de masse totale* 1.

Lemme 2. — *La relation $\prec$ sur $\mathcal{M}^+$ est compatible avec l'addition.*

C'est évident pour l'addition d'un nombre fini de mesures. On en déduit plus généralement que :

$$(\nu_a \prec \nu'_a \text{ pour tout } a \in \mathrm{K}) \Longrightarrow \left(\int \nu(a) d\pi_a \prec \int \nu'(a) d\pi_a\right),$$

où $a \to \nu(a)$ et $a \to \nu'(a)$ sont des applications continues (ce qui suffira ici) d'un espace compact K dans $\mathcal{M}^+$, et où π est une mesure positive sur K.

Lemme 3. — *Soient μ et $\nu \in \mathcal{M}^+$, avec $\mu \leqslant \nu$. Si ν est maximale, μ l'est aussi.*

En effet, posons $\nu = \mu + \pi$. S'il existait $\mu' \neq \mu$ tel que $\mu \prec \mu'$, on aurait $\nu \neq \mu' + \pi$ et $\nu \prec \mu' + \pi$, donc ν ne serait pas maximale.

Lemme 4. — *Pour tout $x \in \mathcal{B}$ et toute $\mu \in \mathcal{M}^1$ de barycentre x, on a : $\varepsilon_x \prec \mu$.*

On sait déjà que $\int f d\varepsilon_x = \int f d\mu$ pour toute $f \in \mathrm{A}$. D'autre part on a :

$\int f d\varepsilon_x \leqslant \int f d\mu$ pour toute f convexe et continue, car cette inégalité s'écrit $f(x) \leqslant \int f d\mu$; elle est évidente si μ est discrète ; le cas général s'en déduit par continuité, puisque toute $\mu \in \mathcal{M}^1$ est limite faible de mesures discrètes de $\mathcal{M}^1$ ayant même barycentre.

Lemme 5. — *Lorsque $\mathcal{B}$ est métrisable, $\mathcal{E}$ est un G_δ et toute mesure maximale de $\mathcal{M}^+$ est portée par $\mathcal{E}$.*

Démonstration. — 1) Soit Δ la diagonale de $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$, et soit φ l'application $(x_1, x_2) \to (x_1 + x_2)/2$, de $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}$.

Comme $\mathcal{B}$ est métrisable, $(\mathcal{B}^2 \setminus \Delta)$ est un K_σ ; donc $\varphi(\mathcal{B}^2 \setminus \Delta)$ est aussi un K_σ ; or ce n'est autre que l'ensemble des points non extrémaux de $\mathcal{B}$. Son complémentaire $\mathcal{E}$ est donc un G_δ.

2) Soit ψ_0 un relèvement de 1re classe de l'application φ de $(\mathcal{B}^2 \setminus \Delta)$ sur $(\mathcal{B} \setminus \Delta)$ (théorème des sections rappelé au début).

L'application h : $(x_1, x_2) \to (\varepsilon_{x_1} + \varepsilon_{x_2})/2$ de $\mathcal{B}^2$ dans $\mathcal{M}^1$ est

une homéomorphie; donc $\psi = h \circ \psi_0$ est une application de 1re classe de $(\mathcal{B} \setminus \mathcal{E})$ dans $\mathcal{M}^1$ telle que pour tout $x \in (\mathcal{B} \setminus \mathcal{E})$ on ait :

$$\psi(x) \neq \varepsilon_x \quad \text{et} \quad x = (\text{barycentre de } \psi(x))$$

3) Soit $\mu \in \mathcal{M}^1$, où μ n'est pas portée par $\mathcal{E}$; on va montrer que μ n'est pas maximale. Il suffira de montrer pour cela qu'il existe une $\nu \leqslant \mu$ qui n'est pas maximale (lemme 3).

Comme $\mathcal{E}$ est μ-mesurable il existe (théorème de Lusin) un compact K de $(\mathcal{B} \setminus \mathcal{E})$ tel que $\mu(K) \neq 0$ et tel que la restriction de ψ à K soit continue.

Désignons par ν la partie de μ portée par K. Pour toute $f \in \mathcal{C}$ et tout $a \in K$, on sait (lemme 4) que

$$\int f \, d\varepsilon_a \leqslant \int f \, d\psi(a).$$

Soit x_0 un point du *support fermé de* ν; comme $\psi(x_0) \neq \varepsilon_{x_0}$, il existe une $f_0 \in \mathcal{C}$ pour laquelle

$$\int f_0 \, d\varepsilon_a < \int f_0 \, d\psi(a) \quad \text{pour} \quad a = x_0.$$

Comme les deux membres sont des fonctions continues de a sur K, on a la même inégalité stricte pour tout point a de K assez voisin de x_0; on a donc :

$$\int \left(\int f_0 \, d\varepsilon_a \right) d\nu_a < \int \left(\int f_0 \, d\psi(a) \right) d\nu_a$$

ou encore

$$\int f_0 \, d\nu < \int f_0 \, d\nu' \quad \text{où} \quad \nu' = \int \psi(a) \, d\nu_a.$$

On a donc $\nu \neq \nu'$; et comme $\nu \prec \nu'$ (lemme 2), ν n'est pas maximale.

Théorème. — *Soit $\mathcal{B}$ convexe compact métrisable dans $\mathcal{V}$ (e.v.t. séparé loc. convexe).*

L'ensemble $\mathcal{E}$ des points extrémaux de $\mathcal{B}$ est un G_δ et tout point de $\mathcal{B}$ est barycentre d'au moins une mesure de Radon $\geqslant 0$ portée par $\mathcal{E}$.

Ce théorème est la conséquence immédiate du lemme 5 et du corollaire 2 du lemme 1.

Quelques propriétés des éléments maximaux de $\mathcal{M}^1$.

1) Le corollaire 1 du lemme 1 montre que toute $\mu \in \mathcal{M}^1$ est majorée par une mesure maximale; nous allons préciser cet énoncé *lorsque $\mathcal{B}$ est métrisable* (donc aussi $\mathcal{M}^1$).

Soient X_1, X_2 deux espaces identiques à $\mathcal{M}^1$, et soit Δ la diagonale de $X_1 \times X_2$. Dans ce produit, l'ensemble A des couples (μ_1, μ_2) tels que $\mu_1 \prec \mu_2$ est évidemment fermé; la projection de $(A \setminus \Delta)$ sur X_1 n'est autre que l'ensemble des μ non maximales de $\mathcal{M}^1$; cet ensemble est donc un K_σ; autrement dit l'*ensemble des éléments maximaux de* $\mathcal{M}^1$ *est un* G_δ (même résultat dans $\mathcal{M}^+$).

Il en résulte que dans $X_1 \times X_2$, l'ensemble B des (μ_1, μ_2) de A avec μ_2 extrémale est un G_δ; or d'après le corollaire 1 du lemme 1, la projection de B dans X_1 est X_1; on peut donc relever cette projection en une application « analytique » [5] (donc universellement mesurable) $\mu \to \varphi(\mu)$ de $\mathcal{M}^1$ dans lui-même telle que pour toute μ on ait

$$\mu \prec \varphi(\mu), \qquad \text{avec} \qquad \varphi(\mu) \text{ maximale.}$$

2) Supposons encore $\mathcal{B}$ métrisable; soit f une application universellement mesurable de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{M}^1$ telle que, pour tout $x \in \mathcal{B}$, $f(x)$ ait pour barycentre x.

Soit T l'application de $\mathcal{M}^1$ dans lui-même définie par :

$$\mu \to \int f(x)\, d\mu_x$$

On dit que T est la *diffusion* associée à f; on a évidemment $\mu \prec T_\mu$.

Si en outre $f(x) \neq \varepsilon_x$ pour tout $x \notin \mathcal{E}$, le même raisonnement que celui du lemme 5 montre que :

$$(\mu = T_\mu) \iff (\mu \text{ est portée par } \mathcal{E})$$

Or soit $\mu \in \mathcal{M}^+$; la suite $\mu_x = T^n_{\mu_0}$ est croissante pour la relation $\prec$ et converge vers une mesure μ_ω. Des exemples simples [6] montrent que l'on peut avoir $\mu_\omega \neq T_{\mu_\omega}$.

On définit alors μ_α par récurrence transfinie pour tout ordinal α de 2e classe par les conditions :

$$\mu_{\alpha+1} = T_{\mu_\alpha} \quad \text{et} \quad \mu_\beta = \lim \mu_{\beta_n} \quad \text{si } \beta = \text{limite croissante des } \beta_n.$$

Comme $\mathcal{B}$ est métrisable, il existe une partie dénombrable de $\mathcal{C}$ qui est totale dans $C(\mathcal{B})$; il en résulte que toute partie

[5] Une application f de E dans F est dite ici « analytique » si pour tout ouvert ω de F, $f^{-1}(\omega)$ appartient au corps borelien engendré par les ensembles analytiques de E.

[6] Prendre $\mathcal{B} = [0,2]$ et T telle que : Support de $T\varepsilon_x \subset]0,1[$ pour tout $x \in]0,1[$.

totalement ordonnée de $\mathcal{M}^1$ (pour l'ordre $\prec$) est cofinale à une suite dénombrable. En particulier *il existe un ordinal α de* 2^e *classe tel que* $\mu_\alpha = T_{\mu_\alpha}$, *c'est-à-dire tel que* μ_α *soit portée par* $\mathcal{E}$ Cet α dépend en général de μ_0.

Problèmes.

1) Supposons $\mathcal{B}$ métrisable. Est-ce que $(\mu_1 \prec \mu_2)$ entraine que μ_2 soit l'image de μ_1 par une diffusion du type défini plus haut?

2) Supposons $\mathcal{B}$ métrisable. Est-ce que toute μ positive portée par $\mathcal{E}$ est maximale? (On se ramène aisément à ceci : Montrer que si μ_1 et μ_2 sont étrangères et portées par $\mathcal{E}$, $(\mu_1 \prec \mu_2)$ entraîne $(\mu_1 = \mu_2)$).

3) Soit $\mathcal{B}$ quelconque. Est-ce que la somme de deux mesures maximales l'est aussi? Plus généralement est-ce qu'une intégrale $\int \mu(a)\, d\nu_a$ de mesures $\mu(a)$ maximales est maximale? (si $\nu \geqslant 0$).

Les relations entre ces trois problèmes sont évidentes.

II. — SUR L'ESPACE DUAL D'UN ESPACE VECTORIEL DE FONCTIONS CONTINUES SUR UN COMPACT

Le point de départ de Bishop et de Leeuw est l'étude du dual d'un espace vectoriel de fonctions continues sur un espace X compact. Nous allons montrer, plus explicitement qu'ils ne le font, l'équivalence entre cette étude et celle des ensembles convexes compacts.

Soit X un espace compact; soit $C_r(X)$ l'espace vectoriel des fonctions numériques réelles continues sur X, muni de la topologie de la convergence uniforme; soit $\mathcal{M}(X)$ son dual, muni de la topologie faible.

Soit B un sous-espace vectoriel de $C_r(X)$, qui sépare les points de X et contient les constantes; et soit B^* le dual de B, muni de la topologie faible.

Soit φ l'application canonique de $\mathcal{M}(X)$ dans B^*; comme, en vertu du théorème de Hahn-Banach toute forme linéaire continue sur B est la trace d'une forme linéaire continue sur $C_r(X)$, on a $B^* = \varphi(\mathcal{M}(X))$.

On peut évidemment identifier B^* à l'espace-quotient de $\mathcal{M}(X)$ par la relation d'équivalence :

$$(\mu_1 \sim \mu_2) \qquad \text{si} \qquad \int g\, d\mu_1 = \int g\, d\mu_2 \qquad \text{pour toute} \quad g \in B.$$

(notons que $(\mu_1 \sim \mu_2) \Longrightarrow (\mu_1(X) = \mu_2(X))$).

Posons $(B^*)^+ = \varphi(\mathcal{M}^+(X))$ et $(B^*)^1 = \varphi(\mathcal{M}^1(X))$.

Comme $\mathcal{M}^+(X)$ engendre $\mathcal{M}(X)$, $(B^*)^+$ engendre B^*, et $(B^*)^1$ est une base affine compacte du cône convexe $(B^*)^+$.

Soit f l'application $x \to \varepsilon_x$ de X dans $\mathcal{M}(X)$; l'application $\varphi \circ f$ de X dans $(B^*)^1$ est continue, et biunivoque puisque B sépare les points de X; comme X est compact, c'est donc une homéomorphie.

Disons, avec Bishop et de Leeuw, qu'un point x de X est *frontière* si pour toute $\mu \in \mathcal{M}^+(X)$ telle que $\mu \sim \varepsilon_x$ (ce qui entraîne $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$), on a : $\mu = \varepsilon_x$.

On désignera par M(B) l'ensemble des points frontière de X et par $\mathcal{E}$ l'ensemble des points extrémaux de $(B^*)^+$.

Théorème. — *On a* : $f(M(B)) = \mathcal{M}^+ \cap \varphi^{-1}(\mathcal{E})$.

Autrement dit, les mesures positives μ sur X, dont l'image $\varphi(\mu)$ est extrémale dans $(B^*)^1$ sont les mesures ε_x, où x est frontière. En effet :

a) $(\mu \in \mathcal{M}^+$ et $\varphi(\mu) \in \mathcal{E}) \Longrightarrow (\mu = \varepsilon_x$ où x est frontière).

D'abord μ est dans $\mathcal{M}^1(X)$; puis l'image μ' de μ par l'homéomorphie $f \circ \varphi$ de X sur $f \circ \varphi(X)$ est une mesure positive sur $(B^*)^+$, de barycentre $\varphi(\mu)$; or $\varphi(\mu)$ est extrémale, donc μ' a un support ponctuel; les supports de μ et μ' sont homéomorphes, donc μ est de la forme ε_x. Ce point x est frontière, sinon il existerait une seconde mesure $\nu \geqslant 0$, elle aussi de la forme ε_y, telle que $\varphi(\varepsilon_x) = \varphi(\varepsilon_y)$; on aurait alors $\varphi\left(\dfrac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}\right) \in \mathcal{E}$, ce qui est impossible d'après ce qu'on vient de voir.

b) Inversement, soit x un point frontière; je dis que $\varphi(\varepsilon_x) \in \mathcal{E}$. Sinon $\varphi(\varepsilon_x)$ serait milieu de deux points distincts de $(B^*)^1$, donc $\varphi(\varepsilon_x) = \varphi(\mu)$ où $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$ et $\mu \neq \varepsilon_x$; or ceci est exclus puisque x est frontière.

Conséquence. — L'application $f \circ \varphi$ plonge homéomorphiquement X dans le convexe compact $(B^*)^1$ et transforme M(B) en $\mathcal{E}$.

On se pose alors le problème suivant :

α) *Pour toute* $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$, *existe-t-il une mesure* $\nu \in \mathcal{M}^1(X)$ *telle que* $\mu \sim \nu$ (*ou encore* $\varphi(\mu) = \varphi(\nu)$) *et telle que* ν *soit portée par* $\overline{M(B)}$, *et par* $M(B)$ *en un sens plus ou moins strict.*

Remarquons que la condition $\varphi(\mu) = \varphi(\nu)$ se traduit par : $\varphi(\mu)$ est barycentre de ν', image de ν par l'homéomorphie $f \circ \varphi$. La réponse au problème α sera donc positive si la réponse au problème β suivant est positive :

β) *Soit* $\mathcal{B}$ *un ensemble convexe compact d'un e.v.t. loc. convexe séparé, et soit* $\mathcal{E}$ *l'ensemble de ses points extrémaux. Est-ce que tout point de* $\mathcal{B}$ *est barycentre d'une mesure positive* ν *de masse totale* 1, *portée par* $\overline{\mathcal{E}}$, *et par* $\mathcal{E}$ *en un sens plus ou moins strict.*

Inversement une réponse positive au problème β entraîne une réponse positive au problème α. En effet, soit B le sous-espace de $C_r(B)$ constitué par les fonctions affines continues; on a ici $\mathcal{E} = M(B)$, donc le problème β apparaît comme un cas particulier du problème α.

III. — ÉTUDE D'UN EXEMPLE

Bishop et de Leeuw démontrent que les problèmes équivalents α et β ont une réponse positive, même si X n'est pas métrisable, à condition de définir l'expression « mesure portée par $\mathcal{E}$ » dans un sens très large, que nous traduirons ici dans le langage des mesures de Radon :

Définition. — *Soit* X *un espace compact, soit* $A \subset X$, *et soit* μ *une mesure de Radon positive sur* X. *On dit que* μ *est pseudo-portée par* A *si* $\mu(K) = 0$ *pour tout compact* K *de* X *tel que*

1) $A \cap K = \emptyset$; 2) K *est un* G_δ *de* X (7).

Cette condition est plus large encore que la condition $\mu_*(\complement A) = 0$; elle est même compatible avec la relation $\mu^*(A) = 0$.

On pourrait donc être tenté de croire que le résultat de Bishop et de Leeuw n'est pas le meilleur possible. Nous allons

(7) Si X est tel que tout compact de X soit un G_δ de X, on peut alors affirmer que $\mu_*(\complement A) = 0$.

montrer qu'il n'en est rien, en utilisant un des exemples construits par ces auteurs :

Soit $X = [0,1] \times \{a, b, c\}$; l'ensemble des (t, a) sera désigné par X_a; on définit de même X_b et X_c.

La topologie de X est définie comme la moins fine des topologies telles que :

1) Toute partie de $(X_a \cup X_c)$ est ouverte.

2) Pour toute partie ouverte ω de $[0, 1]$, $\omega \times \{a, b, c\}$ est ouvert dans X.

3) Pour tout $x \in X$, $\{x\}$ est fermé.

On vérifie que X est compact, et que tout compact de $X_a \cup X_c$ est fini.

B est l'ensemble des fonctions numériques continues g sur X telles que, pour tout $t \in [0, 1]$ on ait :

$$g(t_b) = \frac{1}{2}[g(t_a) + g(t_c)].$$

On vérifie que $M(B) = X_a \cup X_c$, et que les mesures positives pseudo-portées par M(B) sont les mesures qui ne chargent aucun point de X_b; une telle mesure peut donc charger X_b; ce paradoxe apparent résulte de ce que tout compact K de X_b qui est un G_δ de X, est au plus dénombrable.

Il est immédiat que pour toute $\mu \in \mathcal{M}^+(X)$ il existe une mesure *unique* $\nu \geqslant 0$ pseudo-portée par M(B) et telle que $\nu \sim \mu$ (il résulte de là que $(B^*)^1$ est un simplexe); or la mesure de Lebesgue, par exemple, est portée par X_b et pseudo-portée par $M(B) = X_a \cup X_c$. On ne peut donc pas améliorer le résultat de Bishop et de Leeuw malgré la circonstance *a priori* favorable que M(B) est ici ouvert, donc universellement mesurable.

Problèmes.

4) Soit X un espace compact métrisable et $A \subset X$ tel que A soit un G_δ infini de X.

Existe-t-il un sous-espace B de $C_r(X)$ tel que $A = M(B)$ (lorsque A est fini, X soit être de dimension finie; les conditions de possibilité relèvent alors de la topologie algébrique).

Peut-on en outre choisir B de telle sorte que $(B^*)^1$ soit un simplexe, ce qui revient à dire que B^*, ordonné par $(B^*)^+$ soit réticulé (voir problème 5).

b) Que dire des M(B) lorsque X n'est plus métrisable.

5) Avec les notations initiales, désignons par B^* le cône convexe des $g \geqslant 0$ de B.

Pour tout élément b de B^* qui est $\geqslant 0$ sur B^+, on a : $b \in (B^*)^+$. Sinon, en effet, il existerait une forme linéaire l faiblement continue dans B^*, telle que $l(b) < 0$ et $l \geqslant 0$ sur $(B^*)^+$.

Or l est identifiable à un élément de B; dire qu'il est $\geqslant 0$ sur $(B^*)^+$ signifie encore que $\int l\,d\mu \geqslant 0$ pour toute mesure $\mu \geqslant 0$ sur X, d'où $l \in B^+$. Il est donc impossible que $l(b) < 0$.

Ordonnons B par le cône convexe B^+; ce qui précède montre que $(B^*)^+$ n'est autre que l'ensemble des formes linéaires continues et positives sur l'espace normé et ordonné B.

Il en résulte, en répétant une démonstration connue dans le cas où B est de la forme $C_r(K)$, que si B (ordonné par B^+) est réticulé, B^* (ordonné par $(B^*)^+$) est complètement réticulé.

La réciproque est fausse; en effet quand B et X sont définis comme dans l'exemple précédent ($X = [0,1] \times \{a, b, c\}$), B^* est réticulé, tandis que B ne l'est pas.

Peut-on mettre la condition « B^* est réticulé » sous la forme « B' est réticulé », où B' serait un espace vectoriel contenant B et associé à B? (C'est le cas dans l'exemple précédent).

6) Soit $\mathcal{B}$ un convexe compact non métrisable d'un e.v.t. loc. convexe séparé; et soit $\mathcal{E}$ l'ensemble de ses points extrémaux.

L'ensemble des $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathcal{B})$ qui sont pseudo-portées par $\mathcal{E}$ est un cône convexe réticulé pour son ordre propre. Donc si tout point de $\mathcal{B}$ est barycentre d'au plus une $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathcal{B})$ pseudo-portée par $\mathcal{E}$, $\mathcal{B}$ est un simplexe.

La réciproque est-elle vraie ?

Dans cet ordre d'idées on peut montrer que si $\mathcal{B}$ est un simplexe, tout point de $\mathcal{B}$ est barycentre d'au plus une $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathcal{B})$ qui soit *quasi-portée* par $\mathcal{E}$ en ce sens que $\mu(K) = 0$ pour *tout* compact K disjoint de $\mathcal{E}$. La démonstration est presque la même que celle donnée antérieurement pour les mesures *portées* par $\mathcal{E}$ (Choquet 1).

Ce résultat s'étend d'ailleurs, avec une formulation adaptée aux cônes convexes quelconques, à tout cône convexe saillant $\mathcal{C}$ tel que :

1) Toute suite décroissante d'éléments de $\mathcal{C}$ converge vers un élément de $\mathcal{C}$ (l'ordre étant celui associé à $\mathcal{C}$ canoniquement).

2) Pour tout ensemble totalement ordonné $A \subset \mathcal{C}$, il existe un sous-ensemble dénombrable de A, co-initial à A.

3) Pour tout élément extrémal δ de $\mathcal{C}$, et tout sous-cône fermé $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ ne contenant pas δ, l'enveloppe convexe fermée de $\mathcal{A}$ ne contient pas δ.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Choquet, Existence et unicité des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes, *Séminaire Bourbaki*, décembre 1956.

[2] Errett Bishop et Karel de Leeuw, The representation of linear functionals by measures on sets of extreme points. *Annales de l'Institut Fourier*, Tome 9, 1959, p. 305-331.

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
10 (1960), 345-457.

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FIBRÉS AU SENS DE KAN

par Michel ZISMAN

INTRODUCTION

Dès que la notion d'homologie singulière a été dégagée avec assez de clarté par S. Eilenberg [4], la notion d'ensemble simplicial s'est imposée peu à peu à tous les topologues. Un ensemble simplicial X n'est rien d'autre en effet, qu'une famille d'ensembles $X_n (n \geqslant 0)$ munie d'opérateurs de « faces » et de « dégénérescences » satisfaisants aux mêmes relations formelles que les opérateurs de faces et de dégénérescences définis classiquement sur l'ensemble S(X) des simplexes singuliers d'un espace topologique X. On sait que la connaissance de S(X) permet de trouver non seulement l'homologie singulière de X (par définition même de l'homologie !) mais encore les groupes d'homotopie de X. Dès lors il était intéressant d'étudier systématiquement la structure dont était doué l'ensemble S(X), abstraction faite de son origine géométrique, c'est-à-dire d'étudier les ensembles simpliciaux.

Deux faits importants venaient renforcer ce point de vue d'ordre général :

1. Il est possible de construire des ensembles simpliciaux $K(\pi, n)$ qui ont même homologie que les espaces d'Eilenberg Mac-Lane de type (π, n) (cf. [5] et [2]). $K(\pi, n)$ est un groupe simplicial auquel on peut appliquer des constructions d'origine algébrique comme la $\overline{W}$-construction ([2]).

2. Si K est le foncteur *représentation géométrique* (cf. [14]) et S le foncteur des simplexes singuliers, ces deux foncteurs sont

adjoints au sens de Kan ([11]). L'étude de l'homologie dans la catégorie des espaces topologiques et fonctions continues est donc ramenée à l'étude de l'homologie dans la catégorie des ensembles simpliciaux et applications simpliciales. C'est ce qu'on fait en particulier pour définir les opérations cohomologiques et étudier leurs propriétés (cf. [2] et [3]).

Signalons encore que l'introduction de méthodes purement algébriques étant facilitée par le contexte simplicial, plusieurs notions se trouvent simplifiées par ce point de vue, en particulier celle de décomposition de Postnikov d'un fibré [15].

* * *

Ainsi donc, le point de vus simplicial a-t-il de nombreux avantages en topologie algébrique. Malheureusement, en contre partie, la technique interne de cette théorie est beaucoup moins « souple » que la technique des espaces topologiques (par exemple, si $\Delta[n]$ est le simplexe géométrique de dimension n, et P un point de $\Delta[n]$, l'application identique $\Delta[n] \to \Delta[n]$ et l'application $\Delta[n] \to$ P sont homotopes ; mais si $\Delta[n]$ est le n-modèle de la catégorie $\mathcal{S}$ des ensembles simpliciaux, cela n'est vrai que si P est le O-ième ou le n-ième sommet de $\Delta[n]$) ; d'où de nombreuses difficultés dans la démonstration des théorèmes de base. En fait, plusieur de ces théorèmes (théorème d'extension des homotopies, existence d'une suite spectrale d'homologie des fibrés, obstruction à la construction d'une section d'un fibré...) ont été utilisés sans démonstration par de nombreux auteurs se fiant à juste titre à leur intuition mathématique. Étant donné l'importance du développement que prenait la théorie, il devenait nécessaire de revenir à la source, et de démontrer une fois pour toute tous ces théorèmes : tel a été le but de ce travail.

* * *

Le chapitre I donne des définitions élémentaires de la théorie. Il contient une démonstration simple du théorème d'extension des homotopies (théorème (2-3)) et du fait que si X est un complexe de Kan, la relation homotopie entre applications $Y \to X$ est une relation d'équivalence (théorème (2-5)). On

n'a pas donné de démonstration du fait que Hom (Y, X) est un complexe de Kan si X est un complexe de Kan, car ce résultat n'est pas utilisé dans la suite, et car il en existe une excellente démonstration dans [13].

Pour définir les groupes d'homotopie d'un complexe de Kan, on a choisi la définition originelle de D. Kan [9] mieux adaptée à la démonstration du « lemme d'addition » (3-6) que la définition de J. C. Moore [15]. (On montre l'équivalence de ces deux définitions). Le lemme d'addition signalé par S. Eilenberg dans [4], n'a semble-t-il jamais été démontré dans la littérature.

On termine [1] ce chapitre en montrant que, comme dans le cas topologique, on peut définir les groupes d'homotopie en utilisant des applications définies sur des « sphères ». Cette définition est utile pour étudier le cocycle obstruction (chapitre IV).

*
* *

Le chapitre II est un préliminaire aux chapitres III et IV. La théorie des catégories avec modèles due à S. Eilenberg et S. Mac-Lane [6] a pour but, grâce au théorème des *modèles acycliques* ($(6\text{-}1)^*$ et $(6\text{-}1)_*$) de montrer que certains foncteurs à valeurs dans la catégorie des modules différentiels gradués, ont même homologie : ainsi montre-t-on que les foncteurs chaînes singulières et chaînes singulières cubiques, chaînes singulières et chaînes singulières normalisées, etc... ont même homologie. Cette théorie a été utilisée pour résoudre un problème de suite spectrale pour la première fois par V. K. A. M. Gugenheim et J. C. Moore [12]. Il leur a fallu pour cela enrichir la structure des Catégories avec Modèles en introduisant des « fonctions de dégénérescence ». C'est cette dernière théorie qui est exposée ici. Cependant dans [12] il n'est question que d'homologie; on a donc étendu tous les résultats de [12] au cas de la cohomologie. Les démonstrations (souvent absentes dans [12]) sont complètes; elles ont été données de préférence en cohomologie, ce cas étant légèrement plus compliqué que celui de l'homologie déjà traitée dans [12].

(1) Au moment de publier ce travail, je viens de m'apercevoir que ce point de vue a déjà été développé par Barcus [16] dans un séminaire de J. C. Moore. Cependant Barcus ne donne pas explicitement de procédés pour additionner des classes d'homologie entre applications $(\dot{\Delta}[n+1], 0) \to (X, x_0)$ (cf. (4-6)).

Pour traiter divers problèmes d'homologie relative, on a introduit des sous-catégories $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ d'une catégorie donnée $\mathcal{A}$, et des catégories $\mathcal{A}_{\mathcal{I}}$ et $\mathcal{A}_{\mathcal{J}}$ qui permettent de ramener des problèmes relatifs dans $\mathcal{A}$ à des problèmes absolus dans $\mathcal{A}_{\mathcal{I}}$ ou $\mathcal{A}_{\mathcal{J}}$.

Le chapitre se termine par la démonstration d'un théorème général d'Eilenberg-Zilber en homologie et cohomologie relative à cœfficients locaux quelconques dont un cas particulier est utilisé dans le chapitre IV, et par l'illustration des rapports existant entre la théorie des coefficients locaux donnée plus haut et la théorie habituelle.

* * *

Le chapitre III est réservé à la démonstration de l'existence de suites spectrales d'homologie et de cohomologie des fibrés au sens de Kan. La méthode suivie est celles donnée dans [12] par V. K. A. M. Gugenheim et J. C. Moore.

* * *

Dans le chapitre IV, on montre que la théorie classique de l'obstruction à la construction d'une section d'un fibré (de Serre, dont la base est un C. W. complexe) est valable sans restriction pour les fibrés au sens de Kan. Comme pour de nombreuses raisons la belle théorie de Barcus [1] n'a pu être étendue au cas qui nous intéresse, il a fallu revenir à la définition initiale de N. Steenrod [18]. La définition du cocycle obstruction ne présente aucune difficulté compte tenu du chapitre I. La définition de la cochaîne différence s'est avérée au contraire relativement plus difficile. Chez N. Steenrod elle est aisée car le produit cartésien d'une n-cellule par le segment $[0, 1]$ est une $(n+1)$-cellule, alors que le produit cartésien d'un n-simplexe par un 1-simplexe n'a pas de sens. Il a donc fallu introduire le produit tensoriel des complexes normalisés de la base B du fibré et de $\Delta[1]$, et utiliser ensuite le théorème d'Eilenberg-Zilber. Notons une dernière différence entre le cas topologique et le cas simplicial : la définition du système local d'homotopie de la fibre est plus compliquée dans ce dernier cas, mais, contrairement au premier cas, si la base est connexe,

les diverses fibres ont même type d'homotopie. De même, si X est un complexe de Kan, les opérations de $\pi_1(X, x_0)$ sur $\pi_n(X, x_0)$ sont induites par des applications $X \rightarrow X$, contrairement à ce qui se passe en général dans le cas topologique.

*
* *

Je suis heureux de pouvoir exprimer ici toute ma reconnaissance à M. A. Lichnérowicz sans lequel ce travail n'aurait pas vu le jour, pour l'intérêt qu'il lui a constamment porté, pour les nombreux entretiens qu'il a bien voulu m'accorder.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER

GROUPES D'HOMOTOPIE

1. — Généralités sur les ensembles simpliciaux.

1. 1. *Définitions.* — *a.* Soit Δ la catégorie dont les *objets* forment une suite $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_n, \ldots$, où Δ_n désigne la suite des entiers $(0, \ldots, n)$ et les *morphismes* $\Delta_p \to \Delta_q$ sont les applications croissantes (au sens large). Tout morphisme s'obtient par composition des morphismes identiques $\Delta_n \to \Delta_n$, et des morphismes du type suivant :

$$\begin{aligned} \delta_i &: \quad \Delta_n \to \Delta_{n+1} \quad (0 \leqslant i \leqslant n+1), \\ \sigma_i &: \quad \Delta_{n+1} \to \Delta_n \quad (0 \leqslant i \leqslant n) \end{aligned}$$

où δ_i désigne l'application strictement croissante qui ne prend pas la valeur i, et σ_i l'application surjective qui prend deux fois la valeur i.

b. Soit $\mathcal{E}$ la catégorie des ensembles et applications ensemblistes, et $\mathcal{S}$ la catégorie des foncteurs contravariants de Δ dans $\mathcal{E}$. Soit X un *objet* de $\mathcal{S}$. On pose

$$X(\Delta_n) = X_n, \qquad X(\delta_i) = d_i, \qquad X(\sigma_i) = s_i.$$

les éléments de X_n sont appelés *n-simplexes* de X; les d_i (resp. s_i) sont les *opérateurs de faces* (resp. de *dégénérescences*) de X. Si α est un morphisme de Δ, $X(\alpha)$ sera appelé *opérateur simplicial* de X; tout opérateur simplicial s'obtient par composition des d_i et s_j. De plus tout opérateur simplicial s'écrit toujours de manière unique :

$$s_{i_1} \ldots s_{i_k} d_{j_1} \ldots d_{j_l} \quad \text{avec} \quad i_1 > \cdots > i_k, \quad j_1 < \cdots < j_l$$

on dit alors qu'il a été écrit sous la *forme canonique*. Des relations évidentes entre δ_i et σ_i on tire les relations entre les d_i et s_i :

$$\begin{aligned} d_i d_j &= d_{j-1} d_i \quad \text{pour} \quad i < j, \\ s_i s_j &= s_{j+1} s_i \quad \text{pour} \quad i \leqslant j, \\ d_i s_j &= \begin{cases} s_{j-1} d_i & \text{pour} \quad i < j, \\ \text{identité} & \text{pour} \quad i = j \quad \text{et pour} \quad i = j+1 \\ s_j d_{i-1} & \text{pour} \quad i > j+1. \end{cases} \end{aligned}$$

Soient X et Y deux objets de $\mathcal{S}$; un morphisme de $\mathcal{S}$ est une transformation naturelle de foncteurs $X \to Y$, c'est-à-dire une suite d'applications ensemblistes $f_n : X_n \to Y_n$ assujetties aux conditions

$$\begin{aligned} d_i f_n &= f_{n-1} d_i \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant i \leqslant n, \quad n \geqslant 1 \\ s_i f_n &= f_{n+1} s_i \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant i \leqslant n, \quad n \geqslant 0. \end{aligned}$$

Les objets de $\mathcal{S}$ sont appelés *ensembles simpliciaux*, et les morphismes de $\mathcal{S}$ *applications simpliciables* [1]. On désignera par $\mathcal{H}(X, Y)$ l'ensemble des applications simpliciables $X \to Y$.

c. Soit X un ensemble simplicial et $x \in X$ (*i.e* x est un élément de l'un des ensembles X_n); si $x = s_i x'$, on dit que x est *dégénéré*, si x n'appartient pas à l'image des s_i on dit qu'il est *non dégénéré*. Tout $x \in X$ s'écrit d'une manière unique $s_{i_1} \ldots s_{i_k} y$ avec y non dégénéré, et $i_1 > \cdots > i_k$ (k peut être égal à zéro).

d. On dit qu'un ensemble simplicial Y est un sous-ensemble simplicial de X, et on écrit $Y \subset X$, si $Y_n \subset X_n$ pour chaque n, et si les d_i et s_i de Y sont induits par ceux de X. L'injection $Y \to X$ est alors une application simpliciale. En particulier soit X^n le sous-ensemble simplicial de X engendré par X_n; X^n est le *n-squelette* de X et l'on a la suite d'injections :

$$X^0 \to X^1 \to \cdots \to X^n \to X.$$

Si A est un sous-ensemble de X, on désignera par S(A) le sous-ensemble simplicial de X engendré par A.

e. Soit $\Delta[n]$ l'ensemble simplicial défini par

$$\Delta[n]_p = \operatorname{Hom}(\Delta_p, \Delta_n)$$

(1) Afin de simplifier le langage, le terme « application » désignera toujours les applications simpliciales. Toute autre application sera désignée par le mot « fonction ».

où Hom est rapporté aux morphismes de Δ, avec, si $a \in \Delta[n,]$

$$d_i a = a \circ \delta_i, \qquad s_i a = a \circ \sigma_i.$$

Soit $\delta^n \in \mathrm{Hom}\ (\Delta_n,\ \Delta_n)$ l'identité. On dit que δ^n est le *n-simplexe fondamental du n-modèle* $\Delta[n]$.

On peut aussi interpréter $\Delta[n]$ de la façon suivante : les éléments de $\Delta[n]$ s'écrivent $\varphi\delta^n$, où φ est un opérateur simplicial. Disons que φ est de poids q si $k - l = q$ lorsque φ est écrit sous la forme canonique (1-1) *b*. Alors $\Delta[n]_p = \{\varphi\delta^n | \varphi$ de poids $p - n\}$ et

$$d_i(\varphi\delta^n) = (d_i\varphi)\delta^n, \qquad s_i(\varphi\delta^n) = (s_i\varphi)\delta^n.$$

On désignera souvent par $\dot{\Delta}[n]$, (resp $\ddot{\Delta}[n]$) le $(n\text{-}1)$-squelette [resp $(n\text{-}2)$-squelette] de $\Delta[n]$.

f. Soit X un ensemble simplicial et $s \in X_n$. On définit $\tilde{x} \in \mathcal{H}(\Delta[n],\ X)$ par $\tilde{x}(\varphi\delta^n) = \varphi x$. $\tilde{x}$ est la seule application $\Delta[n] \to X$ telle que $\tilde{x}(\delta^n) = x$. Réciproquement si f est une application $\Delta[n] \to X$, et si on pose $f(\delta^n) = x$, on a $f = \tilde{x}$. Autrement dit $X_n = \mathcal{H}(\Delta[n],\ X)$. Soit $x \in X_n$ et φ un opérateur simplicial de poids $p - n$. On a

$$\tilde{\varphi x} = \tilde{x} \circ \widetilde{\varphi_{\delta^p}}.$$

g. Les zéro-simplexes de X seront souvent appelés *sommets* de X. Si $x \in X_0$ est un sommet, on désignera toujours par le même symbole x le sous-ensemble simplicial de X engendré par x. Ce sous-ensemble simplicial ne contient qu'un seul n-simplexe pour chaque n, à savoir $s_0^n x$, et $d_i s_0^n x = s_0^{n-1} x$, $s_i s_0^n x = s_0^{n+1} x$.

On appelle $\mathcal{S}^*$ la catégorie des ensembles et applications simpliciaux *avec points bases*, dont les objets sont les couples (X, x) ou $X \in \mathcal{S}$ et x est un sommet de X, et les morphismes les applications de $\mathcal{S}$ qui transforment point base en point base.

On prendra pour point base de $\Delta[n]$ le sommet $d_1 \ldots d_n\delta^n$ (« o-ième sommet de n » qui sera souvent désigné par O ou O_n).

Si (X, x) est un ensemble simplicial avec point de base et $Y \subset X$ on définit l'ensemble simplicial avec point de base quotient $(X/Y, x)$, par $(X/Y)_n = X_n/Y_n$, Y_n étant identifié à x, les opérateurs faces et dégénérescences étant définis par passage au quotient à partir de ceux de X.

h. Soient X et Y deux ensembles simpliciaux. *Le produit cartésien* $X \times Y$ de X et Y est l'ensemble simplicial défini par

$$(X \times Y)_n = X_n \times Y_n,$$
$$d_i(x, y) = (d_i x, d_i y); \quad s_i(x, y) = (s_i x, s_i y) \quad (x \in X_n, y \in Y_n).$$

Si $f: X \to X'$ et $g: Y \to Y'$ sont des applications,

$$f \times g : X \times Y \to X' \times Y'$$

est l'application définie par

$$(f \times g)_n(x, y) = (f_n(x), g_n(y)) \quad (x \in X_n, y \in Y_n).$$

1. 2. *Homotopies.* — On pose pour simplifier $I = \Delta[1]$, $0 = d_1\delta^1$, $1 = d_0\delta^1$.

1re *définition de l'homotopie.* — Deux applications $f, g : X \to Y$ sont homotopes s'il existe une application $k : I \times X \to Y$ telle que $f = k \circ \varepsilon_0$, $g = k \circ \varepsilon_1$, où ε_e est l'application $X \to I \times X$ définie par $\varepsilon_e(x) = (e, x)$ $(e = 0,1)$. On note $f \sim g$.

2e *définition de l'homotopie.* — Deux applications $f, g : X \to Y$ sont homotopes s'il existe, pour chaque n, $n+1$ fonctions k_i $X_n \to Y_{n+1}$ $(i = 0, \ldots, n)$ telles que

$$\begin{array}{lll}
s_{j+1}k_i = k_i s_j & \text{pour} & i \leqslant j, \\
k_{j+1}s_i = s_i k_j & \text{pour} & i \leqslant j, \\
d_{j+1}k_i = k_i d_j & \text{pour} & i < j, \\
d_{i+1}k_{i+1} = d_{i+1}k_i & \text{pour} & i < n, \\
d_i k_{j+1} = k_j d_i & \text{pour} & i \leqslant j,
\end{array}$$
$$d_0 k_0 = g, \qquad d_{n+1}k_n = f,$$

ces deux définitions sont équivalentes, en effet il suffit de poser

$$k(s_{n-1} \ldots \hat{s}_i \ldots s_0 \delta^1 x) = d_{i+1}k_i x$$

pour définir k connaissant les k_i et réciproquement

$$k_i x = k(s_n \ldots \hat{s}_i \ldots s_0, s_i x)$$

pour définir les k_i connaissant k.

Remarque 1. — La relation $\sim$ n'est pas en général une relation d'équivalence.

Remarque 2. — La deuxième définition de l'homotopie fait intervenir la « décomposition d'un prisme en simplexes élémentaires ».

(1. 3). *Homotopies relatives.* — Soient f et g deux applications $(X, A) \to (Y, B)$ *i.e* $A \subset X$, $B \subset Y$ et $f, g|A : A \to B$. On dit qu'elles sont homotopes rel (A, B) ($f \sim g$ rel (A, B)) s'il existe une application $k : (I \times X, I \times A) \to (Y, B)$ telle que $f = k_0 \varepsilon_0$ et $g = k_0 \varepsilon_1$.

En utilisant les k_i au lieu de k, cela revient à dire que les k_i sont des fonctions $A_n \to B_{n+1}$.

On dit qu'elles sont homotopes rel A ($f \sim g$ rel A) s'il existe une application $k : (I \times X, I \times A) \to (Y, B)$ telle que $f = k \circ \varepsilon_0$, $g = k \circ \varepsilon_1$ et si de plus $k(\alpha, a) = f(a) = g(a)$ pour tout $\alpha \in I$, $a \in A$. En utilisant les k_i au lieu de k, cela revient à dire que $k_i a = s_i f(a) = s_i g(a)$ pour $a \in A$. On dit aussi que l'homotopie k est *stationnaire* sur A.

1. 4. Lemme. — *Soient* $a_i = (s_n s_{n-1} \ldots \hat{s}_i \ldots s_0 \delta^1, s_i \delta^n) \in I \times \Delta[n]$ $(i = 0, \ldots, n)$ *et* f *une fonction définie sur les* a_i, *à valeurs dans un ensemble simplicial* X *telle que* $d_{i+1} f(a_{i+1}) = d_{i+1} f(a_i)$ *pour* $i \geqslant 0$. *Alors* f *peut se prolonger de façon unique ou une homotopie notée encore* $f : I \times \Delta[n] \to X$.

Ce lemme dont la démonstration ne présente aucune difficulté est souvent utile pour construire des homotopies entre applications $\Delta[n] \to X$. Ainsi, pour démontrer la proposition :

Proposition. — *Il existe une homotopie* ω_n :

$$(I \times \Delta[n], I \times 0) \to (\Delta[n], 0)$$

et une homotopie ω'_n :

$$(I \times \Delta[n], I \times d_0 \ldots d_{n-1}\delta^n) \to (\Delta[n], d_0 \ldots d_{n-1}\delta^n)$$

telle que

(i) $\omega_n \circ \varepsilon_1 = \text{identité}, \quad \omega_n \circ \varepsilon_0 : \Delta[n] \to 0,$
$\omega'_n \circ \varepsilon_0 = \text{identité}, \quad \omega'_n \circ \varepsilon_1 : \Delta[n] \to d_0 \ldots d_{n-1}\delta^n$

(ii) $\widetilde{d_i\delta^n} \circ \omega_{n-1} = \omega_n \circ \left(\text{id} \times \widetilde{d_i\delta^n}\right)$ pour $i > 0$
$\widetilde{d_i\delta^n} \circ \omega'_{n-1} = \omega'_n \circ \left(\text{id} \times \widetilde{d_i\delta^n}\right)$ pour $i < n$

(iii) $\widetilde{s_i\delta^n} \circ \omega_{n+1} = \omega_n \circ \left(\text{id} \times \widetilde{s_i\delta^n}\right),$
$\widetilde{s_i\delta^n} \circ \omega'_{n+1} = \omega'_n \circ \left(\text{id} \times \widetilde{s_i\delta^n}\right)$

il suffit de poser

$$\omega_n(a_0) = \omega_n(a_1) = s_0\delta^n,$$
$$\omega_n(a_i) = s_{i-1} \ldots s_0 d_1 \ldots d_{i-1}\delta^n \quad (i > 0)$$

et
$$\omega'_n(a_n) = \omega'_n(a_{n-1}) = s_n\delta^n,$$
$$\omega'_n(a_i) = s_n \ldots s_{i+1}d_{i+1} \ldots d_{n-1} \quad (i < n - 1)$$

et de vérifier les relations (i) (ii) (iii), par un calcul purement mécanique.

1. 5. *Complexes de Kan, fibrés.* — *a.* On dit qu'un ensemble simplicial X satisfait à la condition d'extension de Kan, ou que X est un complexe de Kan, si X possède la propriété suivante : quels que soient les entiers n et k, et les $n + 1$ n-simplexes x_i, $(i = 0, \ldots, \hat{k}, \ldots, n + 1)$ de X tels que $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ pour i, $j \neq k$ et $i < j$, il existe un $(n + 1)$ — simplexe x tel que $d_i x = x_i$ pour $i \neq k$.

Si $\Lambda^k[n]$ désigne le sous-ensemble simplicial de $\Delta[n]$ engendré par les $(n - 1)$ — faces $d_i\delta^n$ avec $i \neq k$, on peut énoncer la condition précédente sous la forme : quels que soient les entiers n et k et l'application $f : \Lambda^k[n] \to$ X, il existe une application $g : \Delta[n] \to x$ qui prolonge f.

b. Un fibré est un triple (E, p, B) où E et B sont des ensembles simpliciaux et p : E $\to$ B une application, satisfaisant à la condition suivante : quels que soient les entiers n et k; et les $n + 1$ n-simplexes x_i $(i = 0, 1 \ldots, \hat{k}, \ldots n + 1)$ de E_n tels que (i) $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ pour i, $j \neq k$ et $i < j$ (ii) $p(x_i) = d_i y$ pour $i \neq k$ et $y \in B_{n+1}$, il existe un $(n + 1)$-simplexe x de E tel que (i) $d_i x = x_i$ pour $i \neq k$ (ii) $p(x) = y$.

Il revient au même de dire que quels que soient les entiers n et k et les applications f, g telles que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \Lambda^k[n] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"'] & E \arrow[d, "p"] \\ \Delta[n] \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

soit commutatif, il existe une application $h : \Delta[n] \to$ E qui prolonge f et qui vérifie $p \circ h = g$. On dira que « *h prolonge f au-dessus de g* ».

On passe de l'une à l'autre de ces définitions en utilisant (1. 1) f.

c. Si (E, p, B) est un fibré et $b \in B_0$, on pose $p^{-1}(b) = F_b$. F_b *est la fibre au-dessus* de b. C'est un complexe de Kan.

Réciproquement si X est un complexe de Kan, et b un ensemble simplicial réduit au seul sommet b et ses dégénérés, l'unique application $\underline{p} : X \to b$ fait de $(X, \underline{p}, b)$ un fibré.

d. Fibré induit par une application. — Soit $(E, \underline{p}, B)$ un fibré et $f : X\,B$ une application. On désigne par f^*E le sous-ensemble simplicial de $X \times E$ formé par les couples (x, e) tels que $f(e) = p(e)$ $(x \in X,\ e \in E)$. Il existe deux applications canoniques $P : f^*E \to X$, $Q : f^*E \to E$ définies par $P(X, e) = x$, $Q(x, e) = e$ pour $(x, e) \in f^*E$. (f^*E, P, X) est aussi un fibré : *le fibré induit par f*, et on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "P"'] & E \arrow[d, "\underline{p}"] \\ X \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

e. Plus généralement soient (E, p, B) et (E', p', B') deux fibrés; un *morphisme* de fibrés est un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\underline{p}'"'] & E \arrow[d, "\underline{p}"] \\ B' \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

où toutes les flèches sont des applications de $\mathcal{S}$. La catégorie dont les objets sont les fibrés et les morphismes de fibrés sera désignée par $\mathcal{F}$. Dans cette catégorie, on appellera *modèle* un fibré dont la base est un $\Delta[n]$.

2. — Propriétés élémentaires des fibrés.

On se propose d'énoncer un certain nombre de propositions [théorèmes (2. 3) et (2. 5)] plus ou moins connus ou démontrés dans la littérature, d'un usage constant dans la suite. Les lemmes 2. 4 ne seront utilisés que dans le chapitre 4.

2. 1. Proposition. — Soient $(E, \underline{p}, B)$ *un fibré*, $\Lambda^{k_1, \ldots, k_p}[n]$ *le sous-ensemble simplicial de* $\Delta[n]$ *engendré par les faces* $d_i\delta^n$,

$(i \neq k_1, \ldots, k_p)$, avec $0 \leqslant k_1 < \cdots < k_p \leqslant n$ et $p \leqslant n$, et f, g *deux applications, tels que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \Lambda^{k_1, \ldots, k_p}[n] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"] & E \arrow[d, "p"] \\ \Delta[n] \arrow[r, "g"] & B \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Il existe alors une application $h : \Delta[n] \rightarrow E$ *qui prolonge* f *au-dessus de* g.

La démonstration se fait par récurrence sur p. Si $p = 1$ la proposition se réduit à la définition des fibrés. Supposons la propriété vraie pour $p < m$ et soit $p = m$. On considère le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \Lambda^{k_1, \ldots, k_m}[n-1] \arrow[r, "\widetilde{d_{k_m}\delta^n}"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"] & \Lambda^{k_1, \ldots, k_m}[n] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"] & E \arrow[d, "p"] \\ \Delta[n-1] \arrow[r, "\widetilde{d_{k_m}\delta^n}"] & \Delta[n] \arrow[r, "g"] & B \end{tikzcd}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $h' : \Delta[n-1] \rightarrow E$ qui prolonge $f \circ \widetilde{d_{k_m}\delta^n}$ au-dessus de $g \circ \widetilde{d_{k_m}\delta^n}$. Posons

$$h_1(\varphi d_{k_m}\delta^n) = h'(\varphi\delta^{n-1})$$

pour tout opérateur simplicial φ. Comme h_1 et f coïncident sur $S(d_{k_m}\delta^n) \cap \Lambda^{k_1, \ldots, k_m}[n]$ on peut prolonger f à f_1 :

$$\Lambda^{k_1, \ldots, k_{m-1}}[n] \rightarrow E$$

au-dessus de g en posant $f_1 | S(d_{k_m}\delta^n) = h_1$. En appliquant encore une fois l'hypothèse de récurrence, on arrive au résultat désiré.

2. 2. Proposition. — *Soient* (E, p, B) *un fibré et* f, g *deux applications, tels que le diagramme* :

$$\begin{tikzcd} \Lambda^{k_1, \ldots, k_p}[n] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"] & E \arrow[d, "p"] \\ \Lambda^{k_r}[n] \arrow[r, "g"] & B \end{tikzcd}$$

soit commutatif $(1 \leqslant r \leqslant p)$. *Il existe alors une application* h : $\Lambda^{k_r}[n] \rightarrow E$ *qui prolonge* f *au-dessus de* g.

Démonstration par récurrence sur p, le cas $p=1$ étant évident. Si $r \neq p$ on considère le diagramme

$$\begin{tikzcd} \Lambda^{k_1,\dots,k_{p-1}}[n-1] \arrow[r, "\widetilde{d_{k_p}\delta^n}"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"] & \Lambda^{k_1,\dots,k_p}[n] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"] & \mathrm{E} \arrow[d, "p"] \\ \Delta[n-1] \arrow[r, "\widetilde{d_{k_p}\delta^n}"] & \Lambda^{k_r}[n] \arrow[r, "g"] & \mathrm{B} \end{tikzcd}$$

d'après 2. 1, il existe une application $h' : \Delta[n-1] \rightarrow \mathrm{E}$ qui prolonge $f \circ d_{k_p}\delta^n$ au-dessus de $g \circ d_{k_p}\delta^n$. On pose

$$h_1(\varphi d_{k_p}\delta^n) = h'(\varphi\delta^{n-1})$$

pour tout opérateur simplicial φ. h_1 permet de prolonger f à $f_1 : \Lambda^{k_1,\dots,k_{p-1}}[n] \rightarrow \mathrm{E}$ au-dessus de g. Donc f_1 est prolongeable à $h : \Lambda^{k_r}[n] \rightarrow \mathrm{E}$ au-dessus de g d'après l'hypothèse de récurrence. Si $r = p$, alors $p > 1$ entraîne que $r \neq 1$. On conclut dans ce cas en utilisant un diagramme dont la première ligne est

$$\Lambda^{k'_1,\dots,k'_{p-1}}[n-1] \xrightarrow{\widetilde{d_k\delta^n}} \Lambda^{k_1,\dots,k_p}[n] \xrightarrow{f} \mathrm{E}$$

où $k'_i = k_i$ si $k_i = k_1 + i - 1$, $k'_i = k_{i+1}$ si non.

Théorème 2. 3. — *La condition nécessaire et suffisante pour que* (E, $\underline{p}$, B) *soit un fibré est que, quels que soient les ensembles simpliciaux* X *et* Y *avec* $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$, *les applications* f, g *et* $e = 0$ *ou* 1, *tels que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} (\mathrm{I} \times \mathrm{Y}) \cup (e \times \mathrm{X}) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"] & \mathrm{E} \arrow[d, "\underline{p}"] \\ \mathrm{I} \times \mathrm{X} \arrow[r, "g"] & \mathrm{B} \end{tikzcd}$$

soit commutatif, il existe une application $h : \mathrm{I} \times \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{E}$ *qui prolonge* f *au-dessus de* g.

Démonstration. — *a. Condition suffisante.* — Soit un diagramme commutatif

$$(1) \qquad \begin{tikzcd} \Lambda^0[n] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"] & \mathrm{E} \arrow[d, "\underline{p}"] \\ \Delta[n] \arrow[r, "g"] & \mathrm{B} \end{tikzcd}$$

et considérons la suite d'applications (notations de 1. 4)

$$(2) \qquad \Lambda^0[n] \xrightarrow{\widetilde{d_1 a_0}} (\mathrm{I} \times \Lambda^0[n]) \cup (0 \times \Delta[n]) \xrightarrow{\omega_n} \Lambda^0[n]$$

dont la composition est l'identité puisque

$$\omega_n \circ \widetilde{d_1 a_0}(\delta^n) = \omega_n d_1(a_0) = d_1 \omega_n(a_0) = d_1 s_0 \delta^n = \delta^n.$$

Le diagramme

$$\begin{tikzcd} (\mathrm{I} \times \Lambda^0[n]) \cup (0 \times \Delta[n]) \arrow[r, "f \circ \omega_n"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"] & E \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{I} \times \Delta[n] \arrow[r, "g \circ \omega_n"] & B \end{tikzcd}$$

est commutatif; donc par hypothèse, il existe $h : \mathrm{I} \times \Delta[n] \to E$ qui prolonge $f \circ \omega_n$ au-dessus de $g \circ \omega_n$. Comme $\omega_n \circ \widetilde{d_1 a_0}$ est l'identité, on en déduit que $\widetilde{d_1 a_0} \circ h$ prolonge f au-dessus de g. Si $\Lambda^0[n]$ est remplacé par $\Lambda^n[n]$ dans le diagramme (1), on utilise, au lieu de (2) la suite d'applications :

$$\Lambda^n[n] \xrightarrow{\widetilde{d_n a_n}} (\mathrm{I} \times \Lambda^n[n]) \cup (1 \times \Delta[n]) \xrightarrow{\omega_n'} \Lambda^n[n].$$

Enfin, si dans (1) figure $\Lambda^i[n]$ avec $i \neq 0$, n on utilise l'application $\omega_n\,(\mathrm{i}) = \mathrm{I} \times \Delta[n] \to \Delta[n]$, « intermédiaire » entre ω_n et ω_n' donnée par :

$$\omega_n\,(\mathrm{i})\,(a_j) = s_j \delta^n \quad \text{pour} \quad j \leqslant i, \qquad \omega_n\,(\mathrm{i})\,(a_{i+1}) = s_i \delta^n$$
$$\omega_n\,(\mathrm{i})\,(a_j) = s_{j-1} \ldots s_i\, d_{i+1} \ldots d_{j-1} \delta^n \quad \text{pour} \quad j > i + 1,$$
$$i = 0,1, \ldots, n-1;$$

on a $\omega_n\,(0) = \omega_n$. De plus on remarque que $\mathrm{I} \times \Lambda^i[n] \xrightarrow{\omega_n(\mathrm{i})} \Lambda^i[n]$ et que l'application composée

$$\Lambda^i[n] \xrightarrow{\widetilde{d_1 a_0}} (\mathrm{I} \times \Lambda^i[n]) \cup (0 \times \Delta[n]) \xrightarrow{\omega_n(\mathrm{i})} \Lambda^i[n]$$

est l'identité. c.q.f.d.

b. *Condition nécessaire.* — On considère le diagramme, où f et g sont donnés :

$$\begin{tikzcd} \Lambda^1[n+1] \arrow[r, "\tilde{a}_0"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"] & (\mathrm{I} \times \dot{\Delta}[n]) \cup (1 \times \Delta[n]) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"] & E \arrow[d, "p"] \\ \Delta[n+1] \arrow[r, "\tilde{a}_0"] & \mathrm{I} \times \Delta[n] \arrow[r, "g"] & B \end{tikzcd}$$

et où $\dot{\Delta}[n]$ représente le $(n\text{-}1)$-squelette de $\Delta[n]$. Par hypothèse, il existe une application $h'_0 : \Delta[n+1] \to \mathrm{E}$ qui prolonge $f \circ \tilde{a}_0$ au-dessus de $g \circ \tilde{a}_0$. On pose $h_0(a_0) = h'_0(\delta^{n+1})$. On a $ph_0(a_0) = g(a_0)$ et, pour $i \neq 1$,

$$d_i h_0(a_0) = d_i h'_0(\delta^{n+1}) = h'_0(d_i\delta^{n+1}) = f \circ \tilde{a}_0(d_i\delta^{n+1}) = d_i f(a_0).$$

On a donc prolongé f à $\mathrm{S}(a_0)$ au-dessus de g. Supposons que l'on ait prolongé f à $\mathrm{S}(a_0), \ldots, \mathrm{S}(a_{k-1})$, et soit h_{k-1} l'application ainsi obtenue. Considérons alors le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^{k+1}[n+1] \arrow[r, "\tilde{a}_k"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"'] & (\mathrm{I} \times \dot{\Delta}[n]) \cup \mathrm{S}(d_k a_{k-1}) \arrow[r, "h_{k-1}"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"'] & \mathrm{E} \arrow[d, "p"] \\
\Delta[n+1] \arrow[r, "\tilde{a}_k"] & \mathrm{I} \times \Delta[n] \arrow[r, "g"] & \mathrm{B}
\end{tikzcd}$$

il existe une application $h'_k : \Delta[n+1] \to \mathrm{E}$ qui prolonge $h_{k-1} \circ \tilde{a}_k$ au-dessus de $g \circ \tilde{a}_k$. On pose $h_k(a_k) = h'_k(\delta^{n+1})$. h_k prolonge h'_k au-dessus de g. Le théorème est donc démontré par récurrence pour $\mathrm{X} = \Delta[n]$, $\mathrm{Y} = \dot{\Delta}[n]$, $e = 1$. Pour les mêmes X, Y, $e = 0$, la démonstration se fait par récurrence descendante, en construisant d'abord un prolongement de f à a_n.

Passons maintenant au cas général :

Supposons que l'on ait déjà déterminé h sur le $(n\text{-}1)$-squelette de X et soit $x \in \mathrm{X}^n$, x non dégénéré, $x \notin \mathrm{Y}$; soit $\mathrm{S}(x)$ l'ensemble simplicial engendré par x, $\dot{\mathrm{S}}(x) = \mathrm{S}^{n-1}(x)$. On a alors le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{I} \times \dot{\Delta}[n]) \cup (e \times \Delta[n]) \arrow[r, "\tilde{x}"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"'] & (\mathrm{I} \times \dot{\mathrm{S}}(x) \cup (e \times \mathrm{S}(x)) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"'] & \mathrm{E} \arrow[d, "p"] \\
\mathrm{I} \times \Delta[n] \arrow[r, "\tilde{x}"] & \mathrm{I} \times \mathrm{S}(x) \arrow[r, "g"] & \mathrm{B}
\end{tikzcd}$$

d'après ce qui précède, il existe une application $h' : \mathrm{I} \times \Delta[n] \to \mathrm{E}$ qui prolonge $h \circ \tilde{x}$ au-dessus de $g \circ \tilde{x}$. On pose $h(\alpha, \varphi x) = h'(\alpha, \varphi\delta^n)$ pour tout $\alpha \in \mathrm{I}$, tout opérateur simplicial φ. h est ainsi prolongé à $\mathrm{S}(x)$ au-dessus de g, quelque soit $x \in \mathrm{X}^n$, donc h est prolongé à $\mathrm{I} \times \mathrm{X}^n$, même démonstration pour $n = 0$ ($\dot{\Delta}[n]$ et $\dot{\mathrm{S}}(x)$ sont alors vides) ce qui démarre la récurrence.

Corollaire 1. — (Théorème d'extension des homotopies). — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble*

simplicial E *soit un complexe de Kan, est que, quels que soient les ensembles simpliciaux* X *et* Y *avec* $Y \subset X$, *l'application* $f : X \to E$ *et l'homotopie* $k : I \times Y \to E$ *telle que* $k \circ \varepsilon_e = f|Y$ ($e = 0$ ou 1), *il existe une homotopie* $h : I \times X \to E$ *qui prolonge* k, *et telle que* $k \circ \varepsilon_e = f$.

Il suffit en effet de prendre pour B l'ensemble simplicial réduit au seul sommet b et d'appliquer le théorème 2. 3.

Corollaire 2. — *Soit* (E, $\underline{p}$, B) *un fibré,* E', B' *des ensembles simpliciaux* $\underline{p}'$, f, g, *des applications telles que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\underline{p}'"] & E \arrow[d, "\underline{p}"] \\ B' \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Soit $k : I \times B' \to B$ *une homotopie telle que* $k \circ \varepsilon_e = g$ ($e = 0$ *ou* 1). *Il existe alors une homotopie* $h : I \times E' \to E$ *telle que* (i) $p \circ h = k$ (ii) $h \circ \varepsilon_e = f$ (iii) h *est stationnaire sur* $\underline{p}'^{-1}(A') \subset E'$ *si* k *est stationnaire sur* $A' \subset B'$.

Il suffit en effet d'appliquer le théorème 2. 3 au diagramme

$$\begin{tikzcd} (I \times \underline{p}'^{-1}(A')) \cup (e \times E') \arrow[r, "l"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"] & E \arrow[d, "\underline{p}"] \\ I \times E' \arrow[r, "k \circ (id \times \underline{p}')"'] & B \end{tikzcd}$$

où l est l'application définie par $l(\alpha, x) = f(x)$, ($x \in \underline{p}'^{-1}(A')$, $\alpha \in I$), $l(e, x) = f(x)$ ($x \in E'$).

2. 4. Soient de nouveau $Y \subset X$ deux ensembles simpliciaux, (E, $\underline{p}$, B) un fibré, et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"] & E \arrow[d, "\underline{p}"] \\ X \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

Lemme 1. — *Si*

$$X = I \times \Delta[n], \qquad Y = (0 \times \Delta[n]) \cup (1 \times \Delta[n]) \cup (I \times \Lambda^k[n])$$

il existe une application $h : X \to E$ *qui prolonge* f *au-dessus de* g.

Démonstration analogue à celle du théorème 2. 3 b : on utilise des diagrammes dont les lignes supérieures sont :

$$\Lambda^{1,k+1}[n+1] \xrightarrow{\tilde{a}_0} (1 \times \Delta[n]) \cup (\mathrm{I} \times \Lambda^k[n]) \xrightarrow{f} \mathrm{E},$$
$$i < k, \quad \Lambda^{i+1,k+1}[n+1] \xrightarrow{\tilde{a}_i} (\mathrm{I} \times \Lambda^k[n]) \cup \mathrm{S}(d_i a_{i-1}) \xrightarrow{h_{i-1}} \mathrm{E}.$$

Il existe alors $h'_i : \Delta[n+1] \to \mathrm{E}$ au-dessus de $g \circ \tilde{a}_i$ qui prolonge $h_{i-1} \circ \tilde{a}_i$ d'après 2. 1; d'où la définition de h_i.

Pour $i = k$ on utilise

$$\Lambda^{k+1}[n+1] \xrightarrow{\tilde{a}_k} (\mathrm{I} \times \Lambda^k[n]) \cup \mathrm{S}(d_k a_{k-1}),$$

on repart ensuite de $i = n$:

$$\Lambda^{n,k}[n+1] \xrightarrow{\tilde{a}_n} (0 + \Delta[n]) \cup (\mathrm{I} \times \Lambda^k[n]) \xrightarrow{f} \mathrm{E},$$
$$i > k+1, \quad \Lambda^{i,k}[n+1] \xrightarrow{\tilde{a}_i} (\mathrm{I} \times \Lambda^k[n]) \cup \mathrm{S}(d_{i+1} a_{i+1}) \xrightarrow{h_{i+1}} \mathrm{E}$$

ce qui permet de définir les h_i pour $i > k+1$ de proche en proche. Enfin h_{k+1} est défini par

$$\Lambda^k[n+1] \xrightarrow{\tilde{a}_{k+1}} (\mathrm{I} \times \Lambda^k[n]) \cup \mathrm{S}(d_{k+1} a_k,\ d_{k+2} a_{k+2}) \xrightarrow{l} \mathrm{E}$$

ou

$$l|\mathrm{I} \times \Lambda^k[n] = f|\mathrm{I} \times \Lambda^k[n], \qquad l|\mathrm{S}(d_{k+1}a_k) = h_k|\mathrm{S}(d_{k+1}a_k),$$
$$l|\mathrm{S}(d_{k+2}a_{k+2}) = h_{k+2}|\mathrm{S}(d_{k+2}a_{k+2}),$$

la démonstration précédente doit être légèrement modifiée si $k = 0$ ou n, $n-1$.

LEMME 2. — *Si*

$$\mathrm{X} = \mathrm{I} + \Delta[n],$$
$$\mathrm{Y} = (0 \times \Delta[n]) \cup (1 \times \Delta[n]) \cup (\mathrm{I} \times \mathrm{S}^{i_1,\dots,i_p}(\sigma_q))$$

où σ_q *est un* q*-simplexe non dégénéré de* $\Delta[n]$, *et* $\mathrm{S}^{i_1,\dots,i_p}(\sigma_q)$ *l'ensemble simplicial engendré par les* $(q-1)$*-faces* $d_i\sigma_p$ *avec* $i \neq i_1, \dots, i_p$, $0 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant q$, *il existe une application* $h : \mathrm{X} \to \mathrm{E}$ *qui prolonge* f *au-dessus de* g.

Démonstration par récurrence sur n. Si $n = 1$, l'énoncé est exactement celui du lemme 1; de toutes façons, la démonstration est évidente dans ce cas.

Supposons le lemme vrai pour $n-1$.

1^er^ *cas.* $q < n. \sigma_q$ est alors un simplexe de $S(d_k\delta^n)$ pour un certain k. Soit σ'_q le q-simplexe de $\Delta[n-1]$ tel que $\widetilde{d_k\delta^n}(\sigma'_p) = \sigma_q$. L'application $S^{i_1, \dots, i_p}(\sigma'_q) \xrightarrow{\widetilde{d_k\delta^n}} S^{i_1, \dots, i_p}(\sigma_q)$ est surjective et on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(0\times\Delta[n-1]) \cup (1\times\Delta[n-1]) \cup (\mathrm{I}\times S^{i_1,\dots,i_p}(\sigma'_q)) \arrow[r, "id\times\widetilde{d_k\delta^n}"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"'] & \mathrm{Y} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"'] & \mathrm{E} \arrow[d, "p"] \\
\mathrm{I}\times\Delta[n-1] \arrow[r, "id\times\widetilde{d_k\delta^n}"'] & \mathrm{I}\times\Delta[n] \arrow[r, "g"] & \mathrm{B}
\end{tikzcd}$$

L'hypothèse de récurrence permet de définir

$$h' : \mathrm{I} \times \Delta[n-1] \to \mathrm{E}$$

qui prolonge $f\circ\left(\widetilde{d_k\delta^n} \times \mathrm{id}\right)$ au-dessus de $g\circ\left(\widetilde{d_k\delta^n} \times \mathrm{id}\right)$; on définit $f_1 : S(d_k\delta^n) \to \mathrm{E}$ qui prolonge f au-dessus de g par $f_1(\alpha, \varphi d_k\delta^n) = h'(\alpha, \varphi\delta^{n-1})$ pour tout opérateur simplicial φ et tout $\alpha \in \mathrm{I}$.

On est donc ramené au cas où $q = n$, $S^{i_1, \dots, i_p}(\sigma_q) = \Lambda^{i_1, \dots, i_p}[n]$.

2^e^ *Cas.* — $q = n$; Si $p = 1$, le lemme 2 résulte du lemme 1. Supposons que le lemme soit vrai pour $p-1$, $p > 1$. Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(0\times\Delta[n-1]) \cup (1\times\Delta[n-1]) \cup (\mathrm{I}\times\Lambda^{i_1,\dots,i_{p-1}}[n-1] \arrow[r, "id\times\widetilde{d_{i_p}\delta^n}"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"] & \mathrm{Y} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"'] & \mathrm{E} \arrow[d] \\
\mathrm{I}\times\Delta[n-1] \arrow[r, "id\times\widetilde{d_{i_p}\delta^n}"'] & \mathrm{I}\times\Delta[n] \arrow[r, "g"'] & \mathrm{B}
\end{tikzcd}$$

et l'hypothèse de récurrence (pour n) permet de définir $h' : \mathrm{I} \times \Delta[n-1] \to \mathrm{E}$ qui prolonge $f\circ\left(\mathrm{id} \times \widetilde{d_{i_p}\delta^n}\right)$ au-dessus de $g\circ\left(\mathrm{id} \times \widetilde{d_{i_p}\delta^n}\right)$.

Donc on peut définir $f_1 : \mathrm{I} \times S(d_{i_p}\delta^n) \to \mathrm{E}$ qui prolonge f au-dessus de g par $f_1(\alpha, \varphi d_{i_p}\delta^n) = h'(\alpha, \varphi\delta^{n-1})$ pour tout $\alpha \in \mathrm{I}$, tout opérateur simplicial φ. D'après l'hypothèse de récurrence sur p, on peut alors définir une application h cherchée.

Lemme 3. — *Si*

$$\mathrm{X} = \mathrm{I} \times \dot{\Delta}[n+1],$$
$$\mathrm{Y} = (0 \times \dot{\Delta}[n+1]) \cup (1 \times \Lambda^1[n+1]) \cup (\mathrm{I} \times 0_{n+1})$$

il existe une application $h : X \to E$ qui prolonge f au-dessus de g.

En effet, on considère le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(0\times\Delta[n]) \cup (1\times\Delta[n] \cup (I\times 0_n) \arrow[r, "id\times\widetilde{d_{n+1}\delta^{n+1}}"] \arrow[d, "\text{inj}"] & Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\text{inj}"] & E \arrow[d, "p"] \\
I\times\Delta[n] \arrow[r, "id\times\widetilde{d_{n+1}\delta^{n+1}}"] & I\times\dot\Delta[n+1] \arrow[r, "g"] & B
\end{tikzcd}$$

le lemme 2 permet de définir $h' : I \times \Delta[n] \to E$, donc

$$f_1 : Y_1 = (0 \times \dot\Delta[n+1]) \cup (1 \times \Lambda^1[n+1]) \cup (I \times S(d_{n+1})) \to E$$

qui prolonge f au-dessus de g.

Soit

$$Y_i = (0\times\dot\Delta[n+1]) \cup (1\times\Lambda^1[n+1]) \cup (I\times\Lambda^{0,1,2,\dots,i})[n+1]\ (i \geqslant 1)$$

et supposons que l'on ait étendu f à $f_{p+1} : Y_{p+1} \to E$ au-dessus de g $(p \geqslant 1)$. On considère le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(0\times\Delta[n]) \cup (1\times\Delta[n]) \cup (I\times\Lambda^{0,1,\dots,p}[n] \arrow[r, "id\times\widetilde{d_{p+1}\delta^{n+1}}"] \arrow[d] & Y_{p+1} \arrow[r, "f_{p+1}"] \arrow[d, "\text{inj}"] & E \arrow[d, "p"] \\
I\times\Delta[n] \arrow[r, "id\times\widetilde{d_{p+1}\delta^{n+1}}"] & I\times\Delta[n+1] \arrow[r, "g"] & B
\end{tikzcd}$$

l'hypothèse de récurrence et le lemme 2 permettent alors de définir

$$f_p : Y_p \to E \qquad \text{au-dessus de } g, \text{ prolongeant } f_{p+1}.$$

On arrive ainsi à $f_2 : Y_2 \to E$. En considérant $\widetilde{d_0\delta^{n+1}}$ et un diagramme analogue au précédent, on étend f_2 à $f' : (0 \times \dot\Delta[n+1) \cup (I \times \Lambda^1[n+1]) \to E$, au-dessus de g. Le théorème 2. 3 permet alors de conclure.

Remarque. — Le lemme 3 est encore vrai si on remplace $\Lambda^1[n+1]$ par $\Lambda^k[n+1]$ et si l'on échange le rôle de 0 et 1. Cependant, étant donné son caractère barbare, et le fait qu'il ne sera utilisé dans la suite que sous la forme énoncée ci-dessus il a semblé peu intéressant d'en donner une démonstration plus générale.

2.5. Proposition. — *Soient* (E, p, B) *un fibré,* X et Y *des ensembles simpliciaux avec* $Y \subset X$, f, h_1, h_2, g *des applications, tels que le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
(I \times Y) \cup (e \times X) \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"'] & & E \arrow[d, "p"] \\
I \times X \arrow[rru, shift left, "h_1"] \arrow[rru, shift right, "h_2"'] \arrow[rr, "g"'] & & B
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. Il existe alors une application $h : I \times X \to E$ *qui prolonge* f *au-dessus de* g *stationnaire sur* Y, *et telle que* $h : h_1(1-e, \ ) \sim h_2(1-e, \ )$.

Démonstration. — Posons $Y_1 = (e \times X) \cup (1-e \times X)$, $Y_2 = I \times Y$, $Y' = Y_1 \cup Y_2$, $X' = I \times X$, et considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(I \times Y') \cup (e \times X') \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"'] & E \arrow[d, "p"] \\
I \times X \arrow[r, "G"'] & B
\end{tikzcd}$$

où

$$\begin{array}{llll}
G(\alpha, x') = g(\alpha, x) & \text{pour} \quad \alpha \in I, & x' = (\beta, x), & \beta \in I, \quad x \in X, \\
F(e, x') = f(e, x) & \text{pour} \quad x' \in X', & x' = (\beta, x), & \beta \in I, \quad x \in X.
\end{array}$$

Sur $I \times Y_1$ on définit F par

$$\begin{array}{ll}
F(\alpha, e, x) \qquad = h_1(\alpha, x) & \alpha \in I, \quad x \in X \\
F(\alpha, 1-e, x) = h_2(\alpha, x) & \alpha \in I, \quad x \in X
\end{array}$$

et sur $I \times Y_2$ par

$$F(\alpha, \beta, y) = f(\alpha, y) \qquad \alpha, \beta \in I, \quad y \in Y$$

on vérifie que F définit une application simpliciale, et que le diagramme (1) est commutatif. Le théorème 2.3 donne une application $H : I \times X' \to E$ qui prolonge F au-dessus de G. $h = H \circ \varepsilon_{1-e} : X' \to E$ est alors l'application cherchée.

Corollaire. — *Soient* E *un complexe de Kan,* F, X, Y, *des ensembles simpliciaux tels que* $F \subset E$, $Y \subset X$. *La relation* $\sim$ (resp $\sim$ rel Y) *entre applications* $X \to E$ (resp $(X, Y) \to (E, F)$) *est une relation d'équivalence. Si de plus* F *est un complexe de Kan, la relation* $\sim$ rel (Y, F) *est aussi une relation d'équivalence.*

On prend pour B un point, alors $E \to B$ est un fibré. La proposition 2. 5 signifie alors ceci (où les f_i désignent des applications $(X, Y) \to (E, F)$); si $h_1 : f_0 \sim f_1$ rel Y et $h_2 : f_1 \sim f_2$ rel Y alors $f_1 \sim f_2$ rel Y. Mais, en échangeant le rôle de h_1 et h_2, on a aussi, dans les mêmes conditions, $f_2 \sim f_1$ rel Y. Enfin en changeant e en $1\text{-}e$, on voit que l'hypothèse $f_1 \sim f_0$ rel Y et $f_2 \sim f_0$ rel Y entraîne $f_1 \sim f_2$ rel Y et $f_2 \sim f_1$ rel Y.

Comme $f \sim f$ rel Y (il suffit de poser $h(\alpha, x) = f(x)$ pour $\alpha \in I$, $x \in X$) on voit que $f_0 \sim f_1$, rel Y et $f_1 \sim f_1$ rel Y entraînent $f_1 \sim f_0$ rel Y, et que $f_0 \sim f_1$ rel Y et $f_1 \sim f_2$ rel Y entraînent $f_0 \sim f_1$ rel Y et $f_2 \sim f_1$ rel Y, soit $f_0 \sim f_2$ rel Y. $\sim$ rel Y est bien une relation d'équivalence.

En prenant $Y = \emptyset$, on voit que $\sim$ est une relation d'équivalence.

Supposons que F soit un complexe de Kan, et soit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(e \times X, e \times Y) \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"'] & (E, F) \\
(I \times X, I \times Y) \arrow[ur, shift left, "h_1"] \arrow[ur, shift right, "h_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Ce diagramme permet de construire une application $((I \times Y_1) \cup (e \times X'), (I \times Y_2) \cup (e \times Y')) \to (E, F)$ (où l'on a posé $Y_1 = (e \times X) \cup (1 - e \times X)$, $Y_2 = (e \times Y) \cup (1 - e \times Y)$, $X' = I \times X$, $Y' = I \times Y$) par le procédé de la proposition 2. 5. F étant un complexe de Kan, on peut, en utilisant 2. 3 corrollaire 1, prolonger la restriction de l'application précédente aux sous-espaces, en une application $I \times Y' \to F$. On obtient ainsi une application : $(I \times (Y_1 \cup Y')) \cup (e \times X') \to E$ qui se prolonge d'après le même corollaire en une application $H : I \times X' \to E$ c'est-à-dire, vu la construction même de H, en une application $H : (I \times X', I \times Y') \to (E, F)$. Mais alors

$$H \circ \varepsilon_{1-e} : h_1 \circ \varepsilon_{1-e} \sim h_2 \circ \varepsilon_{1-e} \text{ rel } (Y, F).$$

On conclut alors comme précédemment.

Remarque. — Si $Z \subset Y \subset X$, $G \subset F \subset E$, et si on considère des homotopies : $k : I \times X \to E$ telles que $k : I \times Y \to F$ et $k : I \times Z \to G$ (homotopies rel (Y, Z, F, G)) et si G, F, E sont

des complexes de Kan, la relation $\sim$ rel (Y, Z, F, G) est encore une relation d'équivalence. La démonstration est la même que dans le cas $Z = G = \emptyset$, à la différence près qu'elle comporte une étape de plus.

3. — Groupes d'homotopies (1^{re} définition).

Dans tout ce paragraphe, les ensembles simpliciaux seront, sauf mention expresse du contraire, des complexes de Kan avec point base, et les applications, des morphismes de $\mathcal{S}^*$ (cf. (1-1)-g).

3. 1. Proposition. — *Soit* (E, $\underline{p}$, B) *un fibré; si* B *est un complexe de Kan,* E *l'est aussi. Si* E *est un complexe de Kan, et si* p *est surjective,* B *est un complexe de Kan.*

C'est évident.

3. 2. *a.* Soit (X, x_0) un complexe de Kan avec point base x_0. on pose $E(X, x_0)_n = \{x \in X_{n+1} | d_1 \dots d_{n+1} x = x_0\}$ et on définit $\tilde{d}_i : E(X, x_0)_n \to E(X, x_0)_{n-1}$, $\tilde{s}_i : E(X, x_0)_n \to E(X, x_0)_{n+1}$ $\underline{p} : E(X, x_0)_n \to X_n$ par :

$$\tilde{d}_i\, x = d_{i+1}\, x, \ \tilde{s}_i\, x = s_{i+1}\, x, \qquad px = d_0 x.$$

Muni de $\tilde{d}_i$ et $\tilde{s}_i$, $E(X, x_0)$ est un complexe de Kan, où l'on prend pour point de base le O-simplexe $s_0 x_0$. De plus $(E(X, X_0)$ $\underline{p}$, X) est un fibré dont la fibre au-dessus de x_0 est désigné par $\Omega(X, x_0)$. Soit A un complexe de Kan contenu dans X tel que $x_0 \in A$. On pose $\underline{p}^{-1}(A) = \Omega(X, A, x_0)$. C'est un complexe de Kan, et $(\Omega(X, A, x_0), \underline{p}, A)$ est un fibré. Si f est une application $(X, x_0) \to (Y, y_0)$ (resp. $(X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$) f induit de façon évidente des applications $E(f) : E(X, x_0) \to E(Y, y_0)$, $\Omega(f) : \Omega(X, x_0) \to \Omega(Y, y_0)$ ((resp. $\Omega(X, A, x_0) \to \Omega(Y, B, y_0)$). On voit que Ω et E sont des foncteurs $\mathcal{S}^* \to \mathcal{S}^*$. Ces foncteurs jouent le rôle d'espaces de lacets et d'espaces de chemins de la théorie de la théorie des espaces topologiques.

b. Si (X, x_0) et $(Y, y_0) \in \mathcal{S}^*$, $(X \times Y, (x_0, y_0)) \in \mathcal{S}^*$ et l'on a $\Omega(X \times Y, (x_0, y_0)) = \Omega(X, x_0) \times \Omega(Y, y_0)$.

c. Si (E, $\underline{p}$, B) est un fibré, de fibre $F = \underline{p}^{-1}(b_0)$, $b_0 \in B_0$, et si $e_0 \in F_0$, $(\Omega(E, e_0), \Omega(\underline{p}), \Omega(B, b_0))$ est un fibré dont la fibre au-dessus de $s_0\, b_0$ est $\Omega(F, e_0)$.

3. 3. *Le foncteur* π_0.

a. Dans (X_0, x_0) on considère la relation $x \sim y$ s'il existe un 1-simplexe $\sigma \in X_1$ tel que $d_1\sigma = x$, $d_0\sigma = y$. On voit immédiatement que *si* X *est un complexe de Kan,* $\sim$ *est une relation d'équivalence.* On désigne par $\pi_0 (X, x_0)$ l'ensemble des classes d'équivalence. C'est un ensemble avec *point base*, le point base étant la classe d'équivalence de x_0. Si $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ est une application, on voit que f est compatible avec la relation $\sim$, et définit par passage aux quotients une application $\pi_0(f) : \pi_0(X, x_0) \to \pi_0(Y, y_0)$ compatible avec les points bases. Une telle application peut être appelée un *homomorphisme* d'ensembles avec points bases. On voit enfin que π_0 est un foncteur qui prend ses valeurs dans la catégorie des ensembles.

b. Les applications d'injection $x \to (x, y_0)$, $y \to (x_0, y)$ et les projections $(x, y) \to x$, $(x, y) \to y$, définissent, vu la fonctorialité de π_0 des homomorphismes.

$$\pi_0(X, x_0) \to \pi_0(X \times Y, (x_0. y_0)), \ \pi_0(Y, y_0) \to \pi_0(X \times Y, (x_0, y_0))$$
$$\pi_0(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_0(X, x_0) \times \pi_0(Y, y_0)$$

qui montrent que le dernier homomorphisme est une *bijection* d'ensembles avec points bases.

c. Soit $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, une suite d'ensembles avec points bases et d'homomorphismes. On dit que cette suite est exacte si $\mathrm{I}m(f) = \mathrm{Ker}(g)$, où l'on définit $\mathrm{Ker}(g)$ comme étant le sous-ensemble de B dont l'image par g est le point base de C. Avec les notations de 3. 2 *c* on voit alors que la suite $\pi_0(F, e_0) \to \pi_0(E, e_0) \xrightarrow{\pi_0(p)} \pi_0(B)$ est exacte, où la première flèche désigne l'homomorphisme induit par l'injection de la fibre F dans E.

d. Soient x et y deux éléments de $\Omega_0(X, x_0)$. x et y sont donc des 1-simplexes de X tels que, $d_0x = d_1x = d_0y = d_1y = x_0$. X étant un complexe de Kan, il existe un 2-simplexe $\sigma \in K_2$ tel que $d_2\sigma = x\, d_0\sigma = y$. On pose $d_1\sigma = x + y$. $d_1\sigma$ est un élément de $\Omega_0(X, x_0)$ qui dépend bien entendu du choix de σ.

Convention. — Si $x \in X_0$, on désignera par $\bar{x}$ sa classe d'équivalence dans $\pi_0(X, x)$.

On pose alors $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$, on vérifie cf. ([9], que cette opération est indépendante du choix de σ, et du choix de $\bar{x}$ et

$\bar{y}$ dans x et y, et que *muni de cette opération,* $\pi_0(\Omega(X, x_0), s_0 x_0)$ *est un groupe* (non commutatif en général) dont l'élément neutre *est le point base,* et que

$$\pi_0\Omega(f) : \pi_0(\Omega(X, x_0), s_0x_0) \to \pi_0(\Omega(Y, y_0), s_0y_0)$$

est un homomorphisme de groupes.

3. 4. *Groupes d'homotopie.* — On pose

$$\Omega^{n+1}(X, x_0) = \Omega(\Omega^n(X, x_0), s_0^n x_0) \quad (n \geqslant 0),$$
$$\Omega^0(X, x_0) = X; \qquad \Omega^{n+1}(X, A, x_0) = \Omega(\Omega^n(x, A, X_0)) \quad (n \geqslant 1).$$

a. Définition. On pose

$\pi_n(X, x_0) = \pi_0(\Omega^n(X_0, x_0), s_0{}^n x_0),$
$(n \geqslant 0) = n^{\text{ième}}$ groupe d'homotopie absolue
$\pi_n(X, A, x_0) = \pi_0(\Omega^n(X, A, x_0), s_0{}^n x_0),$
$(n \geqslant 1) = n^{\text{ième}}$ groupe d'homotopie relatif

$\pi_n(f) = \pi_0\Omega^n(f)$ pour f: $(X, x_0) \to (Y, y_0)$ ou $(X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$.
On voit alors que $\pi_n(X, x_0) = \pi_p(\Omega^q(X, x_0), s_0{}^q x)$ pour $p + q = n$ et que $\pi_n(X, A, x_0) = \pi_p(\Omega^q(X, A, x_0)\ s_0{}^q x)$ pour $d + q = n$; $q > 0$.
De plus $\pi_n(X, x_0, x_0) = \pi_n(X, x_0)$.

b. Théorème. — $\pi_n(X, x_0)$ *est un groupe pour* $n \geqslant 1$, $\pi_n(X, T, x_0)$ *est un groupe pour* $n \geqslant 2$. *Les homomorphismes* $\pi_n(f)$ *sont des homomorphismes de groupes pour* $n \geqslant 1$ *dans le cas absolu, pour* $n \geqslant 2$ *dans le cas relatif.*

π_n *est un foncteur du couple* (X, x_0) *dans le cas absolu, du triples* (X, A, x_0) *dans le cas relatif.*

De plus $\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0) \approx \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0)$.

Ce théorème est une conséquence immédiate des définitions et de 3. 3-*d*, 3. 3-*b*.

c. Suite exacte d'homotopie. — Soit A un complexe de Kan contenue dans X et $x_0 \in A \subset X$.

Soit i l'injection $(A, x_0) \to (X, x_0)$ et j l'injection

$$(X, x_0, x_0) \to (X, A, x_0).$$

On a vu dans 3. 2-*a* que $(\Omega(X, A, x_0), \underline{p}, A)$ est un fibré. La fibre de ce fibré (au-dessus de x_0) est $\Omega(X, x_0)$ et l'injection de la fibre dans l'espace total est $\Omega(j)$. Appliquons le foncteur

Ω^n à ce fibré : d'après 3. 2-*c* on a encore un fibré. Appliquons alors ce foncteur π_0 : d'après (3-2)*c* on a une *suite exacte :*

$$\pi_0(\Omega^{n+1}(X,x_0), s_0^{n+1}x_0) \xrightarrow{\pi_0\Omega^{n+1}(j)} \pi_0(\Omega^{n+1}(X, A, x_0), s_0^{n+1}x_0) \xrightarrow{\pi_0\Omega^n(\underline{p})} \pi_0(\Omega^n(A, x_0), s_0^n x_0)$$

c'est-à-dire, vu la définition des π_n : pour $n \geqslant 0$

$$\pi_{n+1}(X, x_0) \xrightarrow{\pi_{n+1}(j)} \pi_{n+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0)$$

où l'on a posé $\pi_0\Omega^n(\underline{p}) = \partial$ (*homomorphisme « bord »*).

Soit (Δ) la suite de groupes (ou d'ensembles avec points bases) et d'homomorphismes :

$$\cdots \pi_{n+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{\pi_n(i)} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{\pi_n(j)} \pi_n(X, A, x_0) \to \cdots$$
$$\to \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0) \xrightarrow{\pi_0(i)} \pi_0(X, x_0).$$

THÉORÈME. — *La suite* (Δ) *est exacte, et est un foncteur covariant du couple* (X, A).

Le caractère fonctoriel est évident. Le fait que la suite est exacte résulte d'un calcul explicite sans grandes difficultés. La définition même de ∂ fournit d'ailleurs directement une partie de la démonstration.

d. Suite exacte d'homotopie des fibrés. — Soit (E, $\underline{p}$, B) un fibré, F la fibre au-dessus de b_0, et $e_0 \in F_0$. Soit $\underline{p}'$ l'application (E, F) $\to$ (B, b_0) définie par $\underline{p}$.

PROPOSITION. — $\pi_n(\underline{p}') : \pi_n(E, F, e_0) \to \pi_n(B, b_0)$ *est un isomorphisme* pour $n \geqslant 1$.

Pour la démonstration voir [16].

Soit ∂' l'homomorphisme « bord » du couple (E, F). On définit $\partial : \pi_{n+1}(B, b_0) \to \pi_n(F, e_0)$ par $\partial = \partial' \circ \pi_n(\underline{p}')^{-1}$ on considère alors la suite des groupes (ou d'ensembles avec points bases) et d'homomorphismes

$$(\Delta) : \cdots \pi_{n-1}(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(F, e_0) \xrightarrow{\pi_n(i)} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{\pi_n(p)} \pi_n(B, b_0) \to \cdots$$
$$\to \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(F, e_0) \xrightarrow{\pi_0(i)} \pi_0(E, e_0) \xrightarrow{\pi_0(p)} \pi_0(B, b_0).$$

où i désigne l'injection F $\to$ E.

Le théorème 3. 4-*c* appliqué au couple (E, F) et ce qui précède démontre le :

Théorème. — *La suite* (Δ) *est exacte et est un foncteur covariant du fibré* (E, $\underline{p}$, B).

3. 5. On voit immédiatement sur les définitions que $\Omega_0^n(X, x_0)$ est l'ensemble des éléments $x \in X_n$ tels que $d_i x = s_0^{n-1} x_0$ pour $i = 0, \ldots, n$, et que $\Omega_1^n(X, x_0)$ est l'ensemble des éléments $x \in X_{n+1}$ tels que $d_0 x = d_1 x = \cdots = d_{n-1} x = s_0^n x_0$, $d_n d_{n+1} x = s_0^{n-1} x_0$. La relation $x \sim y$ dans $\Omega_0^n(X, x_0)$ s'exprime alors comme suit dans X : Soient x et $y \in X_n$ tels que $d_i x = d_i y = s_0^{n-1} x_0$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$. On dit que $x \underset{n}{\sim} y$ s'il existe un élément $\sigma \in X_{n+1}$ tel que $d_{n+1}\sigma = x$, $d_n \sigma = y$, $d_i \sigma = s_0^n x_0$ pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$.

$\pi_n(X, x_0)$ est alors défini comme ensemble quotient de l'ensemble des $x \in X_n$ tels que $d_i x = s_0^{n-1} x_0$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$ par la relation d'équivalence $\underset{n}{\sim}$.

La somme dans $\pi_n(X, x_0)$ est définie par passage au quotient par $\underset{n}{\sim}$ à partir de $(x, y) \to x + y$, où $x + y = d_n \sigma$, et où $\sigma \in X_{n+1}$ est tel que $d_{n+1}\sigma = x$, $d_{n-1}\sigma = y$, $d_i \sigma = s_0^n x_0$ pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$.

Pour définir $\pi_n(X, x_0)$, il suffit donc de considérer les éléments de X dont le $(n-1)$-squelette est réduit à $s_0^{n-1} x_0$.

Définition. — *Soit* $\mathcal{E}(X, x_0, n)$ *le sous-ensemble simplicial de* X *formé des éléments dont le* $(n-1)$-*squelette est réduit à* $s_0^{n-1} x_0$. $\mathcal{E}(X, x_0, n)$ *est le* n-*ième ensemble d'Eilenberg de* (X, x_0).

Si X est un complexe de Kan, il en est de même de $\mathcal{E}(X, x_0, n)$, et ce qui précède montre que :

Proposition. — $\pi_n(X, x_0) = \pi_n(\mathcal{E}(X, x_0, n), x_0)$.

Pour étudier π_n, on peut donc supposer que $X = \mathcal{E}(X, x_0, n)$ *cette convention sera toujours appliquée dans la suite.*

3. 6. *Le lemme d'addition.*

Lemme 1. — *Soient* $X (= \mathcal{E}(X, x_0, n))$ *un complexe de Kan,* $x \in X_{n+1}$ *et* $y_i \in X_n$ $(0 \leqslant i \leqslant n+1)$ *tels que* $d_i x \underset{n}{\sim} y_i$. *Il existe alors un élément* $y \in X_{n+1}$ *tel que* $d_i y = y_i$ *pour tout* i.

Démonstration. — Il suffit de démontrer le lemme dans le cas où $d_i x = y_i$ sauf pour un entier k, $0 \leqslant k \leqslant n+1$. Par hypothèse, il existe $Y_k \in X_{n+1}$ tel que $d_{n+1} Y_k = d_k x$, $d_n Y_k = y_k d_i Y_k = s_0^n x_0$ pour $i < n$.

Si $k \neq n+1$ on pose $z_i = d_i s_{n+1} x$ pour $i = 0, 1, \ldots, \hat{k}, \ldots, \widehat{n+1}, n+2$ et $z_k = Y_k$. Comme $d_i z_j = d_{j-1} z_i$ pour $i < j$, $i, j \neq k$, il existe un $z \in X_{n+2}$ tel que $d_i z = z_i$ pour $i \neq n+1$. $y = d_{n+1} z$ à la propriété demandée.

Si $k = n+1$ on pose $z_i = d_i s_n x$ pour $i = 0, \ldots, n-1, n+1$ et $z_{n+2} = Y_{n+1}$. Il existe encore une fois un $z \in X_{n+2}$ tel que $d_i z = z_i$ pour $i \neq n$. $y = d_n z$ à la propriété demandée.

Lemme 2. — *Soit $x \in X_{n+1}$ $(= \mathcal{E}_{n+1}(X, x_0, n))$ un élément tel que $d_{p+1} x = d_p x$ pour un entier $p < n-1$ $(n \geqslant 2)$ et $d_i x = s_0^n x_0$ pour $i \neq n+1$ n, $p+1$, p, alors $d_{n+1} x \underset{n}{\sim} d_n x$.*

Démonstration. — On pose $x_{n+2} = d_{n+2} s_n x$, $x_n = x$, $x_{p+1} = x_p = d_p s_{n-1} x$, $d_i x = s_0^n x_0$ pour $i \neq n+2, n+1, p+1, p$ et, si $p < n-2$, $x_{n-1} = d_p s_{p+1} x$. On vérifie que $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ pour $i < j$ et $i, j \neq n+1$. Il existe donc $y \in X_{n+2}$ tel que $d_i y = x_i$ pour $i \neq n+1$. Soit $z = d_{n+1} y$. $d_{n+1} z = d_{n+1} x$, $d_n z = d_n x$, $d_i z = s_0^{n-1} x_0$ pour $i < n$. Donc $d_{n+1} x \underset{n}{\sim} d_n x$.

Lemme 3. — *Soient $x \in X_{n+1} (= \mathcal{E}_{n+1}(X, x_0, n))$ et p un entier $< n-1$, $(n \geqslant 2)$. Il existe un $(n+1)$-simplexe $\tau \in X_{n+1}$ tel que $d_i \tau = d_i x$ pour $i \neq p$, $p+1$, $d_p \tau = s_0^n x_0$, $d_{p+1} \tau \in \overline{d_{p+1} x} - \overline{d_p x}$* (où, suivant la convention 3. 3-d $\bar{\alpha}$ désigne la classe d'équivalence de $\alpha \in X_n$ dans $\pi_n(X, x_0)$).

Démonstration. — Soit $\sigma_0 \in X_{n+1}$ tel que $d_{n+1} \sigma_0 = d_p x$, $d_n \sigma_0 = s_0^n x_0$, $d_i \sigma_0 = x_0$ pour $i < n-1$. Par définition $d_{n-1} \sigma_0 \in -\overline{d_p x}$.

Soit $\sigma_1 \in X_{n+1}$ tel que $d_{n+1} \sigma_1 = d_{p+1} x$, $d_{n-1} \sigma_1 = d_{n-1} \sigma_0$, $d_i \sigma_1 = s_0^n x_0$ pour $i < n-1$. Par définition $d_n \sigma_1 \in \overline{d_{p+1} x} - \overline{d_p x}$.

On pose alors :

$$y_{n+2} = x, \qquad y_{p+1} = \sigma_1, \qquad y_p = \sigma_0, \qquad y_i = s_n d_i x$$

pour $i \neq p$, $p+1$, n, $n+1$, $n+2$.

Entre ces y_j, $j \neq n$, $n+1$ on a les relations $d_i y_j = d_{j-1} y_i$ pour $i < j$, $i, j \neq n, n+1$. On cherche un y_n tel que $d_{n+1} y_n = d_n y_{n+2}$, $d_i y_n = d_{n-1} y_i$ pour $i < n$. Un tel y_n existe d'après la condition de Kan, puisque les simplexes du second membre ont leurs faces toutes égales (puisque $X = \mathcal{E}(X, x_0, n)$). Comme $d_{n-1} y_i = s_0^n x_0$ pour $i \neq p$, $p+1$, n, $n+1$, $n+2$ et que $d_p y_n = d_{p+1} y_n$ puisque $d_p y_n = d_{n-1} y_p = d_{n-1} \sigma_0$, $d_{p+1} y_n = d_{n-1} y_{p+1} = d_{n-1} \sigma_1$

et que $d_{n-1}\sigma_0 = d_{n-1}\sigma_1$, on peut appliquer le lemme 2 à y_n : $d_{n+1}y_n \underset{n}{\sim} d_n y_n$. C'est-à-dire : $d_n x \underset{n}{\sim} d_n y_n$; d'après le lemme 1, on peut alors choisir y_n de façon que $d_n y_n = d_n x$. Finalement, les $n+2$ simplexes y_i $i \neq n+1$ vérifient les relations $d_i y_j = d_{j-1} y_i$ pour $i < j$, $i, j, \neq n+1$ et $d_{n+1} y_n = d_n y_n = d_n x$. Il existe donc $z \in X_{n+2}$ tel que $d_i z = y_i$ pour $i \neq n+1$. On pose $\tau = d_{n+1} z$. τ à la propriété demandée.

THÉORÈME 1. — *Pour* $n \geqslant 2$, $\pi_n(X, x_0)$ *et* $\pi_{n+1}(X, A, x_0)$ *sont des groupes commutatifs.*

DÉMONSTRATION. — Il suffit de vérifier que $\pi_2(X, x_0)$ est commutatif.

Soient x et $y \in X_2$ $(= \mathcal{E}_2(X, x_0, 2))$. Il existe un simplexe $\sigma \in X_3$ dont les faces sont $d_2\sigma = x$, $d_1\sigma = x$, $d_0\sigma = y$, et un simplexe $\sigma' \in X_3$ dont les faces sont $d_3\sigma' = x$, $d_1\sigma' = y$, $d_0\sigma' = x$.

D'après le lemme 3, il existe un simplexe $\tau \in X_3$ tel que $d_3\tau = d_3\sigma$, $d_2\tau = d_2\sigma = x$, $d_1\tau \in \bar{x} - y$, $d_0\tau = s_0^2 x_0$. Par définition de l'addition, on a donc $\overline{d_2\sigma} + \bar{x} - y = \bar{x}$, soit

$$\overline{d_3\sigma} = x + \bar{y} - \bar{x}.$$

En appliquant le lemme 3 à σ', on voit que $\overline{d_2\sigma'} = \bar{x} + \bar{y} - \bar{x}$. On en déduit l'égalité $\overline{d_3\sigma} = \overline{d_2\sigma'}$, c'est-à-dire $d_3\sigma \sim d_2\sigma'$. D'après le lemme 1, on peut choisir σ' de façon que $d_2\sigma' = d_3\sigma$.

Soit alors $z \in X_3$ un simplexe tel que $d_3 z = x$, $d_1 z = y$, $d_0 z = s_0^2 x_0$ (on a : $d_2 z \in \bar{x} + \bar{y}$) et $z' \in X_3$ tel que $d_3 z' = y$, $d_1 z' = x$, $d_0 z' = s_0^2 x_0$ (on a $d_2 z' = \bar{y} + \bar{x}$). On pose $\mu_0 = z$, $\mu_1 = z'$, $\mu_2 = \sigma$, $\mu_4 = \sigma'$ on a $d_i u_j = d_{j-1}\mu_i$ pour $i < j$, i, j, $\neq 3$. Il existe donc $\mu \in X_4$ tel que $d_i\mu = \mu_i$ pour $i \neq 3$. On pose $\lambda = d_3\mu$. $d_0\lambda = d_0 d_3 \mu = d_2 d_0 \mu = d_2 \mu_0 = d_2 z$; de même $d_1\lambda = d_2 z'$, $d_2\lambda = d_3\lambda = x$; en appliquant le lemme 3 à λ on voit que $\bar{x} + \overline{d_2 z} - \overline{d_2 z'} = \bar{x}$, c'est-à-dire $\overline{d_2 z} = \overline{d_2 z'}$ soit $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$ C.Q.F.D.

THÉORÈME 2 (Lemme d'addition). — *Soit* $x \in X_{n+1}$ *un* $(n+1)$*-simplexe dont les* $(n-1)$*-faces sont égales à* $s_0^{n-1} x_0$. *Alors*

$$\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \overline{d_i x} = 0 \quad si \quad n > 1$$

et $$\overline{d_2 x} + \overline{d_0 x} - \overline{d_1 x} = 0 \quad si \quad n = 1.$$

Démonstration. — Si $n = 1$, le théorème ne fait qu'exprimer la définition de l'addition dans $\pi_1(X, x_0)$. Supposons donc $n > 1$. On applique à x le lemme 3 avec $p = 0$, puis au résultat le lemme 3 avec $p = 1$, et ainsi de suite jusqu'à $p = n - 2$. Le théorème s'en déduit par définition même de l'addition dans $\pi_n(X, x_0)$ en utilisant le théorème 1.

Proposition 1 (Réciproque du théorème 2). — *Soient* x_i, $(i = 0, \ldots, n + 1)$ *des* n*-simplexe de* X *dont les* $(n - 1)$*-faces sont égales à* $s_0^{n-1}x_0$ *tels que*

$$\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \bar{x}_i = 0 \text{ (resp. } \bar{x}_2 + \bar{x}_0 - \bar{x}_1 = 0) \quad si \quad n > 1 \text{(resp. } n = 1).$$

Il existe alors un $(n + 1)$*-simplexe* x *tel que* $d_ix = x_i$ *quel que soit* i.

Démonstration. — Il existe un $(n + 1)$-simplexe x' tel que $d_ix' = x_i$ pour $i > 0$ (puisque $d_ix_j = d_{j-1}\, x_i = s_0^{n-1}x_0$ *quels que soient* i *et* j) en appliquant le théorème 2 à x' on voit que $\overline{d_0x'} = \bar{x}_0$ donc $d_0x' \underset{n}{\sim} x_0$. On applique alors le lemme 1.

Théorème 3. — *Soient* f *et* g *deux applications* $(X, x_0) \to (X, y_0)$. *Si* $f \sim g$ rel. x_0, *alors* $\pi_n(f) = \pi_n(g)$.

Démonstration. — Soit $x \in X_n (= \mathcal{E}_n(X, x_0, n))$. Désignons par k_i les fonctions qui définissent l'homotopie $f \sim g$ rel. x_0 (cf. 1. 2) les relations de commutation entre les d_i et les k_j montrent que si on pose formellement $d = \Sigma(-)^i d_i$, $k = \Sigma(-)^i k_i$, on a formellement $dk + kd = g - f$.

On remarque que $k_id_jx = s_0^n y_0$ puisque k_i est une homotopie rel. x_0 et que $d_jx = s_0^{n-1}x_0$ (tout i, tout j). Pour la même raison $d_id_jk_rx = s_0^{n-1}y_0)$ (tout i, tout j, tout r); d_jk_rx est donc un générateur de $\pi_n(Y, y_0)$. D'après le théorème 2, $\sum_{i=0}^{i=n+1} (-1)^i \overline{d_ik_jx} = 0$ d'autre part $k_id_jx = s_0^n y_0$ signifie que $\overline{k_id_jx} = 0$. L'identité $dk + kd = g - f$ donne alors $\overline{g(x)} - \overline{f(x)} = 0$.

C.Q.F.D.

3. 7. Les générateurs de $\pi_n(X, x_0)$ sont d'après 3. 5 les $x \in X_n$ tels que $d_ix = s_0^{n-1}x_0$ pour $i = 0, \ldots, n + 1$. D'après 1. 1 f il revient au même de dire que les applications

$$(\Delta[n], \dot{\Delta}[n]) \to (X, x_0)$$

engendrent $\pi_n(X, x_0)$. De même, on peut dire que les générateurs de $\pi_n(X, A, x_0)$ sont les applications $(\Delta[n], \dot{\Delta}[n], \Lambda^0[n] \to (X, A, x_0)$. On a vu (2. 5 *corollaire*) que la relation homotopie rel. $\dot{\Delta}[n]$, ou rel. $(\dot{\Delta}[n], A, \Lambda^0[n], x_0)$ est une relation d'équivalence. *Cette relation coïncide en fait avec la relation introduite dans* 3. 3 en effet :

Théorème. — *Soit* $k : f \sim g$ rel. $\dot{\Delta}[n]$ *une homotopie entre applications* $(\Delta[n], \dot{\Delta}[n]) \to (X, x_0)$. *Alors* $f(\delta^n) \underset{n}{\sim} g(\delta^n)$. *Réciproquement si* x *et* $y \in X_n$ *sont tels que* $x \underset{n}{\sim} y$, *alors* $\tilde{x} \sim \tilde{y}$ rel. $\dot{\Delta}[n]$.

Démonstration. — Soient k_i les fonctions qui définissent l'homotopie k. Un raisonnement analogue à celui qui a été fait dans la démonstration du théorème 3 3. 6 montre que $\overline{k_i d_j \delta^n} = 0$, et que $d_j k_r \delta^n$ est un générateur de $\pi_n(X, x_0)$. Le lemme d'addition montre que $\sum_{i=1}^{n+1} \overline{(-1)^i d_i k_j \delta^n} = 0$ et l'identité $dk + kd = g - f$ entraîne alors $\overline{g(\delta^n)} - \overline{f(\delta^n)} = 0$ c'est-à-dire $g(\delta^n) \underset{n}{\sim} f(\delta^n)$.

Réciproquement supposons que $x \underset{n}{\sim} y$ c'est-à-dire qu'il existe $\sigma \in X_{n+1}$ tel que $d_{n+1}\sigma = x$, $d_n\sigma = y$ $d_i\sigma = s_0{}^n x_0$ pour $i < n$. On pose $k(a_i) = s_i y$ pour $i < n$ et $k(a_n) = \sigma$. On définit ainsi une homotopie $k : I \times \Delta[n] \to (X, x_0)$ d'après 1. 4. On vérifie sans difficulté que $k : \tilde{x} \sim \tilde{y}$ rel. $\dot{\Delta}[n]$.

Remarque 1. — On définit souvent les groupes d'homotopie en utilisant la relation rel $\dot{\Delta}[n]$, au lieu de celle qui a été introduite ici. Ce procédé à l'avantage de faire du théorème 3 3. 6 une évidence. Il a aussi l'inconvénient de supprimer la définition recurrente des groupes d'homotopie $\pi_n(X) = \pi_{n-1}(\Omega X)$ obligeant ainsi de faire les démonstrations pour tous les n, et de ne pas montrer que les groupes d'homotopie relatifs sont les groupes d'homotopie absolus du complexe $\Omega(X, A, x_0)$.

Remarque 2. — On voit facilement que si f et g :

$$(X, x_0) \to (Y, y_0)$$

sont $\sim$ rel x_0 alors $\pi_0(f) = \pi_0(g)$. Il est au contraire difficile

de montrer que $\Omega(f)$ et $\Omega(g)$ sont homotopes rel $s_0 x_0$. Comme cette démonstration ne permet pas d'avoir facilement le lemme d'addition, on a préféré ne pas la donner et obtenir le théorème 3 3. 6 comme corollaire immédiat de ce lemme fort utile dans la suite.

4. — Groupes d'homotopie (2^e définition).

L'équivalent topologique de la 1^{re} définition des groupes d'homotopie est bien entendu le suivant : si (E_n, S_{n-1}) désigne le couple formé par une n-boule et son bord, $\pi_n(X, x_0)$ est l'ensemble quotient de l'ensemble des applications continues $(E_n, S_{n-1}) \to (X, x_0)$ par la relation d'équivalence définie par l'homotopie rel S_{n-1}. On sait que l'on peut aussi définir $\pi_n(X, x_0)$ comme le quotient de l'ensemble des applications continues $(S_n, y_0) \to (X, x_0)$ par la relation d'équivalence définie par l'homotopie rel y_0 (y_0 point base de la n-sphère S_n).

Un équivalent simplicial de cette propriété peut être défini : c'est le but de ce paragraphe. X désignera un complexe de Kan, et x_0 un point base.

4. 1. Définition. — *Soit* $\tilde{\pi}_n(X, x_0)$ *l'ensemble des classes d'équivalences d'applications* $(\dot{\Delta}[n+1], 0) \to (X, x_0)$ *pour la relation* $\sim$ *rel* 0. (*C'est une relation d'équivalence d'après* 2. 5 *corollaire*).

4. 2. Lemme. — *Toute application* $f : (\dot{\Delta}[n+1], 0) \to (X, x_0)$ *est homotope* rel 0 *à une application*

$$\lambda(f) : (\dot{\Delta}[n+1],\ \Lambda^0[n+1]) \to (X,\ x_0).$$

Démonstration. — L'application $\omega_{n+1} : I \times \Delta[n+1] \to \Delta[n+1]$ induit une application encore notée

$$\omega_{n+1} : I \times \Lambda^0[n+1] \to \Lambda^0[n+1]$$

considérons alors l'application composée

$$I \times \Lambda^0[n+1] \xrightarrow{\omega_{n+1}} \Lambda^0[n+1] \xrightarrow{f} X$$

d'après le théorème d'extension des homotopies (2. 3 corollaire 1) il existe une homotopie $K : I \times \dot{\Delta}[n+1] \to X$ qui pro-

longe $f \circ \omega_{n+1}$, et telle que $K \circ \varepsilon_1 = f$. On pose $\lambda(f) = K \circ \varepsilon_0 : \dot{\Delta}[n+1] \to X$. On a :

$K(\alpha, 0) = f \circ \omega_{n+1} (\alpha, 0) = f(0) = x_0$ pour $\alpha \in I$ car $0 \in \Lambda^0[n+1]$ de plus :

$$\lambda(f)(\beta) = K(0, \beta) = f \circ \omega_{n+1} (0, \beta) = f(0) = x_0 \text{ pour } \beta \in \Lambda^0[n+1]$$

donc $K : \lambda(f) \sim f$ rel 0 et

$$\lambda(f) : (\dot{\Delta}[n+1], \Lambda^0[n+1]) \to (X, x_0).$$

C.Q.F.D.

4. 3. Lemme. — *Soient f et f' deux applications* $(\dot{\Delta}[n+1], \Lambda^0[n+1]) \to (X, x_0)$; *S'il existe une homotopie $k : f \sim f'$* rel 0, *il existe une homotopie $f \sim f'$ rel* $\Lambda^0[n+1]$.

Démonstration. — Soit $k' : I \times \dot{\Delta}[n+1] \to X$ l'homotopie définie par $k'(\alpha, \beta) = f(\beta)$ pour $\alpha \in I$, $\beta \in \dot{\Delta}[n+1]$. k et k' coïncident sur $Y = (I \times \Lambda^0[n+1]) \cup (0 \times \dot{\Delta}[n+1])$ et induisent donc une application $f \colon Y \to X$ ($f = k|Y = k'|Y$). On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d] & X \\ I \times \dot{\Delta}[n+1] \arrow[ur, shift left, "k'"] \arrow[ur, shift right, "k"'] & \end{tikzcd}$$

La proposition (2-5) (avec B réduit à un point) montre qu'il existe une homotopie $h : k' \circ \varepsilon_1 \sim k \circ \varepsilon_1$, stationnaire sur $\Lambda^0[n+1]$; comme $k' \circ \varepsilon_1 = f$, $k \circ \varepsilon_1 = f'$, et que $h(\alpha, \beta) = f(\beta) = f'(\beta) = x_0$ pour $\beta \in \Lambda^0[n+1]$, le lemme est démontré.

4. 4. Soit f une application $(\dot{\Delta}[n+1], 0) \to (X, x_0)$ et $\lambda(f)$ une application homotope à f rel 0 satisfaisant à la condition du lemme 4. 2. L'application $\lambda(f) \circ \widetilde{d_0\delta^{n+1}} : \Delta[n] \to X$ est en fait une application $(\Delta[n], \dot{\Delta}[n]) \to (X, x_0)$ car

$$\lambda(f)\,(\widetilde{d_0\delta^{n+1}\, d_i\delta^n}) = \lambda(f)\,(d_i d_0 \delta^{n+1}) = \lambda(f)\, d_0 d_{i+1}\, \delta^{n+1}) = x_0.$$

Si $\lambda'(f)$ est une autre application satisfaisant à la condition du lemme 4. 2, $\lambda'(f)$ et $\lambda(f)$ sont homotopes rel 0 puisque $\sim$ rel 0 est une relation d'équivalence (cf. 2. 5 corollaire).

D'après 4. 3, on a $\lambda'(f) \sim \lambda(f)$ rel Λ^0 $[n+1]$ et finalement $\lambda'(f) \circ \widetilde{d_0\delta^{n+1}} \sim \lambda(f) \circ \widetilde{d_0\delta^{n+1}}$ rel $\dot{\Delta}[n+1]$.

Autrement dit, compte tenu du théorème 3. 7, on a défini une correspondance qui a f fait correspondre un élément de π_n (X, x_0) à savoir

$$f \to \overline{\lambda(f)\ (d_0\delta^{n+1})}$$

cette correspondance ne dépendant pas du choix particulier de l'application f.

Soient f et f' : $(\dot{\Delta}[n+1], 0) \to (X, x_0)$ deux applications homotopes rel 0. $\lambda(f)$ et $\lambda(f')$ sont aussi homotopes rel 0, et le raisonnement précédent prouve que f et f' ont même image dans $\pi_n(X, x_0)$.

On a donc définit une application $\mu : \tilde{\pi}_n(X, x_0) \to \pi_n$ (X, x_0).

4. 5. Théorème. — *L'application* $\mu : \tilde{\pi}_n(X, x_0) \to \pi_n(X, x_0)$ *est bijective.*

Démonstration. — *a.* μ *est injective. Soient* f *et* f' :

$$(\dot{\Delta}[n+1], 0) \to (X, x_0)$$

deux applications telles que $\overline{\lambda(f)\ (d_0\delta^{n+1})} = \overline{\lambda(f')\ (d_0\delta^{n+1})}$. Il existe donc une homotopie k : $(I \times \Delta[n], I \times \dot{\Delta}[n]) \to (X, x_0)$ telle que $k \circ \varepsilon_0 = \lambda(f)$, $k \circ \varepsilon_1 = \lambda(f')$. Les deux applications

$$I \times \Lambda^0[n+1] \to x_0 \quad \text{et} \quad I \times \Lambda^{1, \dots, n+1}[n+1] \to X$$

où la seconde est égale à $k \circ (\mathrm{id} \times d_0\delta^{n+1})$, coïncident sur l'intersection de leurs domaines de définition, et définissent donc une application h : $I \times \dot{\Delta}[n+1] \to X$. On voit immédiatement que $h : \lambda(f) \sim \lambda(f')$ rel 0. Comme $\sim$ rel 0 est une relation d'équivalence, on a aussi $f \sim f'$ rel 0.

b. μ *est surjective.* Soit $u : (\Delta[n], \dot{\Delta}[n]) \to (X, x_0)$ une application. On définit une application f: $(\dot{\Delta}[n+1], 0) \to (X, x_0)$ en posant $f(d_i\delta^{n+1}) = x_0$ pour $i > 0$, $f(d_0\delta^{n+1}) = u(\delta^n)$.

On peut prendre $\lambda(f) = f$. Alors $\lambda(f) \circ \widetilde{d_0\delta^{n+1}} = u$.

Convention. — On identifiera toujours les éléments de $\tilde{\pi}_n(X, x_0)$ avec les éléments correspondants de $\pi_n(X, x_0)$ à l'aide de μ. En particulier, si f désigne une application

$\dot{\Delta}([n+1], 0) \to (X, e)$, $\bar{f}$ désignera sa classe d'homotopie dans π_n (ou $\bar{\pi}_n$).

4. 6. Soit f une application $(\dot{\Delta}[n+1], \ddot{\Delta}[n+1]) \to (X, x_0)$; pour $i = 0, \ldots, n+1$, $f \circ \widetilde{d_i \delta^{n+1}}$ est une application

$$(\Delta[n], \dot{\Delta}[n]) \to (X, x_0),$$

donc un générateur de $\pi_n(X, x_0)$. Comme $0 \in \ddot{\Delta}[n+1]$, f est aussi un générateur de $\pi_n(X, x_0)$.

Lemme.

$$\bar{f} = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \overline{f \circ d_i \delta^{n+1}} \qquad pour \qquad n > 1$$

et
$$\bar{f} = \overline{f(d_2\delta^2)} + \overline{f(d_0\delta^2)} - \overline{f(d_i\delta^2)} \qquad pour \qquad n = 1.$$

Démonstration. — On reprend l'homotopie K du lemme 4. 2, qui prolonge $f \circ \omega_{n+1}$, et on considère les fonctions K_i associée à l'homotopie K.

On a alors $d_0K_0d_0\delta^{n+1} = f(d_0\delta^{n+1})$, $d_{i+1}K_0d_0\delta^{n+1} = f(d_{i+1}\delta^{n+1})$ pour $i > 0$; $d_0K_1d_0\delta^{n+1} = f(d_1\delta^{n+1})$, $d_1K_1d_0\delta^{n+1} = d_1K_0d_0\delta^{n+1}$, $d_{i+1}K_1\, d_0\delta^{n+1} = x_0$ pour $i > 1$.

Si $n = 1$ on en tire $\overline{dK_0d_0\delta^2} = \overline{f(d_2\delta^2)} + \overline{f(d_0\delta^2)}$,

$$\overline{d_1K_1d_0\delta^2} = \overline{d_2K_1d_0\delta^{n+1}} + \overline{f(d\delta^2)} = \bar{f} + \overline{f(d_1\delta^2)}$$

puisque $d_2K_1\, d_0\delta^{n+1} = \lambda(f)d_0\delta^{n+1}$; d'où le lemme puisque

$$d_1K_1 = d_1K_0.$$

Si $n > 1$, on continue et on voit que pour $q > 1$,

$$d_qK_qd_0\delta^{n+1} \underset{n}{\sim} d_{q+1}K_qd_0\delta^{n+1}.$$

Comme $d_qK_q = d_qK_{q-1}$ on en déduit que

$$\bar{f} = \overline{d_{n+1}K_{n+1}d_0\delta^{n+1}} = \overline{d_2K_1d_0\delta^{n+1}}$$

le lemme d'addition appliqué à $K_1\, (d_0\delta^{n+1})$ et à $K_0(d_0\delta^{n+1})$ donne alors le résultat.

Proposition. — *Soient* $f : (\ddot{\Delta}[n+2], 01) \to (X, x_0)$ *une application* (*où* 01 *désigne le* 1-*simplexe* $d_2 \ldots d_{n+2}\delta^{n+2}$, *et* $f_i = f \circ \widetilde{d_i\delta^{n+2}} : (\dot{\Delta}[n+1], 0) \to (X, x_0)$; *alors* $\sum_{i=0}^{n+2} (-1)^i \bar{f}_i = 0$ pour $n > 1$ *et* $\bar{f}_3 + \bar{f}_1 - \bar{f}_2 - \bar{f}_0 = 0$ *pour* $n = 1$.

Démonstration. — Soit Λ l'ensemble simplicial engendré par les n-faces $d_i d_j\,\delta^{n+2}$ où $0 < i \leqslant j \leqslant n+2$. Il existe une homotopie $K : I \times \ddot{\Delta}[n+2] \to X$ qui prolonge $f \circ \omega_{n+2} : I \times \Lambda \to X$ et telle que $K \circ \varepsilon_1 = f$ (cf. 2. 3 corollaire 1). Posons alors $\lambda(f) = K \circ \varepsilon_0 : \ddot{\Delta}[n+2] \to X$. En comparant la construction qui vient d'être faite à celle du lemme 4. 2. on voit que

$$\lambda(f) \circ \widetilde{d_{i+1}\delta^{n+2}} = \lambda(f_{i+1}) \quad \text{pour} \quad i \geqslant 0.$$

Rappelons que, par définition, on a : $\bar{f}_{i+1} = \overline{\lambda(f_{i+1}) \circ \widetilde{d_0\delta^{n+1}}}$ et que $d_0 d_{i+1} = d_i d_0$ pour $i \geqslant 0$. Alors $\bar{f}_{i+1} = \overline{g \circ \widetilde{d_i\delta^{n+1}}}$ où $g = \lambda(f) \circ \widetilde{d_0\delta^{n+2}} : (\dot{\Delta}[n+1], \ddot{\Delta}[n+1]) \to (X, x_0)$. D'après le lemme 4. 6 on a (si $n > 1$) $\bar{g} = \Sigma(-1)^i \bar{f}_{i+1}$; pour démontrer la proposition, il suffit donc de montrer que $\bar{g} = \bar{f}_0$, ce qui est bien vrai puisque $K \circ \left(\mathrm{id} \times \widetilde{d_0\delta^{n+2}}\right) : I \times \dot{\Delta}[n+1] \to X$ est une homotopie $g \sim f$ rel 0.

4. 7. Proposition. — *La condition nécessaire et suffisante pour que $f : (\dot{\Delta}[n+1], 0) \to (X, x_0)$ soit prolongeable à $\Delta[n+1]$ est que $\bar{f} = 0$.*

Démonstration. — Supposons que f soit prolongeable à $\Delta[n+1]$. Alors $f \circ \omega_{n+1}$ est une homotopie $(I \times \Delta[n+1], I \times 0) \to (X, x_0)$, et $f \circ \omega_{n+1} \circ \varepsilon_0 : \Delta[n+1] \to x_0$. Donc

$$\lambda(f) = f \circ \omega_{n+1} \circ \varepsilon_0 | \dot{\Delta}[n+1] : \dot{\Delta}[n+1] \to x_0.$$

Autrement dit $\bar{f} = 0$.

Supposons que $\bar{f} = 0$ comme $\lambda(f) \sim f$ rel 0, on a aussi $\overline{\lambda(f)} = 0$. D'après 3. 6 (proposition 1) $\lambda(f)$ est prolongeable à $\Delta[n+1]$. Soit $F : (I \times \dot{\Delta}[n+1]) \cup (0 \times \Delta[n+1]) \to X$ l'application égale à $\lambda(f)$ sur $0 \times \Delta[n+1]$ et à K (notation du lemme 4. 2.) sur $I \times \dot{\Delta}[n+1]$. D'après 2. 3 corollaire 1, on peut prolonger F en une application $H : I \times \Delta[n+1] \to X$. Alors $H \circ \varepsilon_1 : \Delta[n+1] \to X$ prolonge f.

CHAPITRE II

CATÉGORIES AVEC MODÈLES

5. — Définitions et exemples.

5. 1. *a.* Soit $\mathcal{A}$ une catégorie, et $\mathcal{M}$ une sous catégorie pleine de $\mathcal{A}$ (*i-e* les objets de $\mathcal{M}$ sont des objets de $\mathcal{A}$, les morphismes de $\mathcal{M}$ sont les morphismes de $\mathcal{A}$ entre objets de $\mathcal{M}$). Les objets de $\mathcal{M}$ sont appelés des *modèles*, et le couple $(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ est une *catégorie avec modèles.*

b. Fonctions de dégénérescence. Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ une catégorie avec modèles. Soient α et β deux fonctions qui à tout morphisme dont la source est un modèle font correspondre un morphisme dont la source est un modèle. On dira que α et β sont des fonctions de dégénérescence si

$$\alpha(1_M) = \beta(1_M) = 1_M \tag{0}$$

pour tout modèle M.

$$\beta(u)\alpha(u) = u \tag{1}$$

pour tout morphisme u dont la source est un modèle (en particulier on veut que le but de $\alpha(u)$ soit aussi un modèle).

$$\alpha(\beta(u)) = \beta(\alpha(u)) = 1_{M'} \tag{2}$$

où M′ est le but de $\alpha(u)$ et la source de $\beta(u)$.

$$\beta(fu) = \beta(f\beta(u)) \tag{3}$$

pour tout morphisme f dont la source est le but de u.

$$\alpha(fu) = \alpha(f\beta(u))\alpha(u). \tag{4}$$

On peut exprimer les conditions (1, 3, 4) en disant que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & M' \arrow[rr, "\alpha(f\beta(u))"] \arrow[d, "\beta(u)"'] & & M'' \arrow[d, "\beta(fu) = \beta(f\beta(u))"] \\
M \arrow[ur, "\alpha(u)"] \arrow[urrr, "\alpha(fu)"'] \arrow[r, "u"'] & A \arrow[rr, "f"] & & B
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Ces conditions entrainent que $\beta(\beta(u)) = \beta(u)$ et que $\alpha(\alpha(u) = \alpha(u)$.

Un morphisme u: $M \to A$ ou $M \in \mathfrak{M}$ est dit *non dégénéré* si $\beta(u) = u$ (et donc $\alpha(u) = 1_M$), *dégénéré* dans le cas contraire.

Convention et notation. — Soit A un objet quelconque de $\mathcal{A}$ on supposera toujours que les morphismes non dégénérés dont la source est un objet de $\mathfrak{M}$ et dont le but est A. forment un *ensemble* que l'on notera S(A) (ceci est toujours vérifié si les objets de $\mathfrak{M}$ forment un ensemble).

c. Soit Λ un anneau commutatif à élément unité. On désigne par $\mathcal{G}_\Lambda$: la catégorie des Λ-modules et des homomorphismes de Λ-modules.

$\mathcal{G}^*_V$ ou $\mathcal{G}_{*\Lambda}$: la catégorie des Λ-modules gradués par des degrés $\geqslant 0$ et des homomorphismes de degré zéro.

$d\mathcal{G}^*_\Lambda$(resp. $d\mathcal{G}_{*\Lambda}$) la catégorie des Λ-modules différentiels gradués dont la différentielle est de degré $+ 1$ (resp $- 1$) et des homomorphismes de degré zéro qui commutent à la différentielle.

H^* (resp H_*) le foncteur cohomologie $d\mathcal{G}^*_\Lambda \to \mathcal{G}^*_\Lambda$ (resp. le foncteur homologie $d\mathcal{G}_{*\Lambda} \to \mathcal{G}_{*\Lambda}$).

d. Si K est un foncteur dont la source est $\mathcal{A}$ et le but l'une des catégories précédentes, on définit, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $M \in \mathfrak{M}$, u: $M \to A \in S(A)$, l'ensemble $K(M, u)$ comme étant l'ensemble des couples (x, u) où $x \in K(M)$. Les deux bijections $i(u)$: $K(M) \to K(M, u)$; $j(u)$: $K(M, u) \to K(M)$ définies par $i(u)x = (x, u)$; $j(u)$ $(x, u) = x$ permettent de donner à $K(M, u)$ la structure de $K(M)$.

5. 2. *Le foncteur $\hat{K}$ et la transformation naturelle Γ_K.*

a^*. Soit K un foncteur contravariant $\mathfrak{A} \to \mathcal{G}_\Lambda$. On pose :

$$\hat{K}(A) = \prod_{u \in S(A)} K(M, u) \quad \text{pour} \quad A \in \mathfrak{A},\ M \in \mathfrak{M},\ u : M \to A \in S(A),$$

et on note $\tau(u)$ la projection $\hat{K}(A) \to K(M, u)$. Soit

$$\hat{K}(f) : \hat{K}(B) \to \hat{K}(A)$$

l'application définie par

$$\hat{K}(f)\varphi = (i(u)K(\alpha(fu))j(\beta(fu))\tau(\beta(fu)\varphi)_{u \in S(A)})$$

pour tout f: $A \to B \in \mathfrak{A}$, tout $\varphi \in \hat{K}(B)$.

$\hat{K}$ est un foncteur contravariant $\mathfrak{A} \to \mathcal{G}_\Lambda$.

On définit une transformation naturelle de foncteurs $\Gamma_K : K \to \hat{K}$ en posant $\Gamma_K(A)x = \big((i(u)K(u)x)_{u \in S(A)}\big)$ pour $x \in K(A)$.

Soit $T : K \to L$ une transformation naturelle de $\mathcal{G}_\Lambda$-foncteurs. On pose, pour tout objet $A \in \mathfrak{A}$, tout $\varphi \in \hat{K}(A)$.

$\hat{T}(A)\varphi = \big((i(u)T(M)j(u)\tau(u)\varphi)_{u \in S(A)}\big)$ ou M est la source de u. $\hat{T}(A)$ est un homomorphisme $\hat{K}(A) \to \hat{L}(A)$ et T une transformation naturelle $\hat{K} \to \hat{L}$. De plus

$$\hat{T}\Gamma_K = \Gamma_L T.$$

b^*. Soit K^* un foncteur contravariant $\mathfrak{A} \to \mathcal{G}^*_\Lambda$ et $K^n : \mathfrak{A} \to \mathcal{G}_\Lambda$ le foncteur induit par K^* en degré n.

La collection $(\hat{K}^n)$ est un foncteur contravariant $\mathfrak{A} \to \mathcal{G}^*_\Lambda$ que l'on désignera par $\hat{K}^*$.

La collection (Γ_{K^n}) est une transformation naturelle $\hat{K}^* \to \hat{L}^*$ que l'on désignera par Γ_{K^*}.

Si K^* est un foncteur contravariant $\mathfrak{A} \to d\mathcal{G}^*_\Lambda$, la différentielle $d : K^n \to K^{n+1}$ est une transformation naturelle de $\mathcal{G}_\Lambda$-foncteurs. Donc $\hat{d} : \hat{K}^n \to \hat{K}^{n+1}$ est une transformation naturelle de $\mathcal{G}_\Lambda$-foncteurs. Donc $\hat{d}$: $\hat{K}^n \to \hat{K}^{n+1}$ est une transformation naturelle telle que $\hat{d}\Gamma_{K_n} = \Gamma_{K^{n+1}}d$, et par conséquent $\hat{K}$ *est un* $d\mathcal{G}^*_\Lambda$-*foncteur et* Γ_{K^*} une *transformation naturelle de* $d\mathcal{G}^*_\Lambda$-*foncteurs.*

a_*. Soit de même K un foncteur covariant $\mathfrak{A} \to \mathcal{G}_\Lambda$. On pose

$$\hat{K}(A) = \sum_{u \in S(A)} K(M, u), \quad \hat{K}(f)|K(M, u) = i(\beta(fu))K(\alpha(fu))j(u)$$

pour $f : A \to B \in \mathfrak{A}$, $u : M \to A \in S(A)$ et

$$\Gamma_K(a)|K(M, u) = K(u)j(u).$$

$\hat{K}$ est un foncteur covariant $\mathfrak{A} \to \mathcal{G}_\Lambda$ et $\Gamma_K : \hat{K} \to K$ une transformation naturelle. Si $T : K \to L$ est une transformation naturelle, on pose $\hat{T}(A)|K(M, u) = i(u)T(M)j(u)$. $\hat{T}$ est alors une transformation naturelle $\hat{K} \to \hat{L}$. de plus $T\Gamma_K = \Gamma_L\hat{T}$.

b_*. On définit $\hat{K}_*$ et Γ_{K_*} comme dans b^*. On voit encore que si K_* est un $d\mathcal{G}_{*\Lambda}$-foncteur il en est de même de $\hat{K}_*$, et Γ_{K_*} est une transformation naturelle de $d\mathcal{G}_{*\Lambda}$-foncteurs.

5. 3. *Foncteurs représentables.* — On dit qu'un foncteur contravariant $K^* : \mathfrak{A} \to \mathcal{G}^*_\Lambda$ (resp. covariant $K_* : \mathfrak{A} \to \mathcal{G}_{*\Lambda}$) est *représentable* s'il existe une transformation naturelle χ_{K^*} : $\hat{K}^* \to K^*$ telle que $\chi_{K^*}\Gamma_{K^*} =$ identité (resp. $\chi_{K_*} : K_* \to \hat{K}_*$ telle que $\Gamma_{K^*}\chi_{K_*} =$ identité).

Si K^* est un $d\mathcal{G}^*_\Lambda$-foncteur (resp. $d\mathcal{G}_{*\Lambda}$) on dit qu'il est représentable, s'il est représentable en tant que $\mathcal{G}^*_\Lambda$-foncteur (resp. $\mathcal{G}_{*\Lambda}$).

5. 4. *Foncteurs acycliques, foncteurs acycliques sur les modèles.*

a^*. Soit K^* un foncteur contravariant $\mathfrak{A} \to d\mathcal{G}^*_\Lambda$. On dit qu'il est acyclique s'il existe des transformations naturelles de $\mathcal{G}_\Lambda$-foncteurs $U^n : K^n \to K^{n-1}$ $(n > 0)$; $\eta : K^0 \to H^0K$ telles que

$$dU^n + U^{n+1}d = \text{identité} \quad (n > 0)$$
$$U^1d = id - \varepsilon\eta$$

où ε est la transformation naturelle $H^0K \to K^0$.

On note que $\varepsilon \circ \eta \circ \varepsilon = (1 - U^1d) \circ \varepsilon = \varepsilon$ car $d \circ \varepsilon = 0$. Comme ε est injectif ou en déduit que $\eta \circ \varepsilon =$ identité.

a_*. Soit K_* un foncteur covariant $\mathfrak{A} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$. On dit qu'il est acyclique s'il exite des transformations naturelles de $\mathcal{G}_\Lambda$-foncteurs $U_n : K_n \to K_{n+1}$ $(n \geqslant 0)$, $\eta : H_0K \to K_0$ telles que

$$dU_n + U_{n-1}d = \text{identité} \ (n > 0)$$
$$dU_0 = id - \eta\varepsilon$$

où ε est la transformation naturelle $K_0 \to H_0K$. Comme $\varepsilon \circ \eta \circ \varepsilon = \varepsilon(1 - dU_0) = \varepsilon$ car $\varepsilon d = 0$ et comme ε est surjectif, on a $\varepsilon\eta =$ identité.

b. Soit $\mathfrak{M}^\alpha$ la sous catégorie de $\mathfrak{M}$ dont les objets sont ceux de $\mathfrak{M}$ et les morphismes sont du type $\alpha(u)$ où u est un morphisme dont la source est dans $\mathfrak{M}$.

On dit que K^* (resp. K_*) est acyclique sur les modèles, si la restriction de K^* (resp. K_*) à la catégorie $\mathfrak{M}^\alpha$ est acyclique.

5. 5. Un exemple. — Soit $\mathfrak{M}$ la sous catégorie pleine de $\mathcal{S}$ (cf. 1. 1. — *g*) dont les objets sont les $\Delta[n]$ $(n \geqslant 0)$. On pose, pour toute application $u : \Delta[n] \to X \in \mathcal{S}$:

$$\alpha(u) = \widetilde{s_{i_1}} \ldots \widetilde{s_{i_k}\delta^{n-k}}, \quad \beta(u) = \tilde{y}, \quad \text{si} \quad u(\delta^n) = s_{i_1} \ldots s_{i_k}\, y$$

avec y non dégénéré et $i_1 > \cdots > i_k$ (cf. 1. 1. *c*). En particulier $u \in S(X)$ si et seulement si $u(\delta^n) = y$. α et β sont des fonctions de dégénérescence.

Soit C_* le foncteur $\mathcal{S} \to d\mathcal{G}_*$ des chaînes normalisées, *i.e.* $C_*(X)$ est le quotient du groupe gradué abelien libre engendré par X par le sous groupe engendré par les éléments dégénérés de X; la différentielle d de $C_*(X)$ est définie par passage au quotient à partir de la différentielle $\Sigma(-1)^i d_i$ du groupe abelien libre engendré par X; si $f : X \to Y \in \mathcal{S}$ on définit $C_*(f)$: $C_*(X) \to C_*(Y)$ comme étant l'application naturelle induite par f.

$C_*(X)$ est le groupe abelien libre engendré par les éléments non dégénérés de X. Si $x \in X$ est non dégénéré, on représentera encore par x l'élément de $C_*(X)$ qu'il définit.

Soient f et g deux applications $X \to Y$ homotopes par une homotopie $k : I \times X \to Y$ et soient $k_i : X_p \to Y_{p+1}$ les fonctions associées à k. Les k_i induisent des fonctions encore notées k_i de $C_p(X)$ dans $C_{p+1}(Y)$. On pose $U_p = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i k_i$

On a alors $dU_p + U_{p-1}\, d = C_p(g) - C_p(f)$ pour $p > 0$ et $dU_0 = C_0(g) - C_0(f)$ donc

Lemme. — *Si f et g sont homotopes dans $\mathcal{S}$, $C_*(f)$ et $C_*(g)$ sont homotopes dans $d\mathcal{G}_{*Z}$ où Z désigne l'anneau des entiers.*

Proposition. — C_* *est représentable et acyclique sur les modèles.*

Démonstration. — *a.* On pose $\chi_{C_n} x = (\delta^n, \tilde{x})$ pour tout $x \in X_n$ non dégénéré. χ_{C_*} est une transformation naturelle

$C_* \to C_*$ et $\Gamma_{C_n}\chi_{C_n} x = \Gamma_{C_n}(\delta^n, \tilde{x}) = C_n(\tilde{x})j(\tilde{x})(\delta^n, \tilde{x}) = C_n(\tilde{x})\delta^n = x$. Donc $\Gamma_{C_*}\chi_{C_*} =$ identité et C est représentable.

b. Soit ω_n l'homotopie $I \times \Delta[n] \to \Delta[n]$ de 1. 4; comme $\omega_n \circ \varepsilon_0 : \Delta[n] \to O_n$ et $\omega_n \circ \varepsilon_1 =$ identité, le lemme 5. 5 montre que

$$dU_p(\Delta[n]) + U_{p-1}(\Delta[n])d = 1_{C_p(\Delta[n])} \quad \text{pour} \quad p < 0$$
$$dU_0(\Delta[n])x = x - \varkappa(x)O_n \quad \text{pour} \quad x \in C_0(\Delta[n])$$

en désignant par $\varkappa(x)$ l'indice de Kronecker de x. Si z est une 1-chaîne, alors $dU_1(\Delta[n])z + U_0(\Delta[n]dz = z$ donc $dU_0(\Delta[n])dz = dz$. Autrement dit, $\varkappa(dz) = 0$. On définit alors

$$\eta(\Delta[n]) : H_0C_*(\Delta[n]) \to C_0(\Delta[n])$$

par $\eta\varepsilon x = \varkappa(x)O_n$. On a alors

$$dU_0(\Delta[n]) = 1_{C_0(\Delta[n])} - \eta(\Delta[n])\varepsilon(\Delta[n]).$$

D'autre part on voit immédiatement que η est une transformation naturelle $H_0C_*|\mathfrak{M}^\alpha \to C_0|\mathfrak{M}^\alpha$, et on remarque que la relation 1. 4 iii se traduit par le fait que U_p est une transformation naturelle $C_p|\mathfrak{M}^\alpha \to C_{p+1}|\mathfrak{M}^\alpha$.

5. 6. *Catégories indicées.* — Soient $(\mathcal{A}, \mathfrak{M}, \alpha, \beta)$ une catégorie avec modèles et fonctions de dégénérescences, et A un objet de $\mathcal{A}$. On appellera catégorie indicée la catégorie $\mathcal{A}_A$ dont les objets sont des couples (B, x) où $B \in \mathcal{A}$ et $x : B \to A \in \mathcal{A}$, et les morphismes des diagrammes commutatifs dans $\mathfrak{A}$:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "x"] & \\ C \arrow[r, "y"'] & A \end{tikzcd} : (B, x) \to (C, y)$$

un tel morphisme sera désigné par (f, x, y).

$\mathfrak{M}_A$ est la sous catégorie pleine de $\mathcal{A}_A$ dont les objets sont les couples (M, x) où $M \in \mathfrak{M}$. Si (u, x, y) est un morphisme tel que la source de u soit un modèle, on pose $\alpha_A(u, x, y) = (\alpha(u), x, y \circ \beta(u))$ et $\beta_A(u, x, y) = (\beta(u), y \circ \beta(u), y)$. $\mathcal{A}_A$ est alors une catégorie avec modèles $\mathfrak{M}_A$ et fonctions de dégénérescence α_A et β_A.

Soit K un foncteur dont la source est $\mathcal{A}$. On définit un foncteur K_A dont la source est $\mathcal{A}_A$ et le but, le but de K, en posant :

$$K_A(B, x) = K(B), \quad K_A(f, x, y) = K(f)$$

on vérifie sans peine que l'on a la

PROPOSITION. — *Si* K *est représentable (resp. acyclique, resp. acyclique sur les modèles), il en est de même pour* K_A.

6. — Le théorème des modèles acycliques.

(6-1)* THÉORÈME. — *Soit* $\mathcal{A}$ *une catégorie avec modèles et fonctions de dégénérescence. Soient* K^* *et* L^* *deux foncteurs contravariants* $\mathcal{A} \to d\mathcal{G}^*_\Lambda$, K^* *étant représentable et* L^* *acyclique sur les modèles, et* T *une transformation naturelle* $H^0L^*|\mathfrak{M}^\alpha \to H^0K^*|\mathfrak{M}^\alpha$. *Il existe alors une transformation naturelle* $\Phi^* : L^* \to K^*$ *qui induit* T *sur* $H^0L^*|\mathfrak{M}^\alpha$. *On dit que* Φ^* *est une extension de* T. *Si* Φ'^* *est une autre extension de* T, Φ^* *et* Φ'^* *sont naturellement homotopes.*

La démonstration du théorème utilise les lemmes suivants.

LEMME 1. — *Si* L^* *est acyclique sur les modèles* $\hat{L}^*$ *est acyclique.*

En effet soient U^n et η les transformations naturelles qui définissement l'acyclicité de L^* sur $\mathfrak{M}^\alpha$. Alors

$$\hat{U}^n : \hat{L}^n \to \hat{L}^{n-1}, \qquad \hat{\eta} : \hat{L}^0 \to \widehat{H^0L^*}$$

peuvent être définis par le procédé de (5. 2) *a* bien que U^n et η ne soient définis que sur $\mathfrak{M}^\alpha$, puisque seules les valeurs prises par U^n et η sur $\mathfrak{M}^\alpha$ interviennent dans la définition de $\hat{U}^n$ et $\hat{\eta}$. Ce sont encore des transformations naturelles. On a : $\hat{d}\hat{U}^n + \hat{U}^{n-1}\hat{d} = \mathrm{id}$ pour $n > 0$ et $\hat{U}^1\hat{d} = \mathrm{id} - \hat{\varepsilon}\hat{\eta}$. Comme $\widehat{H^0L^*}$ et $H^0\hat{L}^*$ sont naturellement isomorphes, le lemme est démontré.

Soit alors $T : H^0L|\mathfrak{M}^\alpha \to H^0K|\mathfrak{M}^\alpha$ une transformation naturelle.

On pose $\Phi^0 = \chi_{K^0}\hat{\varepsilon}_K\hat{T}\hat{\eta}\Gamma_{L^0}$ où ε_K (resp. ε_L) désigne la transformation naturelle $H^0K^* \to K^0$ (resp. $H^0L \to L^0$) Φ^0 est une transformation naturelle $L^0 \to K^0$.

LEMME 2. — $\hat{d}\hat{\Phi}^0\hat{\varepsilon}_L = 0$ *et* $\Phi^0\varepsilon_L|\mathfrak{M}^\alpha = \varepsilon_K T$.

Démonstration. — Conformément à 5.2 a^*, sur $\mathfrak{M}^\alpha$, les transformations naturelles $\hat{\varepsilon}_K$, $\hat{T}$, $\hat{\eta}$, commutent aux Γ correspondants donc

$$\Phi^0|\mathfrak{M}^\alpha = \chi_{K^0}\hat{\varepsilon}_K\hat{T}\hat{\eta}\Gamma_{L^0}|\mathfrak{M}^\alpha = \chi_{K^0}\hat{\varepsilon}_K\hat{T}\Gamma_{H^0L*}\eta$$
$$= \chi_{K^0}\hat{\varepsilon}_K\Gamma_{H^0K*}T\eta = \chi_{K^0}\Gamma_{K^0}\varepsilon_K T\eta = \varepsilon_K T\eta.$$

Donc $\Phi^0\varepsilon_L|\mathfrak{M}^\alpha = \varepsilon_K T\eta\varepsilon_L = \varepsilon_K T$ puisque $\eta\varepsilon_L = id$. D'autre part : $\hat{d}\hat{\Phi}^0\hat{\varepsilon}_L = \widehat{d\Phi^0\varepsilon_L}$. Comme $d\Phi^0\varepsilon_L|\mathfrak{M}^\alpha = d\varepsilon_K T = 0$ (car $d\varepsilon_K = 0$), $\widehat{d\Phi^0\varepsilon_L} = 0$.

Démonstration du théorème. — On pose $\Phi^1 = \chi_{K^1}\hat{d}\hat{\Phi}^0\hat{U}^1\hat{d}\Gamma_{L^1}$ alors

$$\Phi^1 d = \chi_{K^1}\hat{d}\hat{\Phi}^0\hat{U}^1\Gamma_{L^1}d = \chi_{K^1}\hat{d}\hat{\Phi}_0\hat{U}^1\hat{d}\Gamma_{L^0} = \chi_{K^1}\hat{d}\hat{\Phi}^0(id - \hat{\varepsilon}_L\hat{\eta})\Gamma_{L^0}$$
$$= \chi_{K^1}\hat{d}\hat{\Phi}^0\Gamma_{L^0} = \chi_{K^1}\hat{d}\Gamma_{K^0}\Phi^0 = \chi_{K^1}\Gamma_{K^1}d\Phi^0 = d\Phi^0,$$

puisque $\hat{d}\hat{\Phi}^0\hat{\varepsilon}_L = 0$ d'après le lemme 2 et que $\hat{U}_1\hat{d} = id - \hat{\varepsilon}_L\hat{\eta}$ d'après le lemme 1.

Supposons que l'on ait déjà déterminé $\Phi^k : L^k \to K^k$. On pose $\Phi^{k+1} = \chi_{K^{k+1}}\hat{d}\hat{\Phi}^k\hat{U}^k\Gamma_{L^{k+1}} : L^{k+1} \to K^{k+1}$. On a

$$\Phi^{k+1}d = \chi_{K^{k+1}}\hat{d}\hat{\Phi}^k\hat{U}^k\Gamma_{L^{k+1}}d = \chi_{K^{k+1}}\hat{d}\hat{\Phi}^k\hat{U}^k\hat{d}\Gamma_{L^k}$$
$$= \chi_{K^{k+1}}\hat{d}\hat{\Phi}^k(id - \hat{d}\hat{U}^{k+1})\Gamma_{L^k} = \chi_{K^{k+1}}\hat{d}\hat{\Phi}^k\Gamma_{L^k} = \chi_{K^{k+1}}\Gamma_{L^{k+1}}d\Phi^k = d\Phi^k$$

puisque $\hat{d}\hat{\Phi}^k\hat{d} = \hat{d}\hat{d}\hat{\Phi}^{k-1} = 0$ d'après l'hypothèse de recurrence.

De plus, comme $\Phi^0\varepsilon_L|\mathfrak{M}^\alpha = \varepsilon_K T$, l'application Φ^* induit bien T sur $H^0L|\mathfrak{M}^\alpha$.

Soit Φ'^* une autre extension de T. On a donc

$$(1) \qquad \hat{\Phi}^0\hat{\varepsilon}_L = \hat{\Phi}'^0\hat{\varepsilon}_L = \hat{\varepsilon}_K\hat{T}.$$

On pose $V^1 = \chi_{K^0}(\hat{\Phi}^0 - \hat{\Phi}'^0)\hat{U}^1\Gamma_{L^1} : L^1 \to K^0$ on a

$$V^1 d = \chi_{K^0}(\hat{\Phi}^0 - \hat{\Phi}'^0)\hat{U}^1\Gamma_{L^1}d = \chi_{K^0}(\hat{\Phi}^0 - \hat{\Phi}'^0)\,\hat{U}_1 d\Gamma_{L^0}$$
$$= \chi_{K^0}(\hat{\Phi}^0 - \hat{\Phi}'^0)\,(id - \hat{\varepsilon}_L\hat{\eta})\Gamma_{L^0} = \chi_{K^0}(\hat{\Phi}^0 - \hat{\Phi}'^0)\Gamma_{L_0}$$

d'après (1).

Donc $V^1 d = \chi_{K^0}\Gamma_{K^0}(\Phi^0 - \Phi'^0) = \Phi^0 - \Phi'^0$.

Supposons alors que l'on ait déjà déterminé $V^1, \ldots, V^k$; on a $(\Phi^k - \Phi'^k - dV^k)d = d(\Phi^{k-1} - \Phi'^{k-1} - V^k d) = ddV^{k-1} = 0$ donc

$$(2) \qquad (\hat{\Phi}^k - \hat{\Phi}'^k - \hat{d}\hat{V}^k)\hat{d} = 0$$

on pose alors $V^{k+1} = \chi_{K^k}(\hat{\Phi}^k - \hat{\Phi}'^k - \hat{d}V^k)\Gamma_{L^{k+1}}$ en utilisant (2) on voit sans peine que

$$V^{k+1}d = \Phi^k - \Phi'^k - dV^k$$

l'homotopie naturelle V est donc bien déterminée par récurrence.

6-1$_*$ THÉORÈME. — *Soit* $\mathcal{A}$ *une catégorie avec modèles et fonctions de dégénérescence. Soient* K_* *et* L_* *deux foncteurs covariants* $\mathcal{A} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$, K_* *étant représentable et* L_* *acyclique sur les modèles, et* T *une transformation naturelle*

$$H_0K_*|\mathfrak{M}^a \to H_0L_*|\mathfrak{M}^a.$$

Il existe alors une transformation Φ_*: $K_* \to L_*$ *qui induit* T *sur* $H_0K_*|\mathfrak{M}^a$. *On dit que* Φ_* *est une extension de* T. *Si* Φ'_* *est une autre extension de* T, Φ *et* Φ'_* *sont naturellement homotopes.*

Démonstration analogue à celle du théorème 6-1*

7. — Systèmes locaux.

La notion de système local sur un ensemble simplicial a été dégagée pour la première fois par Eilenberg et Zilber [7]. On indique ici une généralisation due à J. C. Moore et V. K. A. M. Gugenheim [12] qui utilise la notion de foncteur covariant fortement représentable 7. 7. On peut définir une notion analogue pour les foncteurs contravariants mais elle s'avère jusqu'à présent de peu d'utilité. Si K_* est un foncteur fortement représentable et *G* un système local, on peut définir deux foncteurs $K_* \divideontimes G$ et *Hom** (K_*, G) qui généralisent les notions connues de complexes de chaînes (resp. cochaines) à valeur dans un système local. On fait le lien entre cette théorie et la théorie classique dans le paragraphe 10, en utilisant les catégories indécées. Les théorèmes 7. 10* et 7. 10$_*$ constituent la clef de la démonstration de l'existence des suites spectrales des fibrés.

7. 7. *Foncteurs fortement représentables.* — Soit K_* un foncteur covariant $\mathcal{A} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$, et supposons que K_* soit représentable. On désigne par $\tau(u)$ la projection $\hat{K}_*(A) \to K(M, u)$ où u: $M \to A \in S(A)$, et on pose

$$\theta(u) = j(u)\tau(u), \qquad \psi_*(u) = K_*(u)\theta(u)\chi_{K^*}(u).$$

Définition. — On dit qu'un foncteur covariant $K_* : \mathcal{A} \to d\mathcal{G}_{*A}$ *est fortement représentable* s'il est représentable et si de plus

(i) $\tau(u)\chi_{K_*} = \chi_{K_*}\psi(u)$ pour tout $u : M \to A \in S(A)$
(ii) $\theta(u)\chi_{K_*} = \psi_*(1_M)\theta(u)\chi_{K_*}$.

Si K_* est fortement représentable on pose

$$K_{*u}(A) = \psi_*(u)K_*(A) \quad \text{et} \quad K_{n,u}(A) = \psi_n(u)K_n(A)$$

pour tout $A \in \mathcal{A}$ et $u \in S(A)$.

Proposition 1. — *Si* K_* *est fortement représentable, on a*

(i) $\psi_*(u)\psi_*(u) = \psi_*(u)$, $\psi_*(u)\psi_*(v) = 0$ pour $u \neq v$
(ii) $K_*(A) = \sum_{u \in S(A)} K_{*u}(A)$
(iii) si $f : A \to B \in \mathcal{A}$, $K_*(f)\psi_*(u) = \psi_*(\beta(fu))K_*(f)\psi_*(u)$

Démonstration. — *(i)* Comme $\tau(u)\tau(v) = \begin{cases} \tau(u) & \text{si } u = v \\ 0 & \text{si } u \neq v, \end{cases}$

on voit que

$$\psi_*(u)\psi_*(v) = \Gamma_{K_*}\tau(u)\chi_{K_*}\psi_*(v) = \Gamma_{K_*}\tau(u)\tau(v)\chi_{K_*} = \begin{cases} \psi_*(u) & \text{si } u = v \\ 0 & \text{si } u \neq v \end{cases}$$

en utilisant le (i) de la définition

(ii) il résulte de (i) que $K_{*u}(A) \cap K_{*v}(A) = \{0\}$ si $u \neq v$ il suffit donc de démontrer que tout $x \in K_*(A)$ peut s'écrire comme une somme d'éléments de $K_{*u}(A)$ où u parcourt un ensemble fini de valeurs. Or $\chi_{K_*}x \in \hat{K}_*(A) = \sum_{u \in S(A)} K_*(M, u)$; il n'y a qu'un nombre fini de morphismes, soient

$$u_1, \ldots, u_p \in S(A)$$

tels que la composante de $\chi_{K_*}x$ dans $K_*(M, u_i)$ soit non nulle $(i = 1, \ldots, p)$. Donc $\chi_{K_*}x = \sum_{i=1}^{p} \tau(u_i)\chi_{K_*}x$ et

$$x = \Gamma_{K_*}\chi_{K_*}x = \sum_{i=1}^{p} \Gamma_{K_*}\tau(u_i)\chi_{K_*}x = \sum_{i=1}^{p} \psi_*(u_i)x$$

(iii) $K_*(f)\psi_*(u) = K_*(f)\Gamma_{K_*}\tau(u)\chi_{K_*} = \Gamma_{K_*}\hat{K}_*(f)\tau(u)\chi_{K_*}$
$= \Gamma_{K_*}i(\beta(fu))K_*(\alpha(fu))j(u)\tau(u)\chi_{K_*}$
$\psi_*(\beta(fu))K_*(f)\psi_*(u) = \Gamma_{K_*}\tau(\beta(fu))\chi_{K_*}K_*(f)\psi_*(u)$
$= \Gamma_{K_*}\tau(\beta(fu))\hat{K}_*(f)\chi_{K_*}\psi_*(u) = \Gamma_{K_*}i(\beta(fu))K_*(\alpha(fu))j(u)\tau(u)\chi_{K_*}$

PROPOSITION 2. — *Le foncteur* C_* (cf. 5. 5) *est fortement représentable.*

On voit que si x est non dégénéré, $x \in C_n(X)$ alors $C_{n,\tilde{x}}(X)$ est le module libre engendré par x. La décomposition en somme directe donnée par la proposition 1 n'est rien d'autre que la définition de $C_*(X)$.

7. 2. *Système local contravariant.* — Soit G un foncteur contravariant : $\mathcal{M} \to \mathcal{G}_A$. On dit que G est un *système local contravariant :* si $G(u)$ est un isomorphisme pour tout morphisme u non dégénéré.

7. 3. *Le foncteur* $Hom^*(K_*, G)$. Soit K_* un foncteur covariant $\mathcal{A} \to \mathcal{G}_{*A}$ fortement représentable, et G un système local contravariant. On pose, pour tout objet $A \in \mathcal{A}$

$$Hom^n(K_*, G)(A) = \prod_{u \in S(A)} \mathrm{Hom}(K_{n,u}(A), G(M_u))$$

où M_u désigne la source de u, et Hom est pris au sens de la catégorie $\mathcal{G}_V$. Si f est un morphisme $A \to B$, on définit l'homomorphisme

$$Hom^n(K_*, G)(f) : Hom^n(K, G)(B) \to Hom^n(K_*, G)(A)$$

de la manière suivante :

Soit $\varphi \in Hom^n(K_*, G)(B)$ et $\varphi = (\varphi_v)$ où $\varphi_v \in Hom(K_{n,v}(B), G(M_v))$. Si $u \in S(A)$, $G(\alpha(fu))\varphi_{\beta(fu)}K_n(f) \in \mathrm{Hom}(K_{u,n}(A), G(M_u)$. On pose alors

$$Hom^n(K_*, G(f))\varphi = ((G(\alpha(fu))\varphi_{\beta(fu)}K_n(f))_{u \in S(A)})$$

La collection $Hom(K_*, G) = Hom^n(K_*, G)$ est un foncteur contravariant.

7. 4. PROPOSITION. — *Le foncteur* $Hom^*(K, G)$ *est représentable.*

Démonstration. — Pour simplifier les notations, on écrit $L = Hom^n(K, G)$, K au lieu de K_n, $K_u(A)$ au lieu de $K_{n,u}(A)$, ψ au lieu de ψ_n, χ au lieu de χ_K, Γ au lieu de Γ_K ; i' et j' désignent les applications i et j relatives au foncteur L.

D'après 7. 1. Définition (ii) on a

$$\theta(u)\chi\psi(u) = \psi(1_M)\theta(u)\chi\psi(u) = \psi(1_M)\theta(u)\chi$$

donc :

$$(1)\qquad \theta(u)\chi K_u(A) \subset \psi(1_M)\,K(M) = K_{1_M}(M)$$

pour $u : M \to A \in S(A)$.

Par définition on a :

$$\hat{L}(A) = \prod_{u \in S(A)} L(M_u,\ u) = \prod_{\substack{u \in S(A)\\ v \in S(M_u)}} i'(u)\,\mathrm{Hom}\,(K_v(M_u),\ G(M_{v,u}))$$

où M_u est la source de u, $M_{v,u}$ la source de v.

Si $\varphi \in \hat{L}(A)$, on désigne par φ_u sa composante dans $L(M_u,\ u)$ et par $\varphi_{v,u}$ sa composante dans $\mathrm{Hom}\,(K_v(M_u),\ G(M_{v,u}))$.

Considérons maintenant un morphisme $u : M \to A \in S(A)$. D'après la relation (1),

$$(\varphi_{1_M,u}) \circ \theta(u)\chi \in \mathrm{Hom}\,(K_u(A),\ G(M_u)).$$

La transformation naturelle $\chi_L : \hat{L} \to L$ définie par

$$\chi_L\varphi = ((\varphi_{1_M,u}) \circ (\theta(u)\chi)_{u \in S(A)})$$

pour $\varphi \in \hat{L}(A)$ vérifie $\chi_L\Gamma_L =$ identité. En effet, si $\mu \in L(A)$, $\varphi = \Gamma_L\mu = ((i'(u)\,L(u)\,\mu)_{u \in S(A)}$ et $\varphi_{v,u} = G(\alpha(uv))\,\mu_{\beta(uv)}\,K(u)$; en particulier $\varphi_{1_M,u} = G(\alpha(u))\,\mu_{\beta(u)}K(u) = \mu_u K_{(u)}$ car $\alpha(u) = 1_M$, $\beta(u) = u$ puisque $u \in S(A)$. Par conséquent

$$(\chi_L\varphi)_u = (\chi_L\Gamma_L\mu)_u = \mu_u K(u)\,\theta(u)\,\chi = \mu_u\psi(u) = \mu_u.$$

(La dernière égalité résulte du fait que $\psi(u)\psi(u) = \psi(u)$ puisque μ_u est un homomorphisme dont la source est $K_u(A) = \psi(u)K(A)$).

7. 5. Proposition. — *Si* K_* *est un foncteur* $\mathcal{A} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$, *Hom** $(K_*,\ G)$ *est un foncteur* $\mathcal{A} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$.

Démonstration. — Soit $\mathrm{Hom}^*(K_*,\ G) : \mathfrak{M} \to d\mathcal{G}^*{}_\Lambda$ le foncteur contravariant défini par :

$$\mathrm{Hom}^n(K_*,\ G)(M) = \mathrm{Hom}\,(K_n(M),\ G(M)) \quad \text{pour} \quad M \in \mathfrak{M}$$
$$\mathrm{Hom}^n(K_*,\ G)(u) = \mathrm{Hom}\,(K(u),\ G(u)) \quad \text{pour} \quad u :\ M \to M'$$

et dont la différentielle δ_1 est définie par transposition à partir de celle de K_*.

On a :

$$\mathrm{Hom}^n(K_*,\ G)(M) = \mathrm{Hom}\Big(\sum_{v \in S(M)} K_{n,v}(M),\ G(M)\Big) = \prod_{v \in S(M)} \mathrm{Hom}\,(K_{n,v}(M),\ G(M)).$$

Si $x \in \mathrm{Hom}^n(\mathrm{K}, G)(\mathrm{M})$, on désigne par x_ν sa projection dans $\mathrm{Hom}(\mathrm{K}_{n,\nu}(\mathrm{M}), G(\mathrm{M}))$. Alors $G(\nu) \circ x_\nu \in \mathrm{Hom}(\mathrm{K}_{n,\nu}(\mathrm{M}), G(\mathrm{M}_\nu))$ où M_ν est la source de ν. On pose $\mathrm{T}(\mathrm{M}) = ((\mathrm{G}(\nu) \circ x_\nu)_{\nu \in \mathrm{S}(\mathrm{M})})$. T est une transformation naturelle

$$\mathrm{Hom}^*(\mathrm{K}_*, G) \to \mathit{Hom}^*(\mathrm{K}_*, G)|\mathfrak{M}$$

et même une équivalence naturelle puisque, ν appartenant à $\mathrm{S}(\mathrm{M})$, $G(\nu)$ est un isomorphisme. $\delta' = \mathrm{T}\delta_1\mathrm{T}^{-1}$ est une différentielle sur $\mathit{Hom}^*(\mathrm{K}_*, G)|\mathfrak{M}$, $\hat{\delta}'$ une différentielle sur $\widehat{\mathit{Hom}}^*(\mathrm{K}_*, G)$.

Finalement on pose, pour le degré n,

$$\delta = \chi_{\mathrm{K}^{n+1}}\hat{\delta}'\Gamma_{\mathrm{K}^n}$$

où l'on a écrit K^i au lieu de $\mathit{Hom}^i(\mathrm{K}_*, G)$, $i = n, n+1$.

δ est une transformation naturelle : $\mathrm{K}^n \to \mathrm{K}^{n+1}$ puisque c'est un produit de transformation naturelle. Donc ((5.2)a^*)

$$\hat{\delta}\Gamma_{\mathrm{K}^n} = \Gamma_{\mathrm{K}^{n+1}}\delta$$

mais δ' étant une transformation naturelle, on a sur $\mathfrak{M}$:

$$\hat{\delta}'\Gamma_{\mathrm{K}^n} = \Gamma_{\mathrm{K}^{n+1}}\delta'$$

d'après 5. 2. a^*, donc, sur $\mathfrak{M}$, $\delta = \chi_{\mathrm{K}^{n+1}}\hat{\delta}'\Gamma_{\mathrm{K}^n} = \chi_{\mathrm{K}^{n+1}}\Gamma_{n+1}\delta' = \delta'$: de l'égalité $\delta|\mathfrak{M} = \delta'$ on déduit par passage au chapeau, $\hat{\delta} = \hat{\delta}'$ et finalement, $\hat{\delta}'\Gamma_{\mathrm{K}^n} = \Gamma_{\mathrm{K}^{n+1}}\delta$.

Mais alors $\delta\delta = \chi_{\mathrm{K}^{n+2}}\ \hat{\delta}'\Gamma_{\mathrm{K}^{n+1}}\delta = \chi_{\mathrm{K}^{n+2}}\hat{\delta}'\hat{\delta}'\Gamma_{\mathrm{K}^n} = 0$.

Finalement, δ est une différentielle, dont la restriction à $\mathfrak{M}$ est δ', et qui induit $\hat{\delta}'$ sur $\hat{\mathrm{K}}^*$.

7. 6. *. Proposition. — *Si* K_* *est un foncteur* $\mathfrak{a} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$ *acyclique sur les modèles,* $\mathit{Hom}^*(\mathrm{K}_*, G)$ *est acyclique sur les modèles.*

Démonstration. — Soient U_n, η les transformations naturelles qui définissent l'acyclicité de K_* sur $\mathfrak{M}^*$. Soit $\mathrm{U}_1{}^{n+1} : \mathrm{Hom}^{n+1}(\mathrm{K}_*, G) \to \mathrm{Hom}^n(\mathrm{K}, G)$ le transposé de U_n, et $\mathrm{U}^{n+1} = \mathrm{T}\mathrm{U}_1{}^{n+1}\mathrm{T}^{-1}$ ou T désigne l'équivalence naturelle induite dans 7. 5. D'après 7. 5* on a $\delta\mathrm{U}^n + \mathrm{U}^{n-1}\delta = id$ pour $n > 0$.

Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}^0(\mathrm{K}_*, G)(\mathrm{M})$. $\varphi \circ \eta \circ \varepsilon$ est un homomorphisme $\mathrm{K}_0(\mathrm{M}) \to G(\mathrm{M})$, donc un élément de $\mathrm{Hom}^0(\mathrm{K}_*, G)(\mathrm{M})$

tel que $\delta_1(\varphi \circ \eta \circ \varepsilon) = \varphi \circ \eta \circ \varepsilon \circ d = 0$, donc un cocycle. On définit $\eta_1 : \mathrm{Hom}^0(\mathrm{K}_*, G) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{Hom}^*(\mathrm{K}_*, G))$ par $\eta_1\varphi =$ classe de cohomologie de $\varphi \circ \eta \circ \varepsilon$, et $\eta' : Hom^0(\mathrm{K}_*, G) \to \mathrm{H}^0 Hom^*(\mathrm{K}_*, G)$ par $\eta' = (\mathrm{H}^0\mathrm{T})\eta_1\mathrm{T}^{-1}$.

Si ε' désigne l'application naturelle

$$\mathrm{H}^0 Hom^*(\mathrm{K}_*, G) \to Hom^0(\mathrm{K}_*, G)$$

il résulte des définitions que

$$\mathrm{U}^1\delta = id - \varepsilon'\eta'.$$

7. 2.$_*$ *Système local covariant.* — Soit G un foncteur covariant $\mathfrak{M} \to \mathcal{G}_\Lambda$ on dit que G est un système local covariant si $G(u)$ est un isomorphisme pour tout morphisme u non dégénéré.

7. 3.$_*$ *Le foncteur* $\mathrm{K}_* \divideontimes G$.

Soit K_* un foncteur covariant fortement représentable. $\mathfrak{A} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$, et G un système local covariant on pose, pour tout objet $\mathrm{A} \in \mathfrak{A}$, et tout morphisme $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B} \in \mathfrak{A}$,

$$\mathrm{K}_* \divideontimes G(\mathrm{A}) = \sum_{u \in \mathrm{S(A)}} \mathrm{K}_{*,u}(\mathrm{A}) \otimes_\Lambda G(\mathrm{M}_u)$$

$$\mathrm{K}_* \divideontimes G(f) | \mathrm{K}_{*,u}(\mathrm{A}) \otimes_\Lambda G(\mathrm{M}_u) = (\mathrm{K}_*(f) | \mathrm{K}_{*,u}(\mathrm{A})) \otimes_\Lambda G(\alpha(fu))$$

$\mathrm{K}_* \divideontimes G$ est un foncteur covariant.

7. 4.$_*$ Proposition. — *Le foncteur* $\mathrm{K}_* \divideontimes G$ *est fortement représentable.*

7. 5.$_*$ Proposition. — *Si* K_* *est un foncteur* $\mathfrak{A} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$, $\mathrm{K}_* \divideontimes G$ *est un foncteur* $\mathfrak{A} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$.

7. 6.$_*$ Proposition. — *Si* K *est un foncteur* $\mathfrak{A} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$ *acyclique sur les modèles,* $\mathrm{K}_* \divideontimes G$ *est acyclique sur les modèles.*

Les démonstrations sont analogues à celles des propositions 7. 4*, 7. 5*, 7. 6*. Pour définir la différentielle de $\mathrm{K}_* \divideontimes G$ on introduit le foncteur $\mathrm{K}_* \circ G : \mathfrak{M} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$ défini par

$$\mathrm{K}_* \circ G(\mathrm{M})' = \mathrm{K}_*(\mathrm{M}) \otimes_\Lambda G(\mathrm{M})$$

pour $\mathrm{M} \in \mathfrak{M}$ et $\mathrm{K}_* \circ G(u) = \mathrm{K}_*(u) \otimes G(u)$ pour les morphismes $u \in \mathfrak{M}$, et dont la différentielle d_1 est $d \otimes 1_{G(\mathrm{M})}$. $\mathrm{K} \circ G$ est naturellement équivalent à $\mathrm{K}_* \divideontimes G | \mathfrak{M}$, qui est ainsi muni d'une différentielle d'. $\hat{d}'$ est une différentielle de $\widehat{\mathrm{K}_* \divideontimes G}$. En utili-

sant les transformations naturelles γ et Γ relatives au foncteur de $K_* \ast G$, on a la différentielle $d = \Gamma \hat{d}' \gamma$ cherchée d induit $\hat{d}'$ sur $\widehat{K_* \ast G}$ et d' sur $K_* \ast G | \mathfrak{M}$.

7. 7. Proposition. — *Soient F et G deux systèmes locaux contravariants* (resp. *covariants*), *et* K_* *un foncteur fortement représentable. Si* $\xi : F \to G$ *est une transformation naturelle, il existe une transformation naturelle* $Hom^*(K_*, \xi)$:

$Hom^*(K_*, F) \to Hom^*(K_*, G)$ (*resp.* $K_* \ast F : K_* \ast F \to K_* \ast G$)

Démonstration. — On pose

$$Hom^n(K_*, \xi)(A) = \prod_{u \in S(A)} \mathrm{Hom}(\mathrm{id}, \xi(M_u))$$

$$K_* \ast \xi(A) | K_{*, u}(A) \otimes_\Lambda F(M_u) = \mathrm{id} \otimes \xi(M_u).$$

7. 8. Définitions. — *a.* Un système local $G : \mathfrak{M} \to \mathcal{G}_\Lambda$ est *constant* si $G(M)$ est un Λ-module indépendant de M et $G(u)$ l'application identique pour tout morphisme $u \in \mathfrak{M}$. Un système local est *simple* s'il est naturellement équivalent à un système local constant.

b. Un foncteur contravariant $K^* : \mathfrak{A} \to d\mathcal{G}^*_\Lambda$ (resp. covariant $K_* : \mathfrak{A} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$) est *augmentable* si $H^0 K^* | \mathfrak{M}$ (resp. $H_0 K_* | \mathfrak{M}$) est un système local.

c. Un foncteur covariant $K_* : \mathfrak{A} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$ est *singulier* s'il est fortement représentable, acyclique sur les modèles, et si $H_0 K_* | \mathfrak{M}$ est un système local simple, de module Λ.

7. 9. Proposition. — *Soit* K_* *un foncteur covariant* : $\mathfrak{A} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$ *fortement représentable et augmentable, alors* $Hom^*(K_*, G)$ *et* $K_* \ast G$ *sont augmentables.*

Démonstration. — Pour tout $M \in \mathfrak{M}$, on a

$$H^0\, \mathrm{Hom}^*(K_*, G(M)) = \mathrm{Hom}_\Lambda(H_0\, K_*(M), G(M))$$

et pour tout morphisme u de $\mathfrak{M}$ on a

$$H^0\, \mathrm{Hom}^*(K_*, G)(u) = \mathrm{Hom}_\Lambda(H_0 K_*(u), G(u))$$

Comme $\mathrm{Hom}^*(K, G)$ et $Hom^*(K_*, G) | \mathfrak{M}$ sont naturellement équivalents, $Hom^*(K, G)$ est augmentable. Même démonstration pour $K_* \ast G$.

7. 10*. Soient $K_* : \mathcal{A} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$ un foncteur singulier, L_* un foncteur covariant $\mathcal{A} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$, fortement représentable, augmentable et acyclique sur les modèles. $L^* = Hom^*(L_*, G)$ où G est un système local contravariant, est acyclique sur les modèles, représentable et augmentable. Soit F le système local $H^0L^* | \mathfrak{M}$.

Théorème. — *Les deux foncteurs* H^*L^* *et* $H^* Hom^*(K, F)$ *sont naturellement équivalents.*

Démonstration. — D'après 6. 1*. il suffit de démontrer que $H^0L^*|\mathfrak{M}^\alpha$ est naturellement équivalent à $H^0\, Hom^*(K^*, F)|\mathfrak{M}^\alpha$.

Or $H^0L^*|\mathfrak{M} = F$ et d'après 7. 9. $H^0 Hom^*(K_*, F)|\mathfrak{M}$ est naturellement équivalent à $\mathrm{Hom}_\Lambda(H_0K_*, F)$. K_* étant singulier, $H_0K_*|\mathfrak{M}$ est naturellement équivalent au système locàl constant de module Λ, et $H^0\mathrm{Hom}^*(K_*, F)|\mathfrak{M}$ est naturellement équivalent à $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, F) = F$ C.Q.F.D.

7. 10_*. On conserve les mêmes hypothèses que dans (7. 10)* $L^1_* = L_* \times G$ où G est un système local covariant, est acyclique sur les modèles, représentable et augmentable. Soit F le système local $H_0L^1_*|\mathfrak{M}$.

Théorème. — *Les deux foncteurs* H_*L_* *et* $H_*(K_* \times F)$ *sont naturellement équivalents.*

7. 11. Proposition. — *Le foncteur* C_* (cf. 5. 5.) *est singulier.* C'est évident à partir des définitions.

8. — Le cas relatif.

Pour permettre d'étendre à l'homologie et à la cohomologie relative les théories précédentes, on introduit dans une catégorie $\mathcal{A}$, de sous catégories $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ qui *grosso modo* donnent une notion de « sous-objet » dans $\mathcal{A}$. Moyennant certaines hypothèses de compatibilité, les problèmes relatifs dans $\mathcal{A}$ sont ramenés à des problèmes absolus dans de nouvelles catégories $\mathcal{A}_\mathcal{I}$ et $\mathcal{A}_\mathcal{J}$.

8. 1. Soit $(\mathcal{A}, \mathfrak{M}, \alpha, \beta)$ une catégorie avec modèles et fonctions de dégénérescences. Supposons qu'il existe une sous

catégorie $\mathcal{J}$ de $\mathcal{A}$ dont les objets sont les objets de $\mathcal{A}$, et dont les morphismes $B \to A \in \mathcal{J}$, s'ils exitent, sont uniques. Supposons de plus qu'il existe un objet $\emptyset \in \mathcal{A}, \emptyset \notin \mathfrak{M}$, tel que pour tout objet $A \in \mathcal{A}$, il existe un morphisme unique,

$$\emptyset_A : \emptyset \to A \in \mathcal{A}, \quad \emptyset_A \in \mathcal{J}.$$

Définition 1. — On dit que α et β sont *compatibles* avec $\mathcal{J}$ si pour tout : $M \to B \in$, $\mathcal{A}M \in \mathfrak{M}$ et tout $\mu \in \mathcal{J}$ on a

$$(1) \qquad \begin{cases} \beta(\mu u) = \mu\beta(u) \\ \alpha(\mu u) = \alpha(u). \end{cases}$$

ceci entraîne que si $\mu : B \to A \in \mathcal{J}$, et si $u \in S(B)$, $\mu u \in S(A)$.

Définition 2. — On définit une catégorie $(\mathcal{A}, \mathfrak{M}_{\mathcal{J}}, \alpha, \beta)$ comme suit :

les objets de $\mathcal{A}_{\mathcal{J}}$, sont des couples (A, B) tels qu'il existe un morphisme (unique par conséquent) $\mu : B \to A \in \mathcal{J}$.

Les morphismes de $\mathcal{A}_{\mathcal{J}}$, $(A, B) \xrightarrow{(f, f')} (A', B')$ sont des carrés commutatifs

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & A' \\ B \arrow[u, "\mu"] \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[u, "\mu'"'] \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont dans $\mathcal{J}$ et les flèches horizontales dans $\mathcal{A}$.

Les modèles de $\mathfrak{M}_{\mathcal{J}}$ sont des couples $(M, \emptyset)$ où $M \in \mathfrak{M}$. Si $(u, \emptyset_B) : (M; \emptyset) \to (A, B)$, on pose

$$\alpha(u, \emptyset_B) = (\alpha(u), 1_\emptyset), \qquad \beta(u, \emptyset_B) = (\beta(u), \emptyset_B)$$

$(\mathcal{A}_{\mathcal{J}}, \mathfrak{M}_{\mathcal{J}}, \alpha, \beta)$ est une catégorie avec modèles et fonctions de dégénérescence.

Si K est un foncteur covariant (resp. contravariant) on définit le foncteur $K_{\mathcal{J}} : \mathcal{A}_{\mathcal{J}} \to \mathcal{G}_\Lambda$ par

$$K_{\mathcal{J}}(A, B) = \operatorname{coker} K(\mu) \ (\text{resp. } K_{\mathcal{J}}(A, B) = \operatorname{Ker} K(\mu))$$

pour un objet $(A, B) \in \mathcal{A}_{\mathcal{J}}$, où μ est l'unique application $B \to A \in \mathcal{J}$,

$K_{\mathfrak{J}}(f, f')$ étant l'application canonique induite par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} K(A) & \xrightarrow{K(f)} & K(A') \\ {\scriptstyle K(\mu)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle K(\mu')} \\ K(B) & \xrightarrow{K(f')} & K(B') \end{array} \qquad \left(\text{resp.}\ \begin{array}{ccc} K(A) & \longleftarrow & K(A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(B) & \longleftarrow & K(B') \end{array}\right)$$

Si K est un $d\mathcal{G}_{\mathcal{J}*\Lambda}$-foncteur (resp. $d\mathcal{G}^*_{\mathcal{J}\Lambda}$-foncteur), on définit canoniquement une structure de $d\mathcal{G}_{\mathcal{J}*\Lambda}$-foncteur (resp. $d\mathcal{G}^*_{\mathcal{J}\Lambda}$) pour $K_{\mathfrak{J}}$.

Convention. — On suppose que $K(\emptyset) = \{0\}$ (K covariant ou contravariant) et que α et β sont compatibles avec $\mathfrak{J}$.

8. 2. Proposition. — *Soit* K *un foncteur covariant* $\mathcal{A} \to d\mathcal{G}_{\mathcal{J}*\Lambda}$ *fortement représentable* (resp. *acyclique sur les modèles*, resp. *augmentable*, resp. *singulier*) *alors* $K_{\mathfrak{J}}$ *est fortement représentable* (*resp. singulier*).

Démonstration. — On remarque que si $(A, B) \in \mathcal{A}_{\mathfrak{J}}$, $(u, \emptyset) \in S(A, B)$ si et seulement si $u \in S(A)$. Comme $K_{\mathfrak{J}}(M, \emptyset) = K(M)$, on voit que $\hat{K}_{\mathfrak{J}}(A, B) = \hat{K}(A)$ en convenant d'identifier $K((M, \emptyset), (u, \emptyset))$ à $K(M, u)$.

D'autre part si $u \in S(B)$, $\mu u \in S(A)$, un calcul simple montre que $K(\mu)\, K_u(B) = K_{\mu u}(A)$. Par conséquent

$$(1) \qquad K_{\mathfrak{J}}(A, B) = \sum_{u \in S'(A,\ B)} K_u(A)$$

en désignant par $S'(A, B)$ l'ensemble des $u \in S(A)$ qui ne s'écrivent pas $\mu u'$ où $u' \in S(B)$. $\chi_{K_{\mathfrak{J}}}$ est alors défini par $\chi_{K_{\mathfrak{J}}} = \chi_K | \sum_{u \in S'(A,\ B)} K_u(A)$. On a bien $\Gamma_{K_{\mathfrak{J}}}\chi_{K_{\mathfrak{J}}} =$ identité, de plus $\psi(u, \emptyset) = \psi(u)$ si $u = \mu u'$ avec $u' \in S(B)$. Donc $K_{\mathfrak{J}}$ est fortement représentable et $(K_{\mathfrak{J}})_{(u,\, \emptyset)} = K_u(A)$ ou O suivant que $u \in S'(A, B)$ ou non. Enfin les autres affirmations de la proposition découlent immédiatement du fait que $K_{\mathfrak{J}} | \mathfrak{M}_{\mathfrak{J}} = K | \mathfrak{M}$.

8. 3. Soient G un système local covariant (resp. contravariant) et K un foncteur covariant fortement représentable $\mathcal{A} \to d\mathcal{G}_{\mathcal{J}*\Lambda}$. G est aussi un système local pour $\mathcal{A}_{\mathfrak{J}}$ en posant $G(M, \emptyset) = G(M)$, $G(f, 1_{\emptyset}) = G(f)$; puisque $K(\mu) : K_u(B) \to K_{\mu u}(A)$ est surjectif pour $\mu : B \to A \in \mathfrak{J}$, on *a* :

$$(K \ast G)_{\mathfrak{J}} = K_{\mathfrak{J}} \ast G \qquad \text{et} \qquad \mathit{Hom}^*(K, G)_{\mathfrak{J}} = \mathit{Hom}\,(K_{\mathfrak{J}}, G)$$

en particulier, si on suppose que $K(\mu)$ est injectif pour on a des suites exactes :

$$0 \to K \ast G(B) \to K \ast G(A) \to K_{\mathcal{J}} \ast G(A, B) \to 0$$
$$0 \to Hom^{*}(K_{\mathcal{J}}, G)(A, B) \to Hom^{*}(K, G)(A) \to Hom^{*}(K, G)(B) \to 0$$

qui donnent les suites exactes classiques d'homologie et de cohomologie. Cette situation est en particulier réalisée dans la catégorie des ensembles simpliciaux, en disant que $\mu \in \mathcal{J}$ si $\mu : B \to A$ est l'application canonique induite par l'inclusion $B \subset A$ et en prenant pour foncteur K le foncteur C_{*}.

8. 4. Soient $(\mathcal{A}, \mathfrak{M}, \alpha, \beta)$ une catégorie avec modèles et fonctions de dégénérescence et $\mathcal{J}$ une sous-catégorie de $\mathcal{A}$ dont les objets sont les objets de $\mathcal{A}$, et dont les morphismes $B \to A \in \mathcal{J}$, s'ils existent sont uniques.

Définition 1. — On dit que α et β sont compatibles avec $\mathcal{J}$ si

1° quel que soit le diagramme commutatif

$$(1) \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "u"'] & A \\ M' \arrow[u, "\lambda"] \arrow[r, "u'"'] & B \arrow[u, "\mu"'] \end{tikzcd}$$

où M et M′ sont des modèles, et où les flèches verticales sont dans $\mathcal{J}$ il existe une application (qui est donc unique) $\lambda' : N' \to N \in \mathcal{J}$ où N′ et N sont les buts de $\alpha(u')$ et $\alpha(u)$ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\alpha(u)"] & N \arrow[r, "\beta(u)"] & A \\ M' \arrow[u, "\lambda"] \arrow[r, "\alpha(u')"'] & N' \arrow[u, "\lambda'"] \arrow[r, "\beta(u')"'] & B \arrow[u, "\mu"] \end{tikzcd}$$

commute.

2°) L'application $S(B) \to S(A)$ donnée par $u' \to \beta(\mu\, u')$ est bijective, et de plus $\alpha(\mu\, u') \in \mathcal{J}$ pour $u' \in S(B)$.

Définition 2. — On définit une catégorie $(\mathcal{A}_{\mathcal{J}}, \mathfrak{M}_{\mathcal{J}}, \alpha, \beta)$ avec modèles $\mathfrak{M}_{\mathcal{J}}$ et fonctions de dégénérescence α, β comme suit : $\mathcal{A}_{\mathcal{J}}$ est la catégorie définie dans 8. 1. (en utilisant $\mathcal{J}$ au lieu de $\mathcal{J}$) $\mathfrak{M}_{\mathcal{J}}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}_{\mathcal{J}}$ dont les objets sont les couples (M, M') avec M et $M' \in \mathfrak{M}$.

Si (u, u') est un morphisme $(M, M') \to (A, B)$ on pose

$$\alpha(u, u') = (\alpha(u), \alpha(u')) \qquad \text{et} \qquad \beta(u, u') = (\beta(u), \beta(u')).$$

Cette dernière définition n'a de sens que si α et β sont compatibles avec $\mathcal{J}$, puisqu'il faut que $(N, N') \in \mathfrak{A}_{\mathcal{J}}$, et que $\beta(u, u')\ \alpha(u, u') =$ identité : c'est ce qu'exprime la première condition de la définition 1.

Si donc α et β sont compatibles avec $\mathcal{J}$ ce que l'on suppose dans la suite, $(\mathfrak{A}_{\mathcal{J}}, \mathfrak{M}_{\mathcal{J}}, \alpha, \beta)$ est une catégorie avec modèles et fonctions de dégénérescence.

Si K est un foncteur défini sur $\mathfrak{A}$, on définit $K_{\mathcal{J}}$ de la même façon de $K_{\mathcal{J}}$.

Dans le paragraphe suivant on suppose remplies, les conditions de la définition 1, et on suit les notations de la définition 2.

8. 5. Proposition. — *Soit* K *un foncteur covariant*

$$\mathfrak{A} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}.$$

Si K *est fortement représentable*, $K_{\mathcal{J}}$ *est fortement représentable.*

Démonstration. — Il résulte de la deuxième condition de la définition 1 que l'application $S(B) \to S(A)$ donnée par $u' \to \beta(\mu u')$ est une bijection. Soit M' la source de u', posons $u = \beta(\mu u')$ et soit M la source de u.

Alors $K(\mu) : K_{u'}(B) \to K_u(A)$, $\hat{K}(\mu) : K(M', u') \to K(M, u)$, si bien que

$$K_{\mathcal{J}}(A, B) = \sum_{u \in S(A)} K_u(A)/K(\mu)\, K_{u'}(B)$$

et que $\hat{K}_{\mathcal{J}} = (\hat{K})_{\mathcal{J}}$, à condition d'identifier

$$K(M, u)/K(\mu)\, K(M', u') \qquad \text{et} \qquad (K(M)/K(\alpha(\mu u'))\, K(M'), (u, u'))$$

on définit alors $\chi_{K_{\mathcal{J}}}$ par passage au quotient à partir de χ_K, et $\Gamma_{K_{\mathcal{J}}} \chi_{K_{\mathcal{J}}} = \mathrm{id}$ puisque $\Gamma_K \chi_K = \mathrm{id}$.

Soit ρ la projection $K(A) \to K_{\mathcal{J}}(A, B)$. On a $\psi(u, u') = \rho\psi(u)$ et $(K_{\mathcal{J}})_{(u, u')}(A, B) = K_u(A)/K(\mu)\, K_{u'}(B)$. On en déduit immédiatement que $K_{\mathcal{J}}$ est fortement représentable.

8. 6. Soit K un foncteur covariant $\mathfrak{A} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$; on définit un foncteur $K'_{\mathcal{J}} : \mathfrak{A}_{\mathcal{J}} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$ en posant $K'_{\mathcal{J}}(A, B) = K(A)$ pour

tout objet $(A, B) \in \mathcal{A}_{\mathfrak{J}}$ et $K'_{\mathfrak{J}}(f, f') = K(f)$ pour tout morphisme $(f, f') \in \mathcal{A}_{\mathfrak{J}}$.

Proposition. — *Si* α *et* β *sont compatibles avec* $\mathfrak{J}$, *et si* K *est représentable* (resp. *fortement représentable*, resp. *acyclique sur les modèles*, resp. *augmentable*, resp. *singulier*) $K'_{\mathfrak{J}}$ *est représentable* (resp. *fortement représentable*, resp. *acyclique sur les modèles*, resp. *augmentable*, resp. *singulier*).

8. 7. Soit $(\mathcal{A}, \mathfrak{M}, \alpha, \beta)$ une catégorie avec modèles et fonctions de dégénérescences.

Soient $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{J}$ deux sous-catégories de $\mathcal{A}$ définies comme dans 8. 1. et 8. 4. On suppose que α et β sont compatibles avec $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{J}$. On considère la catégorie $\mathcal{A}_{\mathfrak{I}}$, $\mathfrak{M}_{\mathfrak{I}}$, α, β de 8. 1. Soit $\mathfrak{J}'$, la sous-catégorie de $\mathcal{A}_{\mathfrak{I}}$, définie comme suit : un morphisme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A' \\ {\scriptstyle\mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mu'} \\ B & \xrightarrow{f'} & B' \end{array}$$

est dans $\mathfrak{J}'$ si μ et $\mu' \in \mathfrak{I}$ (c'est la définition d'un morphisme dans $\mathcal{A}_{\mathfrak{I}}$) et si de plus $f' \in \mathfrak{I}$ et $f \in \mathfrak{J}$. $\mathfrak{J}'$ a alors les propriétés exigées d'une sous-catégorie $\mathfrak{J}$ 8. 4., et de plus, les fonctions de dégénérescences α et β de $\mathcal{A}_{\mathfrak{I}}$ sont compatibles avec $\mathfrak{J}'$, au sens de 8. 4. On peut alors définir comme dans 8. 4., une nouvelle catégorie $(\mathcal{A}_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{J}'}$, $(\mathfrak{M}_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{J}'}$, α, β.

Si K est un foncteur $\mathcal{A} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$, on obtient un foncteur $(K_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{J}'} : (\mathcal{A}_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{J}'} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$ en appliquant successivement les constructions de 8. 1. et 8. 4. à K et $K_{\mathfrak{I}}$. Les propositions 8. 2., 8. 5., 8. 6., donnent les propriétés de $(K_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{J}'}$ et de $(K_{\mathfrak{I}})'_{\mathfrak{J}'}$.

9. — Le théorème d'Eilenberg-Zilber.

9. 1. Définition. — On considère de nouveau la catégorie $(\mathcal{S}, \mathfrak{M}, \alpha, \beta)$ définie dans 5. 6. On définit une nouvelle catégorie $(\mathcal{S}^p, \mathfrak{M}^p, \alpha^p, \beta^p)$ comme suit :

$\mathcal{S}^p$ est la catégorie dont les objets sont des suites ordonnées de p objets $X_1, \ldots, X_p$ avec $X_i \in \mathcal{S}$ pour $i = 1, \ldots, p$ et

dont les morphismes sont les suites ordonnées de p morphismes $f = (f_1, \ldots, f_p)$, avec $f_i \in \mathcal{S}$ pour $i = 1, \ldots, p$.

$\mathcal{M}^p$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{S}^p$ dont les objets sont des suites ordonnées de p-modèles de $\mathcal{M}$.

Si $u = (u_1, \ldots, u_p)$ est un morphisme dont la source appartient à $\mathcal{M}^p$, on pose

$$\alpha(u) = (\alpha(u_1), \ldots, \alpha(u_p)) \quad \text{et} \quad \beta(u) = (\beta(u_1), \ldots, \beta(u_p).)$$

En particulier u est dégénéré si l'un quelconque des u_i est dégénéré.

Pour tout objet $X = (X_1, \ldots, X_p)$ et tout morphisme $f = (f_1, \ldots, f_p)$ se $\mathcal{S}^p$, on pose (le produit tensoriel étant pris sur Z)

$$\begin{gathered} K_*(X) = C_*(X_1) \otimes \ldots C_*(X_p),\ K_*(f) = C_*(f_1) \otimes \ldots \otimes C_*(f_p) \\ L(X) = C\ (X_\times \ldots {}_\times X_p),\ L_*(f) = C_*\ (f_1 \times \ldots . \times f_p) \end{gathered}$$

K_* et L_* sont deux foncteurs covariants $\mathcal{S}^p \to \mathcal{G}_{*Z}$.

9. 2. Proposition. — K_* *est fortement représentable.*

Démonstration. — Comme dans 5. 5., on désigne par le même symbole un élément non dégénéré de $X_i \in \mathcal{S}$, et l'élément qu'il engendre dans $C_*(X_i)$. On désignera par $r(x_i)$ le degré de l'élément $x_i \in X_i \in \mathcal{S}$. Donc $\tilde{x}_i : \Delta[r(x_i)] \to X_i$.

Si $x = x_1 \otimes \ldots \otimes x_p \in K_*(X)$ (où $x_i \in X_i$), on pose

$$\chi_{K_*} x = (\delta^{r(x_1)} \otimes \ldots \otimes \delta^{r(x_p)}, \quad \tilde{x})$$

en désignant par $\tilde{x}$ le morphisme $(\tilde{x}_1 \ldots, \tilde{x}_p)$.

On vérifie que $\Gamma_{K_*} \chi_{K_*} =$ identité. K est donc représentable. La formule qui donne $\chi_{K_*}\, x$ montre aussi que si

$$u = (u_1, \ldots, u_p) \in S(X)$$

alors

$$\psi_*(u)x = \Gamma_{K_*} \tau(u) \chi_{K_*}\, x = \begin{cases} o \text{ si } u \neq \tilde{x} \\ x \text{ si } u = \tilde{x} \end{cases}$$

on en déduit que K_* est fortement représentable, et que $K_{*\tilde{x}}(X)$ est le module engendré par l'unique élément x.

9. 3. Proposition. — K_* *est un* $d\mathcal{G}_{*Z}$ *foncteur acyclique sur les modèles.*

DÉMONSTRATION. — On définit une différentielle dans $K_*(X)$ en posant

$$d(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^{r(x_1)+\cdots+r(x_{i-1})} x_1 \otimes \cdots \otimes x_{i-1} \otimes dx_i \otimes x_{i+1} \ldots \otimes x_p.$$

Soit $M = (\Delta[n_1], \ldots, \Delta[n_p]) \in \mathfrak{M}^p$. On désigne par $U(n_i)$ l'homotopie définie dans la proposition 5. 5. relative à $\Delta[n_i]$, par ε_i et η_i les applications ε et η relative à $\Delta[n_i]$. On considère de plus ε_i comme une application $C_*(\Delta[n_i]) \to H_0C_*(\Delta[n_i])$ en convenant que ε_i est nulle sur les n-chaînes avec $n > 0$.

On pose alors, pour $x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \in K_*(M)$

$$U(M)x = \sum_{i=0}^{p} (-1)^{r(x_1)+\cdots+r(x_{i-1})} \eta_1\varepsilon_1(x_1) \otimes \cdots \otimes \eta_{i-1}\varepsilon_{i-1}(x_{i-1}) \otimes U(n_i)x_i \otimes x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_p$$

et on vérifie que $dU + Ud = id - \eta_1\varepsilon_1 \otimes \cdots \otimes \eta_p\varepsilon_p$; en particulier, si x est une zéro-chaîne,

$$dUx = x - \varkappa x$$

en posant $\varkappa = \eta_1\varepsilon_1 \otimes \cdots \otimes \eta_p\varepsilon_p$.

Comme dans 5. 5. on voit que pour toute 1-chaîne z, $\varkappa\, dz = 0$ c'est-à-dire que $\varepsilon(x) = \varepsilon(\varkappa x)$. On pose alors

$$\eta\varepsilon x = \varkappa x$$

et par conséquent $dU_0 = id - \eta\varepsilon$.

On vérifie enfin sans difficulté que U et η sont des applications naturelles de $(\mathfrak{M}^p)^{\alpha p}$.

9. 4. PROPOSITION. — L_* *est fortement représentable.*

DÉMONSTRATION. — Soit $x = x_1 \times \cdots \times x_p \in L_n(X)$ (en désignant encore par le même symbole l'élément x non dégénéré de $X_1 \times \cdots \times X_p$ et l'élément qu'il engendre dans $C_*(X_1 \times \cdots \times X_p) = L_*(X)$ les x_i sont donc des éléments de degré n de X_i, et, puisque $x_1 \times \cdots \times x_p \in X_1 \times \cdots \times X_p$ est non dégénéré $x_i = s_{l_1^i} \ldots s_{l_{a_i}^i} \ldots s_{l_{p_i}^i} x_i'$ où x_i' est non dégénéré, $r(x_i') = n - p_i$ les $l_{a_i}^i$ étant tels que

(i) $l_1^i > \cdots > l_{p_i}^i$

(ii) Il n'existe pas de suite $a_i (1 \leqslant a_i \leqslant p_i)$, $i = 1, \ldots, p$ telle que $l_{a_1}^1 = l_{a_2}^2 = \cdots = l_{a_p}^p$.

On pose alors :

$$\chi_{L_*}x = \left(\prod_{i=1}^{p} s_{l_1^i} \ldots s_{l_{p_i}^i}\delta^{r(x'_i)}, \tilde{x}'\right)$$

où $\tilde{x}'$ est le morphisme $(\tilde{x}'_1, \ldots, \tilde{x}'_p)$.

On vérifie que $\Gamma_{L_*}\chi_{L_*} =$ identité. L_* est donc représentable. La formule qui donne χ_{L_*} montre de plus que si $u \in S(X)$

$$\psi_*(u)x = \Gamma_{L_*}\tau(u)\chi_{L_*}x = \begin{cases} 0 \text{ si } u \neq \tilde{x}' \\ x \text{ si } u = \tilde{x}' \end{cases}$$

On en déduit que L_* est fortement représentable, et que $L_{n}, {}_{\tilde{x}'}(X)$ est le groupe commutatif libre engendré par les éléments $\sum_{i=1}^{p} s_{l_1^i} \ldots s_{l_{p_i}^i} x'_i$ avec $p_i + r(x'_i) = n$ et où les $l_{a_i}^i$ vérifient les relations (i) et (ii).

9. 5. Proposition. — L_* *est un* $d\mathcal{G}_{*z}$ *foncteur acyclique sur les modèles.*

Le fait que L est un $d\mathcal{G}_{*z}$ foncteur est évident. On note que si f_i est une application $I \times X_i \to Y_i$ alors l'application $f\colon\ I \times X_1 \times \cdots \times X_p \to Y_1 \times \cdots \times Y_p$ définie par $f(\alpha, x_1, \ldots, x_p) = f_1(\alpha, x_1) \times \cdots \times f_p(\alpha, x_p)$ est telle que

$$f \circ \varepsilon_e = (f_1 \circ \varepsilon_e, \ldots, f_p \circ \varepsilon_e) \qquad \text{pour} \qquad e = 0,1.$$

Si M est le modèle $\Delta[n_1] \times \cdots \times \Delta[n_p]$ et si on prend pour application f_i les homotopies ω_{n_i} de (1. 4.), on définit par le procédé précédent une homotopie ω :

$$1 \times \Delta[n_1] \times \cdots \times \Delta[n_p] \to \Delta[n_1] \times \cdots \times \Delta[n_p].$$

telle que $\omega \circ \varepsilon_0 : M \to O_{n_1} \times \cdots \times O_{n_p}$ et $\omega \circ \varepsilon_1 =$ identité.

Appliquons alors le lemme 5. 5. on obtient une homotopie U sur $L_*(M)$ telle que $dU + Ud = \mathrm{id} - \eta_1\varepsilon_1 \times \cdots \times \eta_p\varepsilon_p$ (notations de 9. 3.) on conclut alors comme dans 9. 3.

9. 6. Proposition. — $H_0\, L_*|\mathfrak{M}^p)^{\alpha p}$ *et* $H_0 K_*|(\mathfrak{M}^p)^{\alpha p}$ *sont naturellement équivalents.*

Démonstration. — Soit T la transformation naturelle $L_0 \to K_0$ définie par

$$T(x_1 \times \cdots \times x_p) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_p$$

(x_i de degré zéro à appartenant X_i) $\varepsilon_K T \eta_L$ est une équivalente naturelle.

9. 7. Théorème. — *Soit G un système local covariant* (resp. *contravariant*) $\mathfrak{M}^p \to \mathcal{G}_Z$; *les foncteurs* $H_*(K_* \star G)$ *et* $H_*(L_* \star G)$ (resp. H^* *Hom** (K_*, G) *et* H^* *Hom** $(L_*, \underline{G})$ *sont naturellement équivalents.*

Démonstration. — *Hom*$^*(K_*, G)$ *et Hom*$^*(L_* G)$ sont des foncteurs représentables et acycliques sur les modèles puisque K_* et L_* sont fortement représentables et acycliques sur les modèles (cf. 7. 4.*, 7. 6.*, 9. 2., 9. 3., 4. 9., 9. 5.); pour démontrer le théorème il suffit donc de montrer que H^0 *Hom*$^*(K_*, G)$ et H^0 *Hom*$^*(L_*, G)$ sont naturellement équivalents sur les modèles (cf. 6. 1.*). Or (cf. 7. 9.) pour tout $M \in (\mathfrak{M}^p)^{\alpha\rho}$, on a

$$H^0\,\mathrm{Hom}^*(K_*,\ G)(M) = \mathrm{Hom}_Z(H_0K_*(M),\ G(M))$$
$$H^0\,\mathrm{Hom}^*(L_*,\ G)(M) = \mathrm{Hom}_Z(H_0L_*(M),\ G(M))$$

et pour tout morphisme $u \in (\mathfrak{M}^p)^{\alpha p}$ on a

$$H^0\,\mathrm{Hom}^*(K_*,\ G)(u) = \mathrm{Hom}_Z(K_0K_*(u),\ G(u))$$
$$H^0\,\mathrm{Hom}^*(L_*,\ G)(u) = \mathrm{Hom}_Z(H_0L_*(u),\ G(u)).$$

Comme $\mathrm{Hom}^*(K_*, G)$ et *Hom*$^*(K_*, G)|(\mathfrak{M}^p)^{\alpha p}$ (resp. K_* remplacé par L_*) sont naturellement équivalents, le théorème résulte de 9. 6. Même démonstration pour $K_* \star G$ et $L_* \star G$.

9. 8. Soit $\mathfrak{I}$ la sous-catégorie de $\mathcal{S}$ (cf. 8. 1.) dont les objets sont ceux de $\mathcal{S}$ et dont les morphismes $\mu : Y \to X \in \mathfrak{I}$ si et seulement si $Y \subset X$ et si μ est l'injection canonique. α et β sont compatibles avec $\mathfrak{I}$, et $C_*(\mu)$ est injectif si $\mu \in \mathfrak{I}$. Soit $\mathfrak{I}^p$ la sous-catégorie de $\mathcal{S}^p$ dont les objets sont ceux de $\mathcal{S}^p$ et, dont les morphismes $\mu : (Y_1, \ldots, Y_p) \to (X_1, \ldots X_p) \in \mathfrak{I}^p$ si et seulement si $Y_i \subset X_i$ pour $i = 1, \ldots, p$ et si $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_p)$ est tel que $\mu_i \in \mathfrak{I}$. α^p et β^p sont compatibles avec $\mathfrak{I}^p$. On peut alors considérer la catégorie $(\mathcal{S}^p_{\mathfrak{I}^p}, \mathfrak{M}^p_{\mathfrak{I}^p}; \alpha^p, \beta^p)$ et les foncteurs $K_{\mathfrak{I}^p}$, $L_{\mathfrak{I}^p}$ (où l'on écrit $K_{\mathfrak{I}^p}$ et $L_{\mathfrak{I}^p}$ au lieu de $K_{*\mathfrak{I}^p}$ et $L_{*\mathfrak{I}^p}$). $K_{\mathfrak{I}^p}(\mu)$ et $L_{\mathfrak{I}^p}(\mu)$ sont injectifs si $\mu \in \mathfrak{I}^p$. 8. 2. et 8. 3. permettent alors d'énoncer :

Théorème. — *Soit G un système covariant* (resp. *contravariant*) $\mathfrak{M}^p \to \mathcal{G}_Z$; *les foncteurs* $H_*(K_{\mathfrak{I}^p} \star G)$ *et* $H_*(L_{\mathfrak{I}^p} \star G)$, (resp. H^* *Hom*$^*(K_{\mathfrak{I}^p}, G)$ et H^* *Hom*$^*(L_{\mathfrak{I},p} G)$) *sont naturellement équivalents.*

9. 9. Soit X un objet de $\mathcal{S}^p$, et considérons la catégorie $(\mathcal{S}^p_X, \mathfrak{M}^p_X, \alpha^p_X, \beta^p_X)$ (cf. 5. 6.) et les foncteurs K_X, L_X (où l'on a supprimé les $*$ pour simplifier l'écriture). D'après la proposition 5. 6., K_X et L_X sont représentables et acycliques sur les modèles. Ils sont aussi fortement représentables, comme on le voit sans peine. Soit μ un morphisme de $\mathcal{S}^p_X$ *i-e* un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[d] \arrow[dr] & \\ Y \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

on dira que $\mu \in \mathcal{J}^p_X$ si la flèche verticale est dans $\mathcal{J}^p$.

α^p_X et β^p_X sont alors compatibles avec $\mathcal{J}^p_X$ et on peut énoncer :

Théorème. — *Soit G un système local covariant* (resp. *contravariant* $\mathfrak{M}^p_X \to \mathcal{G}_Z$; *les foncteurs* $H_*((K_X)_{\mathcal{J}^p_X} \divideontimes G)$ *et* $H_*((L_X)_{\mathcal{J}^p_X} \divideontimes G)$ (resp. $H^*\mathit{Hom}^*((K_X)_{\mathcal{J}^p_X}, G)$ et $H^*\mathit{Hom}^*(L_X)_{\mathcal{J}^p_X}, G))$ *sont naturellement équivalents.*

9. 10. Remarque. — Soit $T : K \to L$ est une transformation naturelle de foncteurs fortement représentables $\mathcal{A} \to d\mathcal{G}_{*\mathrm{A}}$ telle que $T : K_u(A) \to L_u(A)$, pour tout $A \in \mathcal{A}$ et $u \in S(A)$. Notons (τ) cette propriété.

Si T a la propriété (τ), T induit une transformation naturelle $T \divideontimes G : K \divideontimes G \to L \divideontimes G$ et une transformation naturelle $\mathit{Hom}^*(T, G) : \mathit{Hom}^*(L, G) \to \mathit{Hom}^*(K, G)$. T induit aussi une transformation naturelle $T_{\mathcal{J}} : K_{\mathcal{J}} \to L_{\mathcal{J}}$, et il résulte de 8. 2. que $T_{\mathcal{J}}$ à la propriété (τ). Enfin T induit une transformation naturelle $T_A : K_A \to L_A$ pour tout objet $A \in \mathfrak{A}$, qui a la propriété (τ).

Supposons de plus que T soit une extension (donnée par le théorème 6. 1.$_*$) d'une transformation naturelle

$$H_0 K | \mathfrak{M}^\alpha \to H_0 L | \mathfrak{M}^\alpha.$$

Il résulte alors de ce qui précède et de (6. 1.)* (6. 1.)$_*$ que les transformations naturelles $H(T \divideontimes G)$, etc... sont les transformations naturelles $H_*(K \divideontimes G) \to H_*(L \divideontimes G)$ etc..., déduites du théorème des modèles acycliques.

Or on sait que dans le cas $p = 2$, l'isomorphisme du théorème 9. 7. appliqué à l'homologie, et au système local cons-

tant Z, est donné par les transformations naturelles d'Eilenberg

$$\nabla : K_* \to L_* \qquad \text{et} \qquad f : L_* \to K_*$$

(cf. [2] et [8]) que l'on obtient explicitement en appliquant directement la construction donnée dans 6. 1*. pour démontrer le théorème des modèles acycliques. On voit immédiatement sur les formules explicites que ∇ et f ont la propriété (τ). On en déduit en particulier ceci : l'isomorphisme (en cohomologie) donné par le théorème 9. 9. est induit par les deux transformations naturelles

$$Hom^*((\nabla_A)_{\mathcal{J}^s}, G) \qquad \text{et} \qquad Hom^*((f_A)_{\mathcal{J}^s}, G).$$

10. — Systèmes locaux et systèmes locaux classiques.

10. 1. *Systèmes locaux classiques.* — On rappelle, (cf. [7]) qu'un système local classique G sur un ensemble simplicial X est la donnée :

(i) pour chaque sommet $x_0 \in X_0$ d'un groupe abelien G_{x_0};

(ii) pour chaque 1-simplexe $x_1 \in X_1$ d'un isomorphisme $G(x_1) : G_{d_0 x_1} \to G_{d_1 x_1}$ tel que si $x_1 = s_0 x_0$, $G(x_1) =$ identité, et si $\sigma \in X_2$, $G(d_2\sigma) \circ G(d_0\sigma) = G(d_1\sigma)$.

a. Un système local classique G *sur* $X \in \mathcal{S}$ *définit un système local* G *au sens du* § 7 *sur la catégorie* $\mathfrak{M}_X$(cf. 5. 6.).

Pour le voir, on rappelle que les objets de $\mathfrak{M}_X$ sont les couples $(\Delta[n], x)$ où x est une application simpliciale :

$$\Delta[n] \to X,$$

et que les morphismes de $\mathfrak{M}_X$ sont les diagrammes commutatifs dans $\mathcal{S}$:

$$(u, x, y) \qquad \begin{tikzcd}[row sep=small] \Delta[n] \arrow[dd, "u"'] \arrow[dr, "x"] & \\ & X \\ \Delta[m] \arrow[ur, "y"'] & \end{tikzcd}$$

on pose alors :

$$G(\Delta[n], x) = G_{x(0_n)}, \qquad G(u, x, y) = G(\rho)$$

où $\rho \in X_1$ est le 1-simplexe défini de la façon suivante : dans $\Delta[m]$, il existe un et un seul 1-simplexe dont les zéros faces sont 0_m et $u\,(0_n)$; ρ est l'image par y de ce simplexe; les

0-faces de ρ sont $d_1\rho = y(0_m)$, $d_0\rho = x(0_n)$, et $G(u, x\ y,)$ est donc un isomorphisme $G(\Delta[n], x) \to G(\Delta[m], y)$.

Le fait que $\mathrm{G}(s_0 x_0) =$ identité pour $x_0 \in \mathrm{X}_0$ entraîne que $G(1_{\mathrm{M}}) =$ identité pour tout $\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_{\mathrm{X}}$; de même

$$\mathrm{G}(d_2\sigma) \circ \mathrm{G}(d_0\sigma) = \mathrm{G}(d_1\sigma)$$

entraîne que si f et g sont deux morphismes de $\mathfrak{M}_{\mathrm{X}}$, $G(g \circ f) = G(g) \circ G(f)$.

G est donc un foncteur covariant $\mathfrak{M}_{\mathrm{X}} \to \mathcal{G}_{\mathrm{Z}}$. Comme $G(f)$ est un isomorphisme pour tout morphisme $f \in \mathfrak{M}_{\mathrm{X}}$, on obtient un système local contravariant en remplaçant $G(f)$ par l'isomorphisme réciproque $G(f)^{-1}$.

b. Un système local G sur $\mathfrak{M}_{\mathrm{X}}$ définit un système local classique G *sur* X.

Pour le voir, on pose, pour tout $x \in \mathrm{X}_0$, et tout $\rho \in \mathrm{X}$

$$\mathrm{G}_x = G(\Delta[0], \tilde{x}),$$
$$\mathrm{G}(\rho) = G^{-1}(\widetilde{d_1\delta^1}, \widetilde{d_1\rho}, \tilde{\rho}) \circ G(\widetilde{d_0\delta^1}, \widetilde{d_0\rho}, \tilde{\rho})$$

si G est covariant, l'isomorphisme du second membre de $\mathrm{G}(\rho)$ devant être remplacé par l'isomorphisme réciproque si G est contravariant, (on a bien des isomorphismes car $\widetilde{d_1\delta^1}$ et $\widetilde{d_0\delta^1}$ appartiennent à S(X) et par conséquent (cf. 5. 6.)
$(\widetilde{\beta d_1\delta^1}, \widetilde{d_1\rho}, \tilde{\rho}) = (\widetilde{d_1\delta^1}, \widetilde{d_1\rho}, \tilde{\rho})$, $\beta(\widetilde{d_0\delta^1}, \widetilde{d_0\rho}, \tilde{\rho}) = (\widetilde{d_0\delta^1}, \widetilde{d_0\rho}, \tilde{\rho})$.
G est un système local classique: $\mathrm{G}(s_0 x) =$ identité car $G(1_{\mathrm{M}}) =$ identité pour $\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_{\mathrm{X}}$, et $\mathrm{G}(d_2\sigma) \circ \mathrm{G}(d_0\sigma) = \mathrm{G}(d_1\sigma)$ pour $\sigma \in \mathrm{X}_2$ car si f et g sont des morphismes de $\mathfrak{M}_{\mathrm{X}}$, on a $G(f \circ g) = G(g) \circ G(g)$ si G est covariant ou $G(f \circ g) = G(g) \circ G(f)$ si G est contravariant.

c. Soit G un système local (par exemple le covariant) sur $\mathfrak{M}_{\mathrm{X}}$ on lui associe par le procédé de *b* un système local classique G sur X, auquel on peut appliquer le procédé de *a* on obtient ainsi un système local G' sur $\mathfrak{M}_{\mathrm{X}}$.

Alors G et G' sont naturellement équivalents: en effet, si on exprime G' en fonction de G en utilisant les constructions explicites données dans *a* et *b*, on trouve que, si (u, x, y) est le morphisme

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] \Delta[n] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, "x"] & \\ \Delta[m] \arrow[r, "y"'] & \mathrm{X} \end{tikzcd}$$

de $\mathfrak{M}_X$, alors

$$G'(\Delta[n],x) = G(\Delta[0], x\circ\tilde{O}_n)$$
$$G'(u, x, y) = G^{-1}(\tilde{O}_m, y\circ\tilde{O}_m, y)\circ G(u, x, y)\circ G(\tilde{O}_n, x\circ\tilde{O}_n, x)$$

($G(\tilde{O}_m, y\circ\tilde{O}_m, y)$ est un isomorphisme puisque $(\tilde{O}_m, y\circ\tilde{O}_m, y)$ est non dégénéré).

La transformation naturelle $G' \to G$ est alors donnée par : $\mathrm{T}(\Delta[n], x) = G(\tilde{O}_n, x\circ\tilde{O}_n, x)$. Le fait que T soit naturel résulte de la formule même donnant $G'(u, x, y)$.

L'équivalence naturelle entre G et G' montre que $G(f)$ est un isomorphisme pour tout $f \in \mathfrak{M}_X$. Comme un système local G sur $\mathfrak{M}$ induit toujours un système local sur $\mathfrak{M}_X$ (en posant $G(\Delta[n], x) = G(\Delta[n])$, $G(u, x, y) = G(u)$, on voit que tout système local sur $\mathfrak{M}$ possède la propriété de transformer les morphismes, dégénérés ou non, de $\mathfrak{M}$ en des isomorphismes.

10. 2. Puisque G et G' sont naturellement équivalents, les foncteurs $\mathrm{C}_{*X} \divideontimes G$ et $\mathrm{C}_{*X} \divideontimes G'$ le sont aussi d'après 7. 7.; explicitons donc $\mathrm{C}_{*X} \divideontimes G'$ (Y, f) où $(\mathrm{Y}, f) \in \mathcal{S}_X$; un morphisme $u' = (\tilde{y}, f\circ\tilde{y}, f) : (\Delta[n], f\circ\tilde{y}) \to (\mathrm{Y}, f)$ est non dégénéré si et seulement si $y \in \mathrm{Y}_n$ est non dégénéré. $\mathrm{C}_{n,\,X,u'}(\mathrm{Y}, f)$ est donc égal à $\mathrm{C}_{n,\tilde{y}}(\mathrm{Y})$ c'est-à-dire au Z-module engendré par y. Avec les notations précédentes, $\mathrm{M}_{u'} = (\Delta[n], f\circ\tilde{y})$ et par conséquent $G'(\mathrm{M}_{u'}) = G(\Delta[0], f\circ\tilde{y}\circ\tilde{O}_n) = \mathrm{G}_{f(y_0)}$ en désignant par y_0 le « zéro-ième » sommet de y, à savoir $d_1 \ldots d_n y$.

$\mathrm{C}_{n,\,X} \divideontimes G'$ (Y, f) est donc engendré, comme objet de $\mathcal{C}_{\mathcal{S}_* Z}$, par les éléments de la forme $y \otimes g$ où $g \in \mathrm{G}_{f(y_0)}$. On constate sans peine que la différentielle d'un tel élément est $d(y\otimes g) = d_0 y \otimes \mathrm{G}^{-1}(f(\rho))g + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i d_i y \otimes g$ où ρ désigne le 1-simplexe $d_2 \ldots d_n y$, et où $d_i y$ doit être remplacé par 0 si $d_i y$ est dégénéré. $(i = 0, \ldots n)$. $\mathrm{C}_{*X} \divideontimes G'(\mathrm{Y}, f)$ est donc le complexe des chaînes à coefficients dans le système local classique sur Y induit par l'application $\mathrm{X} \xrightarrow{f} \mathrm{X}$ à partir du système local classique G associé à G (cf. [7]). La considération de G' au lieu de celle de G a donc le double avantage d'avoir un caractère fonctoriel et de donner tous les systèmes locaux induits par les applications $\mathrm{Y} \to \mathrm{X}$.

De même Hom (C_{*X}, G') (Y, f) est le complexe des cochaînes à coefficients dans le système local classique sur Y induit par l'application $f: Y \rightarrow X$ à partir du système local classique G associé à G, c'est-à-dire : une n-chaîne est une application qui à chaque $y \in Y_n$ non dégénéré fait correspondre un élément $\varphi(y) \in G_{f(y_0)}$; la différentielle de φ est la n-cochaîne $\delta\varphi$ telle que, si $y \in Y_{n+1}$ est non dégénéré,

$$(\delta\varphi)(y) = G(f(\rho))\varphi(d_0 y) + \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \varphi(d_i y)$$

où $\rho = d_2 \ldots d_{n+1} y$ et où $d_i y$ doit être remplacé par 0 si $d_i y$ est dégénéré $(i = 0, 1 \ldots n + 1)$.

Si on remplace C_{*X} par $(C_X)_{\mathcal{J}}$ dans les considérations précédentes, on obtient bien entendu les complexes de chaînes (resp. cochaines) classiques qui donnent l'homologie (resp. la cohomologie) relative d'un couple formé d'un objet et d'un sous objet de $\mathcal{S}$, à valeur dans un système local de coefficients.

10. 3. On peut développer les considérations analogues dans $\mathcal{S}^p$ (cf. § 9).

Bornons-nous au cas de $\mathcal{S}^2$.

Soit $X = (X_1, X_2) \in \mathcal{S}^2$. Un morphisme de $\mathfrak{M}_X^2$ est un couple formé de deux morphismes, l'un dans $\mathfrak{M}_{X_1}$ l'autre dans $\mathfrak{M}_{X_2}$:

$$u = (u, \ u_2) = \left(\begin{tikzcd} \Delta[m_1] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \Delta[n_1] \arrow[r] & X_1, \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \Delta[m_2] \arrow[dr] & \\ \Delta[n_2] \arrow[u] \arrow[r] & X_2 \end{tikzcd} \right) : \ M \rightarrow N \in \mathfrak{M}_X^2$$

dans 10. 1. a on a fait correspondre à chacun des modèles M_i un sommet x_i de $(X_i)_0$ $(i = 1, 2)$ et à chacun des morphismes u_i un 1-simplexe ρ_i de $(X_i)_1$ $(i = 1,2)$.

Si G est un système local classique sur $X_1 \times X_2$, on obtient un système local sur $\mathfrak{M}_X^2$ en posant

$$G(M) = G_{x_1 \times x_2} G(u) = G(\rho_1 \times \rho_2)$$

réciproquement si G est un système local sur $\mathfrak{M}_X^2$, on obtient un système local classique sur $X_1 \times X_2$ en posant

$$G_{x_1 \times x_2} = G((\Delta[0], \tilde{x}_1), (\Delta(0), \tilde{x}_2)) \quad \text{pour} \quad x_i \in (X_i)_0 \quad (i = 1, 2)$$

et en définissant $G(\rho_1 \times \rho_2)$ par la formule donnée dans

10. 1. *b* pour $G(\rho)$ en « dédoublement » tous les morphismes qui y figurent, conformément à la définition des objets et des morphismes de $\mathcal{S}_X^2$.

Partant d'un foncteur G sur $\mathfrak{M}_X^2$ on obtient un système local classique sur $X_1 \times X_2$ qui redonne un foncteur G' sur $\mathfrak{M}_X^2$: G et G' sont naturellement équivalents.

CHAPITRE III

LA SUITE SPECTRALE DES FIBRÉS

11. — La catégorie des fibrés.

Étant donné un fibré $\pi = (E, p, B)$, on lui associe une suite spectrale (d'homologie) qui est un foncteur défini sur $\mathcal{F}$, dont l'aboutissement est $H_*(E)$ et dont le terme $E^2_{p,q}$ est canoniquement isomorphe à $H_p(B, \mathcal{H}_q(F))$ où $\mathcal{H}_q(F)$ désigne un système local (classique) de module isomorphe à $H_q(F)$ déterminé par le fibré. Pour arriver à ce résultat on considère les deux foncteurs K_* et $L_* : \mathcal{F} \to d\mathcal{G}_{*}z$, K (resp. L) faisant correspondre à π les chaînes de la base B (resp. de l'espace total E). On filtre alors $L_*(\pi) = C_*(E)$ en introduisant la notion de *dimension* d'un morphisme de $\mathcal{F}$ dont la source est un modèle. Cette filtration permet alors de définir une suite spectrale qui est un foncteur sur $\mathcal{F}$, et dont l'aboutissement est $H_*(E)$. K_* étant singulier, on se propose de montrer que E^1_{*q} satisfait, pour tout $q \geqslant 0$, aux hypothèses de 7. 10. On a donc à démontrer que pour tout $q \geqslant 0$,

i) E^1_{*q} est représentable
ii) E^1_{*q} est acyclique sur les modèles,
iii) E^1_{*q} est augmentable.

On désigne alors par $\mathbf{G}_q$ le système local $H_0 E^1_{*q} | \mathcal{FM} = E^2_{0,q} | \mathcal{FM}$. D'après 7. 10 on a alors

$$E^2 = H_* E^1 \approx H_*(K_* \star \mathbf{G}_q).$$

Il ne reste plus qu'à expliciter $H_*(K_* \star \mathbf{G}_q)$ ce qui est facile en utilisant les résultats du § 10.

Le but de ce paragraphe est de montrer que E^1_{*q} est représentable. En utilisant des sous-catégories $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{J}$ convenables de $\mathcal{F}$, on démontre un résultat analogue pour les suites spec-

trales relatives d'un fibré et d'un sous-fibré (il y a deux notions distinctes de sous-fibré d'un fibré donné).

11. 1. Soit $\mathcal{F}$ la catégorie des fibrés (cf. (1,5)); on désigne par $\mathcal{F}\mathcal{M}$ la sous-catégorie des modèles (*i.e* des fibrés dont la base est un modèle $\Delta[n] \in \mathcal{M}$). Si $\pi = (E, p, B)$ est un fibré, et $f: X \to B$ une application de $\mathcal{S}$, le fibré (f^*E, P, X) induit par f sera désigné par $f^*\pi$. On note que si f et g sont deux applications, les deux fibrés $g^*(f^*\pi)$ et $(f \circ g)^*\pi$ sont canoniquement isomorphes : dans la suite ils seront toujours identifiés. Soit $\Phi : \pi' \to \pi$ un morphisme de $\mathcal{F}$

$$\Phi : \begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{f} & E \\ {\scriptstyle \underline{p}'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \underline{p}} \\ B' & \xrightarrow[g]{} & B \end{array}$$

et supposons que g, se factorise en $g_1 \circ g_2$. Il existe alors une application et une seule $h : E' \to g_1^*E$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} E' & \xrightarrow{h} & g_1^*E & \xrightarrow{Q} & E \\ {\scriptstyle \underline{p}'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P} & & \downarrow{\scriptstyle \underline{p}} \\ B' & \xrightarrow[g_2]{} & X & \xrightarrow[g_1]{} & B \end{array}$$

commute et que $Q \circ h = f$: si $e' \in E'$, alors $he' = (g_2\underline{p}'e', fe')$, autrement dit $\Phi = \Phi_1 \circ \Phi_2$, où Φ_1, désigne le carré de droite, et Φ_2 le carré de gauche.

12. 2. Soient α et β les fonctions de dégénérescence de la catégorie $\mathcal{S}$ (cf. (5. 5.)) on définit des fonctions de dégénérescence pour $\mathcal{F}$, en posant pour tout morphisme $\mathfrak{U} : \mu \to \pi$ où $\mu \in \mathcal{F}\mathcal{M}$,

$$\mathfrak{U} : \begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{f} & E \\ {\scriptstyle \underline{p}'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \underline{p}} \\ M & \xrightarrow[u]{} & B \end{array} : u \to \pi \quad (M \in \mathcal{M})$$

$\alpha(\mathfrak{U}) = \mathfrak{U}_2$, $\beta(\mathfrak{U}) = \mathfrak{U}_1$ où $\mathfrak{U}_1$ et $\mathfrak{U}_2$ sont les morphismes construits comme Φ_1 et Φ_2 de 11. 1. à l'aide de la factorisation $u = \beta(u)\,\alpha(u)$. En particulier, $\mathfrak{U} \in S(\pi)$ si et seulement si $u \in S(B)$, $E' = u^*E$ et si f est l'application canonique $u^*E \to E$. L'application $\mathfrak{U} \to u$ est donc une bijection de $S(\pi)$ sur $S(B)$. En particulier, la convention 5. 1. est vérifiée.

11. 3. Avec les notations de 11. 1., disons qu'un morphisme $\Phi \in \mathfrak{I}$ si $B' \subset B$, $g : B' \to B$ est l'injection canonique, $E' = \underline{p}^{-1}(B')$ est l'injection canonique $\underline{p}^{-1}(B') \to E$ et $\underline{p}' = \underline{p}|E'$; disons que $\Phi \in \mathfrak{J}$ si $E' \subset E$, $B' = B$, f est l'injection canonique $E' \to E$ et $\underline{p}' = p|E'$. α et β sont alors compatibles avec $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{J}$ (cf. § 8).

11. 4. *Le foncteur* $K_* : \mathcal{F} \to d\mathcal{G}_{*Z}$.

Avec les notations de 11. 1., on pose $K_*(\pi) = C_*(B)$ et $K_*(\Phi) = C_*(g)$.

Proposition. — K_* *est singulier.*

Démonstration. — Si $\mathfrak{U}$ est le morphisme de 11. 2.,

$$K_*(\pi', \mathfrak{U}) = (C_*(M), \mathfrak{U});$$

comme l'application $\mathfrak{U} \to u$ est bijective si $\mathfrak{U}$ est non dégénéré, on a, en identifiant $K_*(\pi', \mathfrak{U})$ et $C_*(M, u)$, $i(\mathfrak{U})$ et $i(u)$, $j(\mathfrak{U})$ et $j(u)$,

$$\hat{K}_*(\pi) = \hat{C}_*(B), \qquad \hat{K}_*(\Phi) = \hat{C}_*(g)$$

on pose alors $\chi_{K_*}(\pi) = \chi_{C_*}(B)$. K_* est donc représentable, fortement représentable et $K_{*\mathfrak{U}}(\pi) = C_{*,u}(B)$. On pose de même $U_n(\mu) = U_n(M)$, etc...

11. 5. *Le foncteur* $L_* : \mathcal{F} \to d\mathcal{G}_{*Z}$.

Avec les notations de 11. 1, on pose

$$L_*(\pi) = C_*(E), \; L_*(\Phi) = C_*(f).$$

Proposition. — L_* *est fortement représentable.*

Démonstration. — On construit une application $\Sigma : S(E) \to S(\pi)$ de la manière suivante : soit $\nu : M \to E \in S(E)$, $(M \in \mathfrak{M})$, et N le but de $\alpha(\underline{p}\nu)$.

On considère le diagramme commutatif suivant :

(1)
$$\begin{tikzcd}
\beta(\underline{p}\nu)^*E \arrow[rr, "Q"] \arrow[dd, "P"'] & & E \arrow[dd, "\underline{p}"] \\
& M \arrow[ul, dashed, "\Omega"'] \arrow[ur, "\nu"] \arrow[dl, "\alpha(\underline{p}\nu)"'] \arrow[dr, "\underline{p}\nu"] & \\
N \arrow[rr, "\beta(\underline{p}\nu)"'] & & B
\end{tikzcd}$$

où P et Q désignent les applications canoniques (cf. 1. 5. d). La commutativité du diagramme montre que pour tout $m \in \bar{H}$, $(\alpha(p\nu)m, \nu m) \in \beta(p\nu)^*E$. On définit ainsi une application Ω : $M \to \beta(p\nu)^*E$ qui complète commutativement (1). Le fibré de gauche, soit μ, appartient à $\mathcal{F}\mathfrak{M}$, le grand carré est un morphisme $\mu \to \pi \in S(\pi)$. On définit Σ comme étant l'application qui à ν fait correspondre ce carré. Puisque $L_*(\pi) = C_*(E)$, on définit $\chi_{L_*}(\pi)$ en posant, tout $e \in E_n$, e non dégénéré :

$$\chi_{L_n} e = i(\Sigma\tilde{e})\Omega(\delta^n) \in L(\mu, \Sigma\tilde{e}) \subset \hat{L}_n(\pi).$$

(avec $M = \Delta[n]$, $\nu = \tilde{e}$, etc... dans (1)).

On voit alors que $\Gamma_{L_*}\chi_{L_*} =$ identité, et que χ_{L_*} est une transformation naturelle $L_* \to \hat{L}_*$. Donc L_* est représentable. De plus, si $\mathfrak{U} \in S(\pi)$, on remarque que $\psi_*(\mathfrak{U}) = 0$ sauf si $\mathfrak{U} \in Im(\Sigma)$ et dans ce dernier cas, $\psi(\Sigma\tilde{e})e = e$. On en déduit que L_* est fortement représentable, et que $L_{*\mathfrak{U}}(\pi) = 0$ si $\mathfrak{U} \notin Im(\Sigma)$,

$$L_{*\Sigma\tilde{e}}(\pi) = \sum_{\Sigma\tilde{e}' = \Sigma\tilde{e}} C_{*,\tilde{e}'}(E)$$

11. 6. *Dimensions.* — Soit $\mathfrak{U}$ le morphisme $\mu \to \pi \in \mathcal{S}$ de 11. 2. On dit que $\mathfrak{U}$ est de dimension p, et on écrit $\dim \mathfrak{U} = p$, si $M = \Delta[p]$. Les modèles de $(\mathcal{F}\mathfrak{M})_{\mathfrak{J}}$ sont du type $(\mu, \emptyset)$ où $\mu \in \mathcal{F}\mathfrak{M}$. Si $(\mathfrak{U}, \emptyset_{\pi'}) : (\mu, \emptyset) \to (\pi, \pi')$ est un morphisme de $\mathcal{F}_{\mathfrak{J}}$ on pose $\dim(\mathfrak{U}, \emptyset_{\pi'}) = \dim \mathfrak{U}$.

Les modèles de $(\mathcal{F}\mathfrak{M})_{\mathfrak{I}}$ sont du type (μ, μ') où μ et $\mu' \in \mathcal{F}\mathfrak{M}$ μ et μ' ayant même base dans $\mathfrak{M}$. Si $(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}') : (\mu, \mu') \to (\pi, \pi')$ est un morphisme de $\mathcal{F}_{\mathfrak{I}}$ on a donc $\dim \mathfrak{U} = \dim \mathfrak{U}'$. On pose $\dim(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}') = \dim \mathfrak{U} = \dim \mathfrak{U}'$.

On déduit de ce qui précède une notion de dimension dans la catégorie $(\mathcal{F}_{\mathfrak{J}})_{\mathfrak{I}'}$.

Le couple $(\mathcal{S}, L_*)$ (resp. $(\mathcal{S}_{\mathfrak{J}}, L_{\mathfrak{J}})$, resp. $(\mathcal{S}_{\mathfrak{I}}, L_{\mathfrak{I}})$, resp. $((\mathcal{S}_{\mathfrak{J}})_{\mathfrak{I}'}, (L_{\mathfrak{J}})_{\mathfrak{I}'})$) vérifie alors les conditions suivantes :

11. 7. *Compatibilité avec la dimension.* — Soient $(\mathfrak{a}, \mathfrak{M}, \alpha, \beta)$ une catégorie avec modèles, fonctions de dégénérescence α, β, et K_* un foncteur fortement représentable covariant $\mathfrak{a} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$. A tout morphisme u dont la source est un modèle M, on fait correspondre en entier $\geqslant 0$, $\dim u$ tel que

dim $u = \dim 1_M$. On dit que le couple $(\mathcal{A}, K_*)$ est compatible avec la dimension si

(i) $\dim \beta(u) \leqslant \dim u$, l'égalité n'ayant lieu que si $\beta(u) = u$.

(ii) $K_{n,u}(A) \neq 0$ entraîne $\dim u \leqslant n (A \in \mathcal{A})$.

(iii) $\psi_*(v)\, d\psi_*(u) \neq 0$ entraîne $\dim v \leqslant \dim u$ l'égalité n'ayant lieu que si $v = u$.

11. 8. *Filtrations.* — Soit $(\mathcal{A}, K_*)$ un couple compatible avec la dimension. On pose pour tout objet $A \in \mathcal{A}$,

$$S_p(A) = \{u | u \in S(A),\ \dim u \leqslant p\}$$
$$S^p(A) = \{u | u \in S(A),\ \dim u \geqslant p\}$$
$$F_p K_n(A) = \sum_{u \in S_p(A)} K_{n,u}(A),$$
$$F^p \mathit{Hom}^n(K_*, G) = \prod_{u \in S^p(A)} \mathrm{Hom}(K_{n,u}(A), G(M_u))$$

$\Big($où l'on considère ces modules comme plongés dans $\sum_{u \in S(A)}$ et $\prod_{u \in S(A)}\Big)$

$$F_p K_*(A) = \sum_n F_p K_n(A),$$
$$F_p \mathit{Hom}^*(K_*, G)(A) = \sum_n F^p \mathit{Hom}^n(K_*, G)(A).$$

Désignons par $d\mathcal{F}_{*\Lambda}$ (resp. $d\mathcal{F}^*_\Lambda$) la catégorie des Λ-modèles filtrés, différentiels gradués de filtration positive ou nulle croissante (resp. décroissante) compatible avec la graduation et la différentielle de degré (-1) (resp. $+1$) la filtration étant inférieure ou égale à la graduation.

Désignons par $E^r_{p,q}$ (resp. $E^{p,q}_r$) le foncteur suite spectrale défini sur la catégorie $d\mathcal{F}_{*\Lambda}$ (resp. $d\mathcal{F}^*_\Lambda$).

Proposition 1. — *Les modules* $F_p K_*(A)$ (*resp.* F^p *Hom** (K_*, G)) *définissent sur* $K_*(A)$ (resp. *Hom** $(K_*, G)(A)$) *une structure de* $d\mathcal{F}_{*\Lambda}$ — module (resp. $d\mathcal{F}^*_\Lambda$).

Démonstration. — C'est évident pour $K_*(A)$. Pour *Hom** $(K_*, G)(A)$ la seule difficulté consiste à vérifier que la filtration est compatible avec la différentielle. Or si on explicite la différentielle de 7. 5*, on trouve que si $\varphi \in \mathit{Hom}^n(K_*, G)(A)$, $\varphi = (\varphi_u)$, $\delta\varphi = ((\delta\varphi)_u)$ $(\delta\varphi)_u \in \mathrm{Hom}\ (K_{n+1,u}(A), G(M_u))$ est la fonction donnée par

$$(\delta\varphi)_u y = \sum_{v \in S(M_u)} G^{-1}(v)\ G(\alpha(uv))\varphi_{\beta(uv)}\,(dy)_{\beta(uv)}$$

pour tout $y \in K_{n+1,u}(A)$, et où $(dy)_{\beta(uv)}$ désigne la composante de dy dans $K_{\beta(uv)}(M_u)$.

Si φ_u est nulle pour $\dim u < p$, $\varphi_{\beta(uv)} = 0$ pour $\dim u < p$ puisque (iii) entraîne $\dim \beta(uv) \leqslant \dim u < p$ si $(dy)_{\beta(uv)} \neq 0$.

Donc si $\dim u < p$, $(\delta\varphi)_u = 0$. C.Q.F.D.

Remarque 1. — On a une proposition analogue pour $K_* \divideontimes G$; mais il n'y a aucune démonstration nouvelle à faire puisque $(\mathfrak{A}, K \divideontimes G)$ est un couple compatible avec la dimension.

Remarque 2. — Si on explicite $F_pL_n(\pi)$ on trouve que c'est le groupe commutatif libre engendré par les simplexes non dégénérés $e \in E_n$ tels que

$$pe = s_{\alpha_1} \ldots s_{\alpha_q} b_p, \quad b_p \in B_p, \quad n = p + q.$$

Proposition 2. — *Les foncteurs* $E^1_{p,q}K_*$, $E^1_{p,q}(K_* \divideontimes G)$, $E_1^{p,q}$ *Hom** (K_*, G) *sont représentables.*

Démonstration. — Soit $u : M \to A \in S(A)$. On a

$$\begin{aligned}\theta(u)\chi\psi(u)K(u)\psi(1_M) &= \theta(u)\tau(u)\chi K(u)\psi(1_M) = \theta(u)\tau(u)\hat{K}(u)\chi\psi(1_M) \\ &= \theta(u)\hat{K}(u)\tau(1_M)\chi = \theta(u)i(u)K(1_M)j(1_M)\tau(1_M)\chi \\ &= \theta(u)i(u)K(1_M)\theta(1_M)\chi = \theta(u)i(u)\psi(1_M) = \psi_{1_M}\end{aligned}$$

soit :

$$(1) \qquad \theta(u)\chi\psi(u)K(u)\psi(1_M) = \psi(1_M)$$

considérons alors l'application $\theta(u)\chi = K_n(A) \to K_n(M)$. Elle préserve la filtration car si $x \in K_{n,v}(A)$, $\theta(u)\chi x = 0$ si $v \neq 0$ et $\theta(u)\chi x = \psi(1_M)\theta(u)x \in K_{1_M}(M)$ si $u = v$, et alors $\dim u = \dim 1_M$.

En utilisant les notations de J. P. Serre (cf. [17]) on a donc

$$\theta(u)\chi : C^0_{p-1,q+1}K_*(A) \to C^0_{p-1,q+1}K_*(M) \quad (p + q = n).$$

Mais on a aussi :

$$\theta(u)\chi : C^1_{p,q}K_*(A) \to C^1_{p,q}K_*(M) . (p + q = n)$$

en effet si $x \in K_{n,u}(A)$, et si $\dim u < p$, $\theta(u)\chi$ est de filtration $< p$ d'après ce qui précède et par conséquent $d\theta(u)\chi x$ aussi. Supposons alors $\dim u = p$, et posons $y = \theta(u)\chi x$, $dy = \sum_{v \in S(M)} y_v$ où $y_v \in K_v(M_v)$. On a

$$K_{n-1}(u)\, dy = dK_n(u)y = dK_n(u)\theta(u)\chi x = d\psi(u)x = dx$$

et

$$dx = K_{n-1}(u)\, dy = \sum_{v \in S(M)} K_{n-1}(u)y_v = \sum_{v \in S(M)} \psi(\beta(uv))K_{n-1}(u)y_v.$$

On a ainsi la décomposition (unique) de dx sur les composantes $K_{\beta(uv)}(A)$. D'après 11. 7 (iii), les indices des composantes non nulles sont de dimension $< p$ si dx est de filtration $p-1$. y étant de filtration p, y_v ne peut être différent de zéro que si $\dim v \leqslant p$.

Soit $v_1 : M_{v_1} \to M$ avec $\dim v_1 = p$; puisque $y \in K_{1_M}(M)$ 11. 7 (iii) montre que $v_1 = 1_M$; donc $\beta(uv_1) = \beta(u) = u$. Soit v un indice tel que $\beta(uv) = u$. On a alors

$$p = \dim \beta(uv) \leqslant \dim uv = \dim 1_{M_v} \leqslant p,$$

soit $\dim 1_M = \dim v = p$. $v_1 = 1_M$ est donc le seul indice tel que $\beta(uv) = u$. Mais alors puisque dx est de filtration $p-1$, on a : $\psi(u)K_{n-1}(u)y_{1_M} = 0$. Donc, en utilisant (1), on voit que $y_{1_M} = 0$: $\theta(u)\chi x \in C^1_{p,q}K_*(M)$.

On voit de même que

$$\theta(u)\chi : B^0_{p,q}\, K_*(A) \to B^0_{p,q}K_*(M) + C^0_{p-1,q+1}\, K(M)$$

autrement dit $\theta(u)\chi$ induit une application

$$E^1_{p,q}K_*(A) \to E^1_{p,q}K_*(M)$$

d'où une application

$$\chi^1 : E^1_{p,q}K_* \to \widehat{E^1_{p,q}K_*}.$$

La remarque 1 montre que la proposition est vraie pour $K_* * G$ un raisonnement analogue au précédent montre que $E_1^{p,q}\, \mathit{Hom}^*(K_*, G)$ est représentable.

En appliquant la proposition 2 aux foncteurs considérés dans 11. 6, on obtient un certain nombre de foncteurs représentables qui seront utilisés dans la suite.

Remarque. — L'hypothèse que les applications $\underline{p} : E \to B$ sont fibrées n'est pas encore intervenue.

12. — La suite spectrale sur les modèles.

Pour poursuivre le programme établi au début du § 11, il faut étudier la suite spectrale sur les modèles. Soit $\Delta[n]$ la base d'un modèle μ. Pour montrer que E^1_{*q} est acyclique sur μ, on commence par montrer que le terme $E^2(\mu)$ est isomorphe

au terme E^2 du fibre induit au-dessus de O_n par l'injection $O_n \to \Delta[n]$, et dans ce cas, la base étant un point, la suite spectrale se calcule immédiatement. Pour arriver à ce résultat, on est amené à étudier avec précision, étant donné deux morphismes homotopes Φ_0 et $\Phi_1 : \pi' \to \pi$, l'homotopie qui en résulte pour les homomorphismes de modules différentiels gradués $E^1(\Phi_0)$ et $E^1(\Phi_1)$ (cf. 12. 2. et 12. 3). Quelques difficultés d'ordre technique compliquent légèrement les démonstrations.

12. 1. Lemme. — *Soient f et g deux morphismes:* $A \to B \in d\mathcal{F}_{*\Lambda}$ (resp. $d\mathcal{F}^*_\Lambda$), *et k un homomorphisme de Λ-modules* $A \to B$ *tels que*

(i) $kA_n \subset B_{n+1}$ (resp. $kA^n \subset B^{n-1}$)
(ii) $kF_p(A) \subset F_{p+1}(B)$ (resp. $kF^p(A) \subset F^{p-1}(B)$)
(iii) $f - g = dk + kd$.

k induit alors un homomorphisme $k^1 : E^1_{p,q}(A) \to E^1_{p+1,q}(B)$ (resp. $k_1 : E_1^{p,q}(A) \to E_1^{p-1,q}(B)$).

Dans ces conditions $E^r(f) = E^r(g)$ (resp. $E_r(f) = E_r(g)$ pour $r \geqslant 2$).

12. 2. Soit $\Phi_e : \pi' \to \pi$ un morphisme de fibrés :

$$\Phi_e : \begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{f} & E \\ {\scriptstyle \underline{p}'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \underline{p}} \\ B' & \xrightarrow[g]{} & B \end{array}$$

et $\underline{k} : I \times B' \to B$ une homotopie telle que $\underline{k} \circ \varepsilon_e = g$. Il existe alors (cf. 2. 3 corollaire 2) une homotopie $\underline{h} : I \times E' \to E$ qui prolonge f au-dessus de $\underline{k}$, et qui est stationnaire sur $p'^{-1}(A')$ si $\underline{k}$ est stationnaire sur $A' \subset B'$.

Notons Φ_{1-e} le morphisme $\pi' \to \pi$ que l'on obtient en remplaçant f par $\underline{h} \circ \varepsilon_{1-e}$ et g par $\underline{k} \circ \varepsilon_{1-e}$; écrivons pour simplifier L^* au lieu de Hom^* (L_*, G) et L'_* au lieu de $L_* \times G$.

Proposition. — *Soit G un système local constant. Avec les notations ci-dessus, $\underline{h}$ induit une application h^1 :*

$$E^1_{p,q} L'_*(\pi') \to E^1_{p+1,q} L'_*(\pi)$$

(resp. $h_1 : E_1^{p,q} L^*(\pi) \to E_1^{p-1,q} L^*(\pi')$) *telle que*

$$d^1 h^1 + h^1 d^1 = E^1 L'_*(\Phi_1) - E^1 L'_*(\Phi_0)$$

(resp. $d_1 h_1 + h_1 d_1 = E_1 L^*(\Phi_0) - E_1 L'_*(\Phi_0)$). *De plus, h_1 (resp h^1) est indépendante de l'homotopie $\underline{h}$ choisie au-dessus de $\underline{k}$ et prolongeant f.*

Démonstration. — Soit Λ le module du système constant G. $L'_n(\pi) = L_n(\pi) \otimes_Z \Lambda$, $L^n(\pi) = \mathrm{Hom}_Z\ (L_n(\pi), \Lambda)$

$$F_p L'_n(\pi) = F_p L_n(\pi) \otimes_Z \Lambda,\ F^p L^n(\pi) = \mathrm{Ann} F_{p-1} L_n(\pi)$$

(où Ann désigne l'annulateur) etc...

D'après 5. 5, $\underline{h}$ induit une homotopie $U : L_n(\pi') \to L_{n+1}(\pi)$ telle que $dU + Ud = L_*(\Phi_1) - L_*(\Phi_0)$. Donc $U \otimes 1_\Lambda$:

$$L'_n(\pi') \to L'_{n+1}(\pi)$$

est telle que $d(U \otimes 1_\Lambda) + (U \otimes 1_\Lambda)d = L'_*(\Phi_1) - L'_*(\Phi_0)$ (en notant encore d la différentielle de L'_*) et $\mathrm{Hom}\ (U, 1_\Lambda)$: $L^n(\pi) \to L^{n-1}(\pi')$ est telle que $\delta\ \mathrm{Hom}\,(U, 1_\Lambda) + \mathrm{Hom}\,(U, 1_\Lambda)\delta = L^*(\Phi_1) - L^*(\Phi_0)$.

De plus (avec les notations de 5. 5) $U = \Sigma(-1)^i h_i$. Comme $\underline{p} \circ \underline{h} = \underline{k} \circ (\mathrm{id} \times \underline{p}')$, on a $\underline{p} \circ \underline{h}_i = \underline{k}_i \circ \underline{p}'$; par conséquent si $e' \in E'_n$ est un n-simplexe non dégénéré de filtration p (cf. 11. 8 remarque 2) *i.e* si $\underline{p}'e' = s_{\alpha 1} \ldots s_{\alpha q}\ b'_p$ $(p + q = n)$, on a $\underline{p} \circ \underline{h}_i e' = \underline{p}_i s_{\alpha 1} \ldots s_{\alpha q} b'_q = s_{\alpha'_1} \ldots s_{\alpha'_q}\ \underline{k}_{i'}\ b'_p$ (en vertu des relations 1. 2) $\alpha'_1, \ldots \alpha'_p$, i' étant des entiers qu'il est inutile d'expliciter. Or $\underline{k}_{i'}\ b'_p$ est un $(p + 1)$-simplexe de B. Donc U et $U \otimes 1_\Lambda$ augmentent la filtration de 1, $\mathrm{Hom}\ (U, 1_\Lambda)$ diminue la filtration de 1. Le lemme 12. 1 montre alors l'existence de h_1 et h^1 ayant les propriétés demandées.

Il reste à démontrer que h_1 et h^1 sont indépendants du relèvement $\underline{h}$.

Soient $\underline{h}$ et $\underline{h}'$ deux homotopies au-dessus de $\underline{k}$ qui prolongent f. D'après 2. 5 il existe une application $H : I \times I \times E' \to E$ telle que, pour $x \in E'$ α, $\beta \in I$, $e = 0$ ou 1 fixé,

$$\begin{aligned} H(\alpha, 0, x) &= \underline{h}(\alpha, x) \\ H(\alpha, 1, x) &= \underline{h}'(\alpha, x) \\ H(e, \beta, x) &= f(x) \\ \underline{p}H(\alpha, \beta, x) &= \underline{k}(\alpha, \underline{p}', x). \end{aligned}$$

Considérons H comme une homotopie par rapport à la deuxième variable : on pose $H_j(\alpha, x) = H(s_j\alpha, s_n \ldots \hat{s}_j \ldots s_0\delta^1, s_j x)$ pour $(\alpha, x) \in (I \times E')_n$, et $V = \Sigma(-1)^j H_j$.
on obtient : $dV + Vd = C_*(\underline{h}') - C_*(\underline{h})$.

Soit i l'application identique $I \times E' \to I \times E'$. Considérons la comme une homotopie entre applications $E' \to I \times E'$, et soit σ l'homotopie $C_*(E') \to C_*(I \times E')$ associé à i : on a $(d\sigma + \sigma d)x = (d_0\delta^1, x) - (d_1\delta^1, x)$. Mais par définition,

$$C_*(\underline{h}')\sigma = U', \quad C_*(\underline{h})\sigma = U$$

où U' est construit à partir de $\underline{h}'$ comme U à partir de $\underline{h}$. Finalement :

$$\begin{aligned}(dV\sigma + V\,d\sigma)\,x &= (U' - U)x \\ &= dV\sigma - V\sigma\,dx + V(d_0\delta^1, x) - V(d_1\delta^1, x).\end{aligned}$$

Or $H(e, \beta, x) = f(x)$ donc $V(d_{1-e}\delta^1, x) = \varepsilon C_*(f)(x)$ ou $\varepsilon = 0$ ou 1 suivant la parité du degré de la chaîne x. On en déduit le :

Lemme. — *Supposons que x soit de filtration p, et que dx soit de filtration $p-1$: alors $(U' - U)x$ est un bord modulo les éléments de filtration p*; en effet

$V\sigma$ *augmente la filtration* de 1 car $V\sigma x$ est une somme alternée d'éléments du type $H_j(s_n \dots \hat{s}_i \dots s_0\delta^1, s_i x)$ et
$\underline{p}H_j(s_n \dots \hat{s}_i \dots s_0\delta^1, s_i x) = \underline{k}(s_j s_n \dots \hat{s}_i \dots s_0\delta^1, \underline{p}' s_j s_i x) = s_j \underline{k}_i \underline{p}' x.$

$V(d_{1-e}\delta^1, x)$ *conserve la filtration* puisque $C_*(f) = L_*(\Phi_e)$ conserve la filtration.

$V(d_e\delta^1, x_0)$ *conserve la filtration* puisque c'est une somme alternée du type $H_j(d_e\delta^1, x)$ et que

$$\underline{p}H_j(d_e\delta^1, x) = \underline{k}(1 - e, \underline{p}' s_j x) = s_j \underline{k}\ \ (1 - e, \underline{p}' x).$$

Fin de la démonstration. — D'après le lemme $U \otimes 1_\Lambda$ et $U' \otimes 1_\Lambda$ induisent la même application $h^1 : E^1L'_*(\pi') \to E^1L'_*(\pi)$ et $\operatorname{Hom}(U, 1_\Lambda)$, $\operatorname{Hom}(U', 1_\Lambda)$ la même application h_1 :

$$E_1L^*(\pi) \to E_1L^*(\pi').$$

12. 3. Soit $\Phi_e : (\pi', \varpi') \to (\pi, \varpi)$ un morphisme dans $\mathcal{F}_\mathcal{J}$, c'est-à-dire un diagramme commutatif.

$$\Phi_e : \quad \begin{tikzcd} E' \arrow[rrr, "f"] \arrow[dd, "\underline{p}'"'] & & & E \arrow[dd, "\underline{p}"] \\ & A' \arrow[ul, "\text{inj}"] \arrow[r, "f'"] \arrow[dl, "\underline{p}'|A"'] & A \arrow[ur, "\text{inj}"'] \arrow[dr, "\underline{p}|A"] & \\ B' \arrow[rrr, "g"] & & & B \end{tikzcd}$$

Soit $\underline{k}$: $I \times B' \to B$ une homotopie telle que $\underline{k} \circ \varepsilon_e = g$ il existe (cf. 2. 3) une homotopie $\underline{h}' : I \times A' \to A$ qui prolonge f' au-dessus de $\underline{k}$, et par conséquent une homotopie $\underline{h}$: $I \times E' \to E$ qui prolonge f et h' au-dessus de g. Notons Φ_{1-e} le morphisme $(\pi', \varpi') \to (\pi, \varpi)$ que l'on obtient en remplaçant f par $h \circ \varepsilon_{1-e}$, f' par $\underline{h}' \circ \varepsilon_{1-e}$ et g par $\underline{k} \circ \varepsilon_{1-e}$. On écrit $L^*_{\mathcal{J}}$ au lieu de Hom^* $(L_{*\mathcal{J}}, G)$ et $L'_{*\mathcal{J}}$ au lieu de $L_{*\mathcal{J}} \divideontimes G$, et on suppose que le système local G *est constant*. $\underline{h}$ induit une homotopie $U: L_n(\pi') \to L_{n+1}(\pi)$, $\underline{h}'$ une homotopie U': $L_n(\varpi') \to L_{n+1}(\varpi)$. Par passage au quotient on obtient une homotopie $U_{\mathcal{J}}$: $L_{n, \mathcal{J}}(\pi', \varpi') \to L_{n+1, \mathcal{J}}(\pi, \varpi)$ qui augmente la filtration de 1 puisque c'est le cas de U et U'.

Soit $(\underline{\mu}, \underline{\mu}')$ une autre homotopie $(I \times E', I \times A') \to (E, A)$ qui prolonge (f, f') au-dessus de $\underline{k}$ et $M_{\mathcal{J}}$ l'homotopie construite à partir de $(\underline{\mu}, \underline{\mu}')$ comme $U_{\mathcal{J}}$ à partir de $(\underline{h}, \underline{h}')$. Il existe d'après 2. 5 une application $H' : I \times I \times A' \to A$ telle que pour $y \in A'$, α, $\beta \in I$,

$$\begin{aligned} H'(\alpha, 0, y) &= \underline{h}'(\alpha, y) \\ H'(\alpha, 1, y) &= \underline{\mu}'(\alpha, y) \\ H'(e, \beta, y) &= f'(y) \\ \underline{p}H'(\alpha, \beta, y) &= \underline{k}(\alpha, \underline{p}'y) \end{aligned}$$

Il existe donc, d'après 2. 5 une application $H : I \times I \times E' \to E$ qui prolonge H', et telle que, pour α, $\beta \in I$, $x \in E'$

$$\begin{aligned} H(\alpha, 0, x) &= \underline{h}(\alpha, x), \\ H(\alpha, 1, x) &= \underline{\mu}(\alpha, x), \\ H(e, \beta, x) &= f(x), \\ \underline{p}H(\alpha, \beta, x) &= \underline{k}(\alpha, p'x). \end{aligned}$$

En utilisant le couple (H, H') on démontre comme dans 12. 2 que si x est une chaîne de filtration p, telle que dx soit de filtration $p - 1$, $x \in L_{*\mathcal{J}}(\pi', \varpi')$, alors $(M_{\mathcal{J}} - U_{\mathcal{J}})x$ est un bord modulo les éléments de filtration p. On a donc démontré :

PROPOSITION. — *Soit G un système local constant. Avec les natotions ci-dessus,* $(\underline{h}, \underline{h}')$ *induit une application*

$$h^1 : E^1_{p,q}L'_{*\mathcal{J}}(\pi', \varpi') \to E^1_{p+1,q}L'_{*\mathcal{J}}(\pi, \varpi)$$
$$(\text{resp. } h_1 : E_1^{p,q}L^*_{\mathcal{J}}(\pi, \varpi) \to E_1^{p-1,q}L^*_{\mathcal{J}}(\pi', \varpi').$$

telle que $\quad d^1h^1 + h^1d^1 = E^1L'_{*\mathcal{J}}(\Phi_1) - E^1L'_{*\mathcal{J}}(\Phi_0)$
$\quad$ (resp. $d_1h_1 + h_1d_1 = E_1L^*_{\mathcal{J}}(\Phi_1) - E_1L^*_{\mathcal{J}}](\Phi_0)$.

De plus, h_1 (resp h^1) *est indépendante de l'homotopie* $(\underline{h}, \underline{h}')$ *choisie au-dessus de* k *et prolongeant* (f, f').

12. 4. *Le cas où la base est* $\Delta[0]$.

Si π est un fibré dont la base est $\Delta[0]$, $\pi \in \mathcal{FM}$, et $\psi(1_\pi) = 1_{C_*(\pi)}$ est la seule application non nulle (cf. 11. 5, diagramme (1)).

Donc $\quad F_\xi L_*(\pi) = F_0L_*(\pi), \qquad L'_*(\pi) = L_*(\pi) \otimes G(\pi),$
$\qquad L^*(\pi) = \mathrm{Hom}^*(L_*(\pi), G(\pi)).$

On en déduit que

(i) $E^r_{p,q}L_*(\pi) = E^r_{p,q}L'_*(\pi) = E^{p,q}_rL^*(\pi) = 0$ pour $p > 0$ et $r \geqslant 0$.

(ii) $\quad E^r_{0,q}L_*(\pi) = H_qL_*(\pi)$, $E^r_{0,q}L'_*(\pi) = H_qL'_*(\pi)$,
$\quad E^{0,q}_rL^*(\pi) = H^qL^*(\pi) \qquad$ pour $\quad r \geqslant 1$.

Soit (π, ϖ) un couple de fibrés dans $\mathcal{F}_\mathcal{J}$ dont la base est $\Delta[0]$. $(\pi, \varpi) \in (\mathcal{FM})_\mathcal{J}$ et $\psi(1_{(\pi,\varpi)}) = 1_{L_{*\mathcal{J}}(\pi,\varpi)}$ est la seule application non nulle. On en déduit que (i) et (ii) sont encore vérifiés si on remplace L_* par $L_{\mathcal{J}*}$.

Comme les modèles de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_\mathcal{J}$ sont les mêmes, ainsi que les modèles de $\mathcal{F}_\mathcal{J}$ et $(\mathcal{F}_\mathcal{J})_{\mathcal{J}'}$, on peut aussi remplacer L_* dans (i) et (ii) par $L_{*\mathcal{J}}$ et $(L_{*\mathcal{J}})_{\mathcal{J}'}$.

12. 5. On se propose de déterminer complètement la suite spectrale sur les modèles. Il suffit donc de considérer les catégories $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_\mathcal{J}$.

Soit O_n le zéro-ième sommet de $\Delta[n]$, F_0 la fibre du fibre $\pi = (E, p, B)$ au dessus de O_n, i le morphisme de $\mathcal{FM}$:

$$i : \begin{array}{ccc} F_0 & \xrightarrow{\text{inj}} & E \\ {\scriptstyle p|F_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ O_n & \xrightarrow[\text{inj}]{} & \Delta[n] \end{array} : \mu \to \pi$$

Proposition. — $E^2L'_*(i)$ *et* $E_2L^*(i)$ *sont des isomorphismes de plus, il existe des homomorphismes* $h^1 : E^1L'_*(\pi) \to E^1L'_*(\pi)$ et $\eta : E^2_0L'_*(\pi) \to E^1_0L'_*(\pi)$ (resp. $h_1 : E_1L^*(\pi) \to E_1L^*(\pi)$ et $\eta : E^0_1L^*(\pi) \to E^0_2L^*(\pi)$) tels que

(i): $h^1 : E^1_{p,q}L'_*(\pi) \to E^1_{p+1,q}L'_*(\pi)$ (resp. $h_1 : E^{p,q}_1L^*(\pi) \to E^{p-1,q}_1L^*(\pi)$).

(ii) : $d^1h^1 + h^1d^1 = \mathrm{id}$ *sur* $E^1_pL'_*(\pi)$ pour $p > 0$ (resp. $d_1h_1 + h_1d_1 = \mathrm{id}$ *sur* $E_1^pL^*(\pi)$, $p > 0$).

(iii) : $d^1h^1 = \mathrm{id} - \eta\varepsilon$ *sur* $E^1_0L'_*(\pi)$ (resp $h_1d_1 = \mathrm{id} - \varepsilon\eta$ *sur* $E_1^0L^*(\pi)$) *où* ε *est l'application canonique*

$$E^1_{0,q}L'_*(\pi) \to H_0E^1_{0,q}L'_*(\pi) = E^2_{0,q}L'_*(\pi)$$
$$(\text{resp } H^0E_1^{0,q}L^*(\pi) = E_2^{0,q}L^*(\pi) \to E_1^{0,q}L^*(\pi).$$

Démonstration.

1er *cas : G est un système local constant de module* Λ. — On applique la proposition 12. 2. à $\Phi_1 : \pi \to \pi$ où Φ_1 est l'application identique, avec $\underline{k} = \omega_n$ (cf. 1. 4). On peut alors relever $\underline{k}$ en une homotopie $\underline{h}$ stationnaire sur F_0 puisque ω_n est stationnaire sur O_n. De plus $\underline{h} \circ \varepsilon_0$ applique E dans F_0 puisque $\omega_n \circ \varepsilon_0 : \Delta[n] \to O_n$. Φ_0 se factorise alors en $i \circ j$, où j est le morphisme.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\underline{h}_0 \circ \varepsilon_0"] \arrow[d, "j : \underline{p}"'] & F_0 \arrow[d, "p|F_0 : \pi \to \mu"] \\ \Delta[n] \arrow[r, "\omega_n \circ \varepsilon_0"] & O_n \end{tikzcd}$$

et $j \circ i = $ identité.

D'après 12. 2, il existe h^1 (resp h_1) vérifiant (i) et de plus $E^2L'_*(\Phi_1) = E^2L'_*(\Phi_0)$. Comme $\Phi_1 = \mathrm{id}$ et $\Phi_0 = i \circ j$, on a :

$$E^2L'_*(i) \circ E^2L'_*(j) = \mathrm{id}$$

mais comme $j \circ i = $ identité, on a aussi

$$E^2L'_*(j) \circ E^2L'_*(i) = \mathrm{id}.$$

Donc $E^2L'_*(i)$ et $E^2L'_*(j)$ sont des isomorphismes. On démontre de même que $E_2L^*(i)$ et $E_2L^*(j)$ sont des isomorphismes.

Mais, d'après 12. 4, pour $p > 0$, $E^1_{p,q}L'_*(\mu)$ et $E_1^{p,q}L^*(\mu)$ sont nuls.

Donc $E_1^{p,q}L'_*(j)$, $E_1^{p,q}L^*(j)$ sont nuls pour $p > 0$ et finalement $E^1_{p,q}L'(\Phi_0)$ et $E_1^{p,q}L^*(\Phi_0)$ sont nuls. 12. 2 montre alors que h^1 et h_1 vérifient (ii).

Pour $p = 0$, on a $d^1h^1 = \mathrm{id} - E^1_{0,q}L'_*(\mathrm{i}) \circ E^1_{0,q}L'_*(\mathrm{j})$. Soit $x = d^1y$, $y \in E^1_{1,q}L'_*(\pi)$. Comme $E^1_{0,q}L'_*(j)x = d^1E^1_{1,q}L'_*(j)\,y = 0$, on voit que $E^1_{0,q}L'_*(\mathrm{i}) \circ E^1_{0,q}L'_*(\mathrm{j})$ est nul sur les d^1-bords. On définit donc une application η vérifiant (iii) en posant $\eta\varepsilon x = E^1_{0,q}L'_*(\mathrm{i}) \circ E^1_{0,q}L'_*(j)x$ pour $x \in E^1_{0,q}L'_*(\pi)$ même démonstration pour L^*.

2^e *Cas* : *G est un système local quelconque.* — Sur les modèles, L'_* est naturellement équivalent à $L_* \circ G$ (cf. 7. 6_*) et par conséquent, $L'_*(\pi)$ est naturellement isomorphe à $L_*(\pi) \otimes G(\pi)$, $L'_*(\mu)$ naturellement isomorphe à $L_*(\mu) \otimes G(\mu)$, et à des identifications canoniques près, $L'_*(i)$ est égale à

$$L_*(i) \otimes G(i) = (L_*(i) \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes G(i)).$$

Désignons par $G(\pi)$ (resp $G(\mu)$) le système local constant de module $G(\pi)$ (resp, $G(\mu)$). $L_*(i) \otimes \mathrm{id} = (L_* \ast G(\pi)\ (i))$ et $\mathrm{id} \otimes G\ (i)$ sont des morphismes de $d\mathcal{F}_{*Z}$. Par conséquent :

$$E^2 L'_*(i) = E^2(L_* \ast G(\pi))\ (i) \circ E^2(\mathrm{id} \ast G(i)).$$

Le premier facteur du second membre est un isomorphisme d'après ce qui a été vu dans le cas G constant, le second facteur est un isomorphisme car $i \in S(\pi)$ et que par conséquent $G(i)$ est un isomorphisme. Donc $E^2 L'_*(i)$ est un isomorphisme.

Comme $L'_*(\pi)$ est naturellement isomorphe à $L_*(\pi) \otimes G(\pi)$, on peut pour calculer la suite spectrale du module gradué filtré $L'_*(\pi)$ utiliser le module gradué filtré $L_*(\pi) \otimes G(\pi)$ c'est-à-dire supposer G constant : d'où (ii) et (iii). Même démonstration pour $L^*(\pi)$.

12. 6. Proposition. — *On peut dans la proposition* 12. 5, *remplacer* L_* *par* $L_{*\mathcal{J}}$.

Démonstration. — On utilise 12. 3 au lieu de 12. 2.

12. 7. Théorème. — *Les foncteurs* $E^1_{*q}L^1_*$, $E^1_{*q}L'_{*\mathfrak{I}}$, $E^1_{*q}L'_{*\mathcal{J}}$, $E^1_{*q}(L'_{*\mathfrak{I}})_{\mathcal{J}'}$, $E_1^{*,q}L^*$, $E_1^{*,q}L_{\mathfrak{I}}$, $E_1^{*,q}L^*$, $E_1^{*,q}(L^*_{\mathfrak{I}})_{\mathcal{J}'}$ *sont acycliques sur les modèles.*

Démonstration. — Il suffit de considérer les foncteurs définis sur $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$.

D'après 12. 5 et 12. 6 (ii) et (iii), il suffit de démontrer que h^1 (resp h_1) et η sont naturels pour les morphismes de $(\mathcal{F}\mathcal{M})^\alpha$, c'est-à-dire pour les morphismes du type :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\varphi} & \beta(f)^*E \\ {\scriptstyle \underline{p}'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \underline{p}} \\ \Delta[n'] & \xrightarrow{\alpha(f)} & \Delta[n] \end{array} : \pi' \to \pi$$

où $f : \Delta[n'] \to B$, $E \to B$ est un fibré, et où la flèche horizontale supérieure est déterminée par 11. 1. Soient h'^1 et h^1 les homotopies définies par 12. 5 pour les fibrés π' et π, $\underline{h}'$ et $\underline{h}$ les homotopies au-dessus de $\omega_{n'}$ et ω_n dont ils proviennent.

$h \circ (\mathrm{id} \times \varphi)$ et $\varphi \circ \underline{h}'$ sont des homotopies au-dessus d'une même homotopie $I \times \Delta[n'] \to \Delta[n]$ puisque $\omega_n \circ (\mathrm{id} \times \alpha(f)) = \alpha(f) \circ \omega_{n'}$ (cf. 1. 4), et elles coïncident sur $1 \times E'$. Or la première induit $h^1 \circ E^1L'_*(\Phi)$ et la deuxième $E^1L'_*(\Phi)h'^1$.

Si G est un système local constant, le théorème résulte de 12. 2 qui affirme que $h^1 \circ E^1L'_*(\Phi) = E^1L'_*(\Phi)h'^1$. Si G n'est pas constant, on refait un raisonnement analogue à celui de 12. 5 *deuxième cas:* on suppose les coefficients locaux constants et on note h''^1 l'homotopie obtenue à partir de $\underline{h}'$ en utilisant le système local constant $G(\pi)$ au lieu de $G(\pi')$; on a $E^1(\mathrm{id} \otimes G(\Phi)) \circ h'^1 = h''^1 \circ E^1(\mathrm{id} \otimes G(\Phi))$.

Comme d'après ce qui précède,

$$h^1 \circ E^1(L_* \times G(\pi)\,(\Phi) = E^1(L_* \times G(\pi))\,(\Phi) \circ h''^1$$

on en déduit de nouveau l'égalité cherchée en multipliant les deux membres par $E^1(\mathrm{id} \otimes G(\Phi))$.

Même démonstration pour h_1, même démonstration pour la catégorie $(\mathcal{FM})^{\alpha}_{\eta}$.

La naturalité de η résulte de la naturalité de h^1 (resp h_1) de la naturalité de ε, et du fait que ε est surjectif (resp injectif).

12. 8. Théorème. — *Les foncteurs du théorème* 12. 7 *sont augmentables.*

Démonstration. — Soit $\Phi : \pi' \to \pi$ un morphisme non dégénéré de $\mathcal{FM}$, c'est-à-dire un diagramme commutatif

$$(1) \qquad \Phi : \begin{array}{ccc} u^*E & \longrightarrow & E \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \Delta[p] & \xrightarrow[u]{} & \Delta[n] \end{array} \quad \pi' \to \pi$$

où u est non dégénéré. Soit i le morphisme

$$\begin{array}{ccc} F_{O_p} & \xrightarrow{\text{inj}} & u^*(E) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ O_p & \xrightarrow[\text{inj}]{} & \Delta[p] \end{array}$$

où F_{O_p} désigne la fibre de π' au-dessus de O_p. Comme F_{O_p} est canoniquement isomorphe à $F_{u(O_p)}$ la fibre de E au-dessus de $u(O_p)$, et que $E^2_0L'_*(i)$ (resp $E^0_2L^*(i)$) est un isomorphisme (cf. 12 5), il suffit de démontrer que $E^2_0L'_*(\Phi)$) (resp $E^0_2L^*\Phi$) est un isomorphisme quand $p = 0$, ce que l'on suppose désormais. Si $u(\delta^0) = O_n$, Φ n'est autre que l'injection de la fibre F_{O_n} dans le fibré π, et le théorème résulte alors de 12. 5. Si ce n'est pas le cas, soit ρ l'unique 1-simplexe de $\Delta[n]$ tel que $d_1\rho = O_n$, $d_0\rho = u(\delta^0)$. ρ est non dégénéré. Si dans le diagramme (1) on fait $u = \tilde{\rho}$, $p = 1$, $E^2_0L'_*(\Phi)$ et $E^0_2L^*(\Phi)$ sont des isomorphismes puisque $\tilde{\rho}(O_1) = O_n$.

Comme $u : \Delta[0] \to \Delta[n]$ se factorise en $\tilde{\rho} \circ \widetilde{d_0\delta^1}$ et que $u^*E = \widetilde{d_0\delta^1}{}^*(\tilde{\rho}^*E)$ il suffit de démontrer le théorème pour $n = 1$ et $u = \widetilde{d_0\delta^1}$. La démonstration est alors entièrement analogue à celle de 12. 5 : on applique la proposition 12. 2 en prenant pour homotopie $I \times \Delta[1] \to \Delta[1]$ ω'_1 au lieu de ω_1 (cf. 1. 4).

Même démonstration pour $(\mathcal{F}\mathfrak{M})_{\mathcal{J}}$.

13. — La suite spectrale des fibres.

13. 1. Les huit foncteurs du théorème 12. 7. sont représentables acycliques sur les modèles, augmentables. D'autre part les quatre foncteurs K_*, $K_{*\mathfrak{J}}$, $K'_{*\mathcal{J}}$, $(K_{*\mathfrak{J}})'_{\mathcal{J}}$ sont singuliers (cf. 11. 4, 8. 2, 8. 6). On peut donc appliquer les théorèmes 7. 10* et 7. 10_*. Puisque $H_*E^1 = E^2$, $H^*E_1 = E_2$, on peut énoncer :

Théorème. — *Désignons par* $\mathbf{G}^q$, $(\mathbf{G}_{\mathfrak{J}})_q$, $(\mathbf{G}_{\mathcal{J}})^q$, $(\mathbf{G}_{\mathfrak{J}})_{\mathcal{J}',}{}^q$, $\mathbf{G}^q$, $(\mathbf{G}_{\mathcal{J}})^q$, $(\mathbf{G}_{\mathcal{J}})^q$ $(\mathbf{G}_{\mathfrak{J}})_{\mathcal{J}'}{}^q$ *les huit systèmes locaux donnés par le théorème* 12. 8.

Les foncteurs :

$E^2_{p,q}L'_*$ et $H_p(K_* \ast \mathbf{G}_q)$, $E_2^{p,q}L^*$ et H^p *Hom** $(K_*, \mathbf{G}^q)$
$E^2_{p,q}L'_{*\mathfrak{J}}$ et $H_p(K_{*\mathfrak{J}} \ast (\mathbf{G}_{\mathfrak{J}})_q)$, $E_2^{p,q}L^*_{\mathfrak{J}}$ et H^p *Hom* $(K_{*\mathfrak{J}}, (\mathbf{G}_{\mathfrak{J}})^q)$
$E^2_{p,q}L'_{*\mathfrak{J}}$ et $H_p(K'_{*\mathcal{J}} \ast (\mathbf{G}_{\mathcal{J}})_q)$, $E_2^{p,q}L^*_{\mathcal{J}}$. et H^p *Hom* $(K'_{\mathcal{J}}, (\mathbf{G}_{\mathcal{J}})^q)$
$E^2_{p,q}(L'_{*\mathfrak{J}})_{\mathcal{J}}$, et $H_p((K_{*\mathfrak{J}})'_{\mathcal{J}'} \ast (\underline{\underline{G}}_{\mathfrak{J}})_{\mathcal{J}'q})$,
$E_2^{p,q}(L^*_{\mathfrak{J}})_{\mathcal{J}'}$ et H^p *Hom* $((K_{*\mathfrak{J}})'_{\mathcal{J}'}, (\underline{\underline{G}}_{\mathfrak{J}})^{q},)$

sont naturellement équivalents.

13. 2. *a.* Soit G un système local quelconque sur $\mathcal{FM}$. Soit $\pi = (E, \underline{p}, B) \in \mathcal{F}$.

Si $(\Delta[n], u) \in \mathcal{S}_B$ (cf. 5. 6) on considère le fibré de $\mathcal{FM}$ induit par π et $u : \Delta[n] \to B$, soit $u^*\pi$. On pose alors $\mathsf{G}(\Delta[n], u) = \mathsf{G}(u^*\pi)$. Si (f, u, φ) est un morphisme de $\mathcal{S}_B$, on pose $\mathsf{G}(f, u, \varphi) = \mathsf{G}(\Phi)$, où Φ est le morphisme $u^*\pi \to \varphi^*\pi$ associé à la factorisation $u = \varphi \circ f$ et au morphisme naturel $u^*\pi \to \pi$ (cf. 11. 1).

Au couple formé par un système local quelconque sur $\mathcal{FM}$ et par un fibré π, on associe donc un système local sur $\mathcal{S}_B$. Or si $\mathfrak{U}$ est un morphisme non dégénéré de $S(\pi)$, $\mathfrak{U}$ est de la forme

$$\begin{tikzcd} u^*E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "\underline{p}"] \\ \Delta[n] \arrow[r, "u"'] & B \end{tikzcd}$$

avec $u \in S(B)$. On en déduit ceci :

$$K_* \ast \mathsf{G}_q(\pi) = C_{*B} \ast \mathsf{G}_q(B),$$
$$Hom^*(K_*, \mathsf{G}^q)(\pi) = Hom^*(C_{*B}, \mathsf{G}^q)(B).$$

De même si (π, π') est un couple tel que $\mu : \pi' \to \pi \in \mathfrak{J}$, où π' est le fibré $(\underline{p}^{-1}B', \underline{p}|\underline{p}^{-1}B', B'), B' \subset B)$ on a $K_{*\mathfrak{J}} \ast (\mathsf{G}_\mathfrak{J})_q (\pi, \pi') = (C_{*B})_\mathfrak{J} \ast (\mathsf{G}_\mathfrak{J})_q (B, B')$ et $Hom^*(K_{*\mathfrak{J}}, (\mathsf{G}_\mathfrak{J})^q)(\pi, \pi') = Hom^*((C_{*B})_\mathfrak{J}, (\mathsf{G}_\mathfrak{J})^q)(B, B')$. Appliquons 10. 2 : les foncteurs G sont naturellement équivalents aux foncteurs G' que l'on va maintenant expliciter, et 10. 2. donne explicitement la structure des groupes différentiels gradués dont la cohomologie (ou l'homologie) est naturellement isomorphe au terme E^2 (ou E_2) de la suite spectrale du fibré.

b. Introduisons les notations classiques suivantes :

Si X est un ensemble simplicial, et G un système local de coefficient classique défini sur X, on écrit $H_*(X, G)$, $H^*(X, G)$ au lieu de $H_*(C_{*X} \ast G')(X)$ et $H^* \, Hom^*(C_{*X}, G')(X)$.

Si $X' \subset X$, on écrit $H_*(X, X'; G)$, $H^*(X, X'; G)$ au lieu de $H((C_{*X})_\mathfrak{J} \ast G'_\mathfrak{J})(X, X')$ et $H^* \, Hom^*((C_{*X})_\mathfrak{J}, G'_\mathfrak{J})(X, X')$.

c. Soient $\pi = (E, p, B)$ un fibré, $b \in B_0$ et F_b la fibre au-dessus de b. Alors le système local classique associé à G_q ou G'_q (cf. 10. 1) associe à chaque $b \in B_0$, le groupe

$$G_b = E^2_{0,\,q} L'_*(\tilde{b}^*\pi)$$

or $L'_*(\tilde{b}^*\pi) = L_*(\tilde{b}^*\pi) \otimes G(\tilde{b}\pi) = C_*(F_b) \otimes G(\tilde{b}^*\pi)$ (cf. 12. 4) donc

$$G_b = H_q(F_b, G(\tilde{b}^*\pi))$$

de même en cohomologie, $G_b = H^q(F_b, G(\tilde{b}^*\pi))$.

Si $\rho \in B_1$ l'isomorphisme $G_{d_0\rho} \rightarrow G_{d_1\rho}$ est fourni par le diagramme

$$\begin{tikzcd}
F_0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "i_0"] & E \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "i_1"] & F \arrow[l] \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \Delta[1] & 1 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

où i_0 est le morphisme défini dans 12. 5 et i_1 le morphisme défini dans le dernier paragraphe de 12. 8. Alors

$$G(\rho) = (E^2L'_*(i_0))^{-1} \circ E^2L'_*(i_1) \quad \text{en homologie,}$$
$$G(\rho) = (E_2L^*(i_0)) \circ (E_2L^*(i_1))^{-1} \quad \text{en cohomologie.}$$

On notera $H_q(F, G)$ et $H^q(F, G)$ les deux systèmes locaux précédents.

d. Avec les notations de 11. 5, on voit que si l'on désigne par μ_e le modèle représenté par la partie gauche du diagramme (1) où $\nu = \tilde{e}$, $M = \Delta[n]$, $N = \Delta[\rho]$, alors $\mu_e = \mu_{e'}$, si $\Sigma e = \Sigma e'$.

De plus un calcul simple montre que $(\underline{p}\tilde{e})\,O_p = \underline{p}\tilde{e}\,(O_n)$. Autrement dit, si l'on considère le système local G comme un système local sur $\mathcal{S}_B$ conformément à 13. 2 *a*, et ce dernier comme un système local classique sur B, $G(\mu_e)$ n'est rien d'autre que le groupe associé au point $d_1 \ldots d_n e$ par le système local classique sur E induit par le système classique sur B et l'application $\underline{p}: E \rightarrow B$.

En désignant encore par G ce système local, et compte-tenu des formules :

$$\sum_\alpha (X_\alpha \otimes G) \approx \Big(\sum_\alpha X_\alpha\Big) \otimes G$$
$$\prod_\alpha \operatorname{Hom}(X_\alpha, G) \quad \operatorname{Hom}\Big(\sum_\alpha X_\alpha, G\Big)$$

on voit que :

$L'_*(\pi)$ est le groupe différentiel gradué des chaînes normalisées de E à coefficients dans G.

$L^*(\pi)$ est le groupe différentiel gradué des cochaînes normalisées de E à coefficients dans G.

13. 3. Désignons par G un système local sur $\mathcal{F}\mathfrak{M}$, et par le même symbole G le système local classique induit par G sur B, sur E, sur F.

Désignons d'autre part par $(E', \underline{p}', B')$ un sous fibré de π au sens $\mathfrak{J}$. On peut alors énoncer.

Théorème. — (i) *Homologie.*

Il existe une suite spectrale dont le terme $E^2_{p,q}$ *est naturellement isomorphe à* $H_p(B, H_q(F, G)$ *et dont l'aboutissement est* $H_*(E, G)$.

Il existe une suite spectrale dont le terme $E^2_{p,q}$ *est naturellement isomorphe à* $H_p(B, B'; H^q(F, G))$ *et dont l'aboutissement est* $H_*(E, E'; G)$.

(ii) *Cohomologie.*

Il existe une suite spectrale dont le terme $E_2^{p,q}$ *est naturellement isomorphe à* $H^p(B, H^q(F, G))$ *et dont l'aboutissement est* $H^*(E, G)$

Il existe une suite spectrale dont le terme $E_2^{p,q}$ *est naturellement isomorphe à* $H^p(B, B'; H^q(F, G))$ *et dont l'aboutissement est* $H^*(E, E'; G)$.

Ces suites spectrales sont des foncteurs sur la catégorie $\mathcal{F}$ (ou $\mathcal{F}_{\mathfrak{J}}$).

13. 4. On peut bien entendu développer les considérations de 13. 2. pour la catégorie $\mathcal{F}_{\mathfrak{J}}$, et la catégorie $(\mathcal{F}_{\mathfrak{J}})_{\mathcal{J}}$. Avec des notations évidentes, en appelant (E', p', B') un sous fibré de π au sens $\mathfrak{J}$. (E'', p'', B) un sous fibré de π au sens $\mathcal{J}$, on peut énoncer :

Théorème. — (i) *Homologie.*

Il existe une suite spectrale dont le terme $E^2_{p,q}$ *est naturellement isomorphe à* $H_p(B, B'; H_q(F, F''; G))$ *et dont l'aboutissement est* $H_*(E' \cup E''; G)$.

(ii) *Cohomologie.*

Il existe une suite spectrale dont le terme $E_2^{p,q}$ *est naturellement isomorphe à* $H^p(B, B'; H^q(F, F''; G))$ *et dont l'aboutissement est* $H^*(E' \cup E''; G)$.

Ces suites spectrales sont des foncteurs sur $(\mathcal{F}_{\mathfrak{J}})_{\mathcal{J}}$.

REMARQUE. — Le théorème précédent n'est pas le théorème le plus général que l'on peut déduire, dans le cas de la catégorie $(\mathcal{F}_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{J}'}$, du théorème 13. 1. En effet l'élément le plus général de $(\mathcal{F}_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{J}'}$ est un système de 4 fibrés : (π, π'), (π'', π''') où $\pi' \rightarrow \pi \in \mathfrak{I}$, $\pi''' \rightarrow \pi'' \in \mathfrak{I}$ et $\pi'' \rightarrow \pi \in \mathfrak{J}$. Le cas correspond à $\pi''' = \emptyset$.

13. 5. Si $(\mathbf{E}, p, \mathbf{B})$ est un fibré au sens de Serre, et si S est le foncteur qui a un espace topologique $\mathbf{X}$ fait correspondre l'ensemble simplicial $\mathrm{S}(\mathbf{X})$ des simplexes singuliers de $\mathbf{X}$, à un morphisme $f : \mathbf{X} = \mathbf{Y}$ l'application simpliciale $\mathrm{S}(f) = \mathrm{S}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathrm{S}(\mathbf{Y})$, $\mathrm{S}(\mathbf{E})$, $\mathrm{S}(p)$, $\mathrm{S}(\mathbf{B})$ est un fibré. Les théorèmes 12. 2 et 12. 4 contiennent donc comme cas particuliers les théorèmes sur la suite spectrale d'un fibré au sens de Serre. Dans sa thèse [17], J. P. Serre énonce des théorèmes de suite spectrale (pour l'homologie et la cohomologie *absolue*) en prenant des simplexes *cubiques*. V.K.A.M. Gugenheim et J. C. Moore [12], ont démontré, dans le cas ou G est constant et dans le cas de l'homologie absolue, que la suite spectrale de J. S. Serre et la suite spectrale obtenue avec les simplexes singuliers sont naturellement isomorphes. [19] a démontré qu'il existait une suite spectrale analogue à celle du théorème 13. 4 en prenant des simplexes cubiques. Le raisonnement de [12] montre que cette suite spectrale est naturellement isomorphe à celle de 13. 4, après application du foncteur S.

13. 6. On a donné des théorèmes de suite spectrale pour un système local G quelconque. Les seuls cas utilisés dans les applications sont les suivants :

(i) G est constant.

(ii) G est un système local sur $\mathcal{S}_{\mathrm{B}}$. Il résulte de 12. 2 que la connaissance d'un tel système local est suffisante pour calculer la suite spectrale d'un fibré. Dans ce cas, la suite spectrale n'est plus un foncteur défini sur $\mathcal{F}$, mais seulement sur la catégorie $\mathcal{F}_{\mathrm{B}}$ dont les objets sont des couples (π', f) où $\pi' = (\mathrm{E}', p', \mathrm{B}')$ est un fibré et $f : \mathrm{B}' \rightarrow \mathrm{B} \in \mathcal{S}$, et les morphismes : $(\pi', f) \rightarrow (\pi'', g)$ des triples (Φ, f, g) où $\Phi : \pi' \rightarrow \pi'' \in \mathcal{F}$, est tel que $g \circ \varphi = f$ où φ est l'application induite par Φ sur les bases de π' et π'' (resp. $(\mathcal{F}_{\mathrm{B}})_{\mathfrak{I}}$ resp $((\mathcal{F}_{\mathrm{B}})_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{J}'}$).

14. — Structures multiplicatives.

14. 1. Soient K^* et K'^* deux foncteurs contravariants : $\mathfrak{a} \to d\mathcal{G}^*_\Lambda$ on définit un nouveau foncteur contravariant $\mathfrak{a} \to d\mathcal{G}^*_\Lambda$ en posant :

$$(K \otimes_\Lambda K')^n(A) = \sum_{p+q=n} K^p(A) \otimes_\Lambda K'^q(A)$$
$$(K \otimes_\Lambda K')^n(f) = \sum_{p+q=n} K^p(f) \otimes_\Lambda K'^q(f)$$

pour $A \in \mathfrak{a}$, $f: A \to B$.

Lemme. — *Si K et K′ sont acycliques sur les modèles,* $(K \otimes_\Lambda K')^*$ *est acyclique sur les modèles.*

Démonstration. — (Cf. (9. 3)). Soient U^*_K, η_K, $U^{*\prime}_K$, η', les transformations naturelles définissant l'acyclicité de K^* et K'^* sur les modèles (cf. (5. 4) a^*). On mettra un indice $\otimes$ à toutes les transformations naturelles définies à partir de $(K \otimes K')^*$.

On pose

$$U^n_\otimes(x \otimes y) = (U^p_K x) \otimes y + (-1)^p \varepsilon_K \eta_K x \otimes U^q_{K'} y$$

pour $x \in K^p(A)$, $y \in K'(A)$, $\eta_K x$ (resp $\eta_{K'}\, y$) étant égal à 0 si p (resp q) est $\neq 0$.

Alors

$$d_\otimes U^n_\otimes + U^{n+1}_\otimes d_\otimes = \text{id.} \qquad \text{pour} \qquad n > 0.$$

et

$$U^1 d_\otimes = \text{id} - \varepsilon_K \eta_K \otimes \varepsilon_{K'} \eta_{K'}.$$

On remarque que si $x \in K^0(A)$, $y \in K'^0(A)$, $\varepsilon_K \eta_K x \otimes \varepsilon_{K'} \eta_{K'} y$ est un cocycle de $(K \otimes_\Lambda K')^0$. On pose alors

$$\eta_\otimes(x \otimes y) = (\overline{\varepsilon_K \eta_K x \otimes \varepsilon_{K'} \eta_{K'} y})$$

(ou la barre désigne la classe de cohomologie) et on a

$$U^1_\otimes d_\otimes = \text{id} - \varepsilon_\otimes \eta_\otimes.$$

Comme il est bien clair que $U^*_\otimes$ et $\eta_\otimes$ sont des transformations naturelles, le lemme est démontré.

Corollaire. — $H^0(K \otimes_\Lambda K') \approx H^0 K^* \otimes_\Lambda H^0 K'^*$ *sur les modèles.*

En effet, l'isomorphisme est donné par $(\eta_{K'} \otimes \eta_{K'}) \circ \varepsilon_\otimes$ de

la gauche vers la droite, et par $\eta_\otimes \circ (\varepsilon_K \otimes \varepsilon_{K'})$ de la droite vers la gauche.

14. 2. Soient K''^* un foncteur contravariant $\mathfrak{A} \to d\mathcal{G}''_\Lambda$, et $\Phi : (K \otimes_\Lambda K')^* \to K''^*$ est une transformation naturelle. Notons i^* l'application naturelle

$$H^*(K^*) \otimes_\Lambda H^*(K'^*) \to H^*(K \otimes_\Lambda K')^*.$$

Soient L^*, L'^*, L''^* trois foncteurs contravariants $\mathfrak{A} \to d\mathcal{G}^*_\Lambda$ et $\Psi : (L \otimes_\Lambda L')^* \to L''^*$ une transformation naturelle.

On suppose que

(i) L^*, L'^*, L''^* sont *acycliques sur les modèles.*

(ii) K^*, K'^*, K''^* *sont représentables,*

(iii) Il existe des transformations naturelles T, T'; T'' définies sur $\mathfrak{M}^\alpha$

$$T : H^0L^* \to H^0K^*, \quad T' : H^0L'^* \to H^0K'^*,$$
$$T'' : H^0L^{*\prime\prime} \to H^0K^{*\prime\prime}.$$

(iv) Le diagramme (défini sur $\mathfrak{M}^\alpha$)

$$\begin{array}{ccc}
H^0L \otimes_\Lambda H^0L' & \xrightarrow{T \otimes T'} & H^0K \otimes_\Lambda H^0K' \\
{\scriptstyle (\eta_L \otimes \eta_{L'}) \circ \varepsilon_\otimes} \uparrow & & \downarrow {\scriptstyle i^* = H^0 \circ (\varepsilon_K \otimes \varepsilon_{K'})} \\
H^0(L \otimes_\Lambda L')^* & & H^0(K \otimes_\Lambda K')^* \\
{\scriptstyle H^0(\psi)} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle H^0(\Phi)} \\
H^0(L'') & \xrightarrow{T''} & H^0(K'')
\end{array}$$

est *commutatif.*

D'après (i), (ii), (iii) il existe des applications

$$\mu : L^* \to K^*$$
$$\mu' : L'^* \to K'^*$$
$$\mu'' : L''^* \to K''^*$$

qui induisent T (resp T', resp T'') sur H^0 restreint à $\mathfrak{M}^\alpha$, et qui sont uniques à une homotopie naturelle près (cf 6. 1)

THÉORÈME. — *Si les foncteurs* K^*, K'^*, K''^*, L^*, L'^*, L''^* *vérifient les conditions* (i), (ii), (iii), (iv), *le diagramme*

$$\begin{array}{ccc}
H^*L^* \otimes_\Lambda H^*L'^* & \xrightarrow{H^*(\mu) \otimes H^*(\mu')} & H^*K^* \otimes_\Lambda H^*K'^* \\
{\scriptstyle i^* \circ H^*(\psi)} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle i^* \circ H^*(\Phi)} \\
H^*(L''^*) & \xrightarrow[H^*(\mu'')]{} & H^*(K''^*)
\end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. — Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^*L^* \otimes_\Lambda H^*L'^* & \xrightarrow{H^*(\mu) \otimes H^*(\mu')} & H^*K^* \otimes_\Lambda H^*K'^* \\ {\scriptstyle i^*}\downarrow & & {\scriptstyle i^*}\downarrow \\ H(L \otimes_\Lambda L')^* & \xrightarrow{H^*(\mu \otimes \mu')} & H(K \otimes_\Lambda K') \end{array}$$

est commutatif. Pour démontrer le théorème, il suffit donc de démontrer que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^*(L \otimes_\Lambda L')^* & \xrightarrow{H^*(\mu \otimes \mu')} & H(K \otimes_\Lambda K')^* \\ {\scriptstyle H^*(\psi)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H^*(\Phi)} \\ H^*(L''^*) & \xrightarrow[H(\mu'')]{} & H^*K''^* \end{array}$$

commute. Considérons alors les deux transformations naturelles $\Phi \circ (\mu \otimes \mu')$ et $\mu'' \circ \psi : (L \otimes_\Lambda L')^* \to K''^*$.

Sur les modèles,

$$\begin{aligned} H^0(\Phi \circ (\mu \otimes \mu')) &= H^0(\Phi) \circ H^0(\mu \otimes \mu') = H^0(\Phi) \circ H^0 \circ (\mu \otimes \mu') \circ \varepsilon_\otimes \\ &= H^0(\Phi) \circ H^0 \circ (\varepsilon_K \otimes \varepsilon_{K'}) \circ (T \otimes T') \circ (\eta_L \otimes \eta_{L'}) \circ \varepsilon_\otimes \\ &= T''H^0(\psi) = H^0(\mu'') \circ H^0(\psi) = H^0(\mu'' \circ \psi) \end{aligned}$$

d'après la définition de μ, μ', μ'' sur $\mathfrak{M}^\alpha$ (cf. 6. 1), et (iv).

Donc $H^0(\Phi \circ (\mu \otimes \mu')) = H^0(\mu'' \circ \psi)$. Comme d'après le lemme, $(L \otimes_\Lambda L')^*$ est acyclique, le théorème 6. 1* montre que $\Phi \circ (\mu \otimes \mu')$ et $\mu'' \circ \psi$ sont naturellement homotopes.

C.Q.F.D.

14. 3. On reprend les notations du § 13.

Le cup-produit $L^* \otimes L^* \to L^*$ est compatible avec les filtrations, et définit par conséquent une structure d'algèbre sur E_r; pour cette algèbre la différentielle d_r est une anti-dérivation pour le *degré total*. En particulier on a une transformation naturelle de $d\mathcal{G}_Z^*$-foncteurs

$$\Psi : E_1^{*, q} \otimes E_1^{*q'} \to E_1^{*' q+q'}$$

où la différentielle du membre de gauche est donnée par

$$d(x \otimes y) = dx \otimes y + (-1)^{p+q}\, x \otimes dy$$

pour $\qquad x \in E_1^{p,q}$

on a aussi une transformation naturelle de $\mathcal{G}_Z$-foncteurs définie sur $\mathcal{FM}$:

$$E_2^{0,q}L^* \otimes E_2^{0,q'}L^* \to E_2^{0,q+q'}L^*$$

qui induit par conséquent un cup-produit

$$\Phi : Hom^*(K_*, G^q) \otimes Hom^*(K_*, G^{q'}) \to Hom^*(K_*, G^{q+q'}).$$

Appliquons le théorème 14. 2.

Théorème. — *L'équivalence naturelle entre* $E_2^{p,q}L^*$ *et* $H^p Hom^*(K, G^q)$ *est compatible avec les structures multiplicatives, à condition de définir le produit de* $x \in H^p\ Hom^*(K_*, G^q)$ *par* $y \in H^{p'}\ Hom^*(K_*, G^{q'})$ *comme étant égal à* $(-1)^{p'q} x \cup y$ *où* $\cup$ *désigne le cup-produit défini par* Φ.

Le signe $(-1)^{p'q}$ provient du fait que si μ^q désigne la transformation naturelle : $Hom^*(K_*, G^q) \to E_1^{*q}$, $\mu^q \otimes \mu^{q'}$ *n'est pas une transformation naturelle de* $d\mathcal{G}_Z^*$*-foncteurs.* Par contre si on désigne par τ l'application $x \otimes y \to (-1)^{p'q}\ x \otimes y$ pour $x \in E_1^{p,q}L^*(\pi)$, $y \in E_1^{p',q'}L^*(\pi)$, on voit immédiatement que $\tau\mu^q \otimes \mu^{q'}$ est une transformation naturelle de $d\mathcal{G}_Z^*$-foncteurs. Enfin les conditions (i), (ii), (iii), (iv) sont vérifiées : en particulier (iv) est une évidence : la colonne de gauche est exactement égale à la colonne de droite, T, T′, T″ sont les transformations naturelles identités.

14. 4. Passons au cas relatif, en nous bornant au cas de la catégorie $(\mathcal{F}_\mathfrak{J})_{\mathcal{Y}'}$; notons par abus de notation, L^* le foncteur $(\mathcal{F}_\mathfrak{J})_{\mathcal{Y}'} \to d\mathcal{G}_Z^*$ défini par $L^*((\pi, \pi'), (\pi'', \pi''')) = L^*(\pi)$ et par $L^*(\Phi, \Phi', \Phi'', \Phi''') = L^*(\Phi)$ (π etc... $\in \mathcal{F}$, Φ etc. sont les morphismes de $\mathcal{F}$).

Soit de même $Hom^*(K_*, G^q)$ le foncteur $(\mathcal{F}_\mathfrak{J})_{\mathcal{Y}'} \to d\mathcal{G}_Z^*$ le foncteur défini comme L ci-dessus.

Le cup-produit est cette fois-ci un accouplement

$$L^* \otimes (L_\mathfrak{J}^*)_{\mathcal{Y}'} \to (L_\mathfrak{J}^*)_{\mathcal{Y}'}$$

$$\text{(resp. } Hom\,(K^*, \mathbf{G}^q) \to Hom\,((K_{*\mathfrak{J}})_{\mathcal{Y}'}, (\mathbf{G}_\mathfrak{J})^q{}_{\mathcal{Y}'}) \to Hom^*\,((K_{*\mathfrak{J}})_{\mathcal{Y}'}, (\mathbf{G}_\mathfrak{J})_{\mathcal{Y}'}^{q+q'})\text{).}$$

le théorème 14. 2 (compte-tenu du signe $((-1)^{p'q})$ donne encore la structure multiplicative de $A^*(B, B'; H^*(F, F''; G))$ compatible avec son identification au terme E_2 de la suite spectrale : le produit est égal au signe $(-1)^{p'q}$ près au cup-produit.

CHAPITRE IV

L'OBSTRUCTION A LA CONSTRUCTION D'UNE SECTION D'UN FIBRÉ

15. — Le système local de l'homotopie de la fibre.

15. 1. Soit $\pi = (E, \underline{p}, B)$ un fibré, une *section* du fibré est une application $g : B \to E$ telle que $p \circ g =$ identité. Une section sur le n-squelette B^n, est une application $g : B^n \to E$ telle que $p \circ g =$ identité. Si g_0 et g_1 sont deux sections : $B \to E$ (resp $B^n \to E$) on dit qu'elles sont *homotopes* s'il existe une homotopie $k : I \times B \to E$ (resp $I \times B^n \to E$) telle que

$$k \circ \varepsilon_0 = g_0, \qquad k \circ \varepsilon_1 = g_1,$$

et telle que $p \circ k(\alpha, x) = x$ pour $\alpha \in I, x \in B$ (resp $x \in B^n$); si $g_0|B' = g_1|B'$ où $B' \subset B$ (resp $B' \subset B^n$), on demande de plus que k soit stationnaire sur B'.

15. 2. Dans le chapitre III, on a vu que l'homologie et la cohomologie de la fibre déterminait un système local sur B. En perfectionnant légèrement le raisonnement du § 12, on démontrera que les *groupes d'homotopie* de la fibre forment un système local classique sur B.

Soit $(E, \underline{p}, \Delta[1])$ un fibré, et g une section de ce fibré. Désignons par F_0 et F_1 les fibres au-dessus des sommets 0 et 1 par $S\ (g(\delta^1))$ l'ensemble simplicial engendré par $g(\delta^1)$.

a. Soit $\mu : I \times (F_0 \cup S(g\delta^1)) \to E$ l'application définie par

$\mu(\alpha, x) = x \quad (\alpha \in I, \ x \in F_0)$.

$\mu(\alpha, \varphi g\delta^1) = g\omega_1(\alpha, \varphi\delta^1) \quad (\alpha \in I, \ \varphi$ opérateur simplicial $\omega_1 : I \times \Delta[1] \to \Delta[1]$ est l'homotopie de 1. 4).

Il existe une homotopie k qui prolonge μ, telle que $k \circ \varepsilon_1 =$ identité et que le diagramme

$$\begin{tikzcd} I \times E \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\mathrm{id.}\times p"'] & E \arrow[d, "p"] \\ I \times \Delta[1] \arrow[r, "\omega_1"] & \Delta[1] \end{tikzcd}$$

commute (cf. 2. 3).

$k \circ \varepsilon_0$ est une application $E \to F_0$ telle que $g(\delta^1) \to k(s_0 d_1 \delta^1, g\delta^1) = \mu(s_0 d_1 \delta^1, g\delta^1) = g\omega_1(s_0 d_1 \delta^1, \delta^1) = s_0 g_0(0)$.

En particulier,

$$k \circ \varepsilon_0 | F_1 : (F_1, g(1)) \to (F_0, g(0)).$$

Proposition 1. — *Si k et $\varkappa$ sont deux homotopies prolongeant μ et l'identité au-dessous de ω_1, $k \circ \varepsilon_0 | F_1 \sim \varkappa \circ \varepsilon_0 | F_1$ rel $g(1)$.*

Démonstration. — D'après la proposition 2. 5, il existe une homotopie

$$h : I \times E \to E \qquad h : k \circ \varepsilon_0 \sim \varkappa \circ \varepsilon_0 \text{ rel } F_0 \cup S\,(g\delta^1).$$

Donc

$$\begin{aligned} h(\alpha, \varphi g(d_0\delta^1)) &= h(\alpha, \varphi d_0\, g\delta^1) = k \circ \varepsilon_0(\varphi d_0\, g\delta^1) \\ &= k(\varphi d_1 \delta^1, \varphi d_0 g\delta^1) = \varphi g\omega_1(d_1\delta^1, d_0\delta^1) = \varphi g(d_1\delta^1) = \varphi g(0) \end{aligned}$$

pour $\alpha \in I$, φ opérateur simplicial.

Autrement dit : $h : I \times g\,(1) \to g(0)$ C.Q.F.D.

Corollaire. — *Pour tout*

$$n \geqslant 0, \ \pi_n(k \circ \varepsilon_0 | F_1) : \pi_n(F_1, g(1)) \to (\pi_n F_0, g(0))$$

est un homomorphisme qui ne dépend que de la section g.

b. Soit maintenant $\mu' : I \times (F_1 \cup S(g\delta^1) \to E$ l'application définie comme μ, en remplaçant F_0 par F_1, et ω_1 par ω'_1 (cf. 1. 4). On peut prolonger μ' et id par une homotopie $k' : I \times E \to E$ au-dessus de ω'_1, et

$$k' \circ \varepsilon_1 | F_0 : (F_0, g(0)) \to (F_1, g(1)).$$

Si $\varkappa'$ est une autre homotopie, prolongeant μ' et id au-dessus de ω'_1, $k' \circ \varepsilon_1 | F_0 \sim \varkappa' \circ \varepsilon_1 | F_0$ rel $g(0)$.

Proposition 2. — $\pi_n(k \circ \varepsilon_0 | F_1)$ *et* $\pi_n\ (k' \circ \varepsilon_1 | F_0)$ *sont deux isomorphismes réciproques.*

Démonstration. — Soit $K: I \times F_0 \to F_0$ l'application par $K(\alpha, x) = k(0, k'(\alpha, x)) (\alpha \in I, x \in F_0))$. K est une homotopie définie telle que $K \circ \varepsilon_0 = \mathrm{id}$; $K \circ \varepsilon_1 = (k \circ \varepsilon_0|F_1) \circ k' \circ \varepsilon_1|F_0$, $K(\alpha, g(0)) = g(0)$ $(\alpha \in I)$. Donc $\pi_n(k \circ \varepsilon_0|F_1) \circ \pi_n(k' \circ \varepsilon_1|F_0) =$ identité.

Même démonstration en sens inverse.

15. 3. *Définition du système local attaché à une section sur le* 1-*squelette.*

Soient (E, p, B) un fibré, et $g: B^1 \to E$ une section sur le 1-squelette.

Si $b \in B_0$, on pose $\mathcal{F}^n_b = \pi_n(F_b, gb)$, où F_b désigne la fibre au-dessus de b.

Soit $\rho \in B_1$. Le fibré $\tilde\rho^*E \to \Delta[1]$ induit par $\tilde\rho$ possède une section $\tilde\rho^*g$ définie par $\tilde\rho^*g(\varphi\delta^1) = (\varphi\delta^1, (g \circ \tilde\rho)\varphi\delta^1)$ pour tout opérateur simplicial φ. Soit Q l'application canonique $\tilde\rho^* \to E$.

Désignons par F_e la fibre au-dessus de e du fibré $\tilde\rho^*E \to \Delta[1]$, et par $F_{d_e\rho}$ la fibre au-dessus de $d_e\rho$ de $E \to B$ $(e = 0$ ou $1)$.

Enfin soit $i: (F_{d_0\rho}, g(d_0\rho)) \to (F_1, \tilde\rho^*g(1))$ l'application définie par $i\ x = (1, x)$ pour $x \in F_{d_0\rho}$. $\pi_n(i)$ est un isomorphisme car i est un isomorphisme de complexes de Kan avec points bases; de même $Q|F_0: (F_0, \tilde\rho^*g(0)) \to (F_{d_1\rho}, g(d_1\rho))$ est un isomorphisme qui induit un isomorphisme en homotopie.

Soit alors k l'homotopie de 15. 2. associée à la section $\tilde\rho^*g$.

On pose $\mathcal{F}^n(\rho) = \pi_n(Q|F_0) \circ \pi_n(k \circ \varepsilon_0|F) \circ \pi_n(i): \mathcal{F}^n_{d_0\rho} \to \mathcal{F}^n_{d_1\rho}$.

D'après 15. 2 = proposition 2, $\mathcal{F}^n(\rho)$ est un isomorphisme.

Pour démontrer que $\mathcal{F}^n$ est un système local (classique) sur B, il faut montrer

(i) : $\mathcal{F}^n(s_0b) =$ identité si $b \in B_0$.

(ii) $\mathcal{F}^n(d_1\sigma) = \mathcal{F}^n(d_2\sigma) \circ \mathcal{F}^n(d_0\sigma)$ si $\sigma \in B_2$.

Remarque. — On peut considérer i comme une application $F_{d_0\rho} \to \tilde\rho^*E$ et poser $j = Q \circ k \circ \varepsilon_0 : \tilde\rho^*E \to F_{d_1\rho}$;

$$j \circ i: (F_{d_0\rho}, g(d_0\rho)) \to (F_{d_1\rho} g(d_1\rho))$$

induit alors $\pi_n (j \circ i) = \mathcal{F}^n(\rho)$.

15. 4. *Démonstration de* (i). — Puisque $\rho = s_0b$, $d_0\rho = d_1\rho = b$. Dans ces conditions, $Q \circ k$ est une homotopie $I \times \tilde\rho^*E \to F_b$ en effet, si P est la projection canonique $\tilde\rho^*E \to \Delta[1]$,

$$p \circ Q \circ k = \tilde\rho \circ P \circ k,$$

et $\tilde{\rho}$ applique $\Delta[1]$ sur l'ensemble simplicial engendré par le sommet b. Donc $Q \circ k \circ (\mathrm{id} \times i) : I \times F_b \to F_b$ est une homotopie entre $j \circ i$ et identité; cette homotopie est rel $g(b)$ puisque

$$\begin{aligned} Q \circ k\ (\alpha, ig(b)) = Q \circ k(\alpha, d_0\tilde{\rho}^* g\delta^1) &= Q \circ \tilde{\rho}^* g(\omega_1(\alpha, d_0\delta^1)) \\ &= g \circ \widetilde{s_0 b} \circ \omega_1\ (\alpha, d_0\delta^1) = g(b) \end{aligned}$$

donc $\pi_n(j \circ i) = \mathrm{id}$ C.Q.F.D.

15. 5. *Démonstration de* (ii). — Soit $\sigma \in B_2$. Comme

$$\widetilde{d_i\sigma} = \tilde{\sigma} \circ \widetilde{d_i\delta^2} \qquad (i = 0, 1, 2)$$

on voit que $\widetilde{d_i\sigma}^* E$ est canoniquement isomorphe à $(\widetilde{d_i\delta^2})^*\ (\tilde{\sigma}^* E)$.

Donc, vu la définition du système local, il suffit de démontrer (ii) lorsque $B = \Delta[2]$.

Notons l, m deux entiers de l'ensemble $\{0, 1, 2\}$, $l < m$, et soit n le troisième élément de $\{0, 1, 2\}$.

On note :

— F_n la fibre au-dessus de $d_l d_m \delta^2$.

— $(E_{l,m}, \underline{p}_{l,m}, \Delta[1])$ le fibré image réciproque de $(E, \underline{p}, \Delta[2])$ par $\widetilde{d_n\delta^2} : \Delta[1] \to \Delta[2]$,

— $q_{l,m}$ l'application canonique $E_{l,m} \to E$,

— $i_{l,m} : F_m \to E_{l,m}$ $j_{l,m} : E_{l,m} \to F_l$ les applications notées i et j dans 15. 3,

— $k_{l,m}$ l'homotopie qui sert à construire $j_{l,m}$,

— $\mu_{l,m}$ l'application qui sert à construire $k_{l,m}$,

— $S(g(d_1\delta^2),\ g(d_2\delta^2))$ l'ensemble simplicial engendré par $g(d_1\delta^2)$ et $g(d_2\delta^2)$,

— μ l'application : $I \times (F_0 \cup S\ (g(d_1\delta^2),\ g(d_2\delta^2)) \to E$ définie par :

$$\mu(\alpha, x) = x \quad \text{si} \quad x \in F_0, \quad \alpha \in I$$
$$\mu(\alpha, \varphi g d_i\delta^2) = g\omega_2(\alpha, \varphi d_i\delta^2)$$

($\alpha \in I$; $i = 1, 2$; φ opérateur simplicial).

Il existe une homotopie $k : I \times E \to E$ qui prolonge μ et l'identité au-dessus de ω_2; $k \circ \varepsilon_0$ est une application $E \to F_0$ que l'on notera J.

Considérons alors l'application :

$$k'_{01} : I \times E_{0,1} \to \Delta[1] \times E$$

définie par $(\omega_1 \circ (\mathrm{id} \times p_{0,1})) \times (k \circ (\mathrm{id} \times q_{0,1}))$ c'est une application $I \times E_{0,1} \to E_{0,1}$ qui prolonge id et $\mu_{0,1}$ au-dessus de ω_1.

On peut donc prendre $k'_{0,1}$ au lieu de $k_{0,1}$ pour définir $j_{0,1}$, et par conséquent $j_{0,1} = q_{0,1}\, k'_{0,1}\, \varepsilon_0 = k \circ (\mathrm{id} \times q_{0,1}) \circ \varepsilon_0 = \mathrm{J} \circ q_{0,1}$.

On a donc

$$j_{0,1} = \mathrm{J} \circ q_{0,1}$$

et de même

$$j_{0,2} = \mathrm{J} \circ q_{0,2}$$

considérons alors l'application

$$\mathrm{J} \circ q_{1,2} \circ k_{1,2} \circ (\mathrm{id} \times i_{12}) : \mathrm{I} \times \mathrm{F}_2 \to \mathrm{F}_0.$$

On a

$$\begin{aligned} \mathrm{J} \circ q_{1,2} \circ k_{1,2} \circ (\mathrm{id} \times i_{1,2}) \circ \varepsilon_0 &= \mathrm{J} \circ j_{1,2} \circ i_{1,2} \\ &= \mathrm{J} \circ q_{0,1} \circ i_{0,1} \circ j_{1,2} \circ i_{1,2} = (j_{0,1} \circ i_{0,1}) \circ (j_{1,2} \circ i_{1,2}) \end{aligned}$$

et

$$\mathrm{J} \circ q_{1,2} \circ k_{1,2} \circ (\mathrm{id} \times i_{1,2}) \circ \varepsilon_1 = \mathrm{J} \circ q_{1,2} \circ i_{1,2} = \mathrm{J} \circ q_{0,2} \circ i_{0,2} = j_{0,2} \circ i_{0,2}.$$

Enfin puisque $k_{1,2}$ est une homotopie rel points bases, et que

$$\mathrm{J}(g(d_0 d_1 \delta^2)) = k(0,\ g d_0 d_1 \delta^2) = g\omega_2(0,\ d_0 d_1 \delta^2) = g(d_1 d_2 \delta^2),$$

l'homotopie $\mathrm{I} \times \mathrm{F}_2 \to \mathrm{F}_0$ est rel points bases. On a donc

$$\pi_n(j_{0,1} \circ i_{0,1}) \circ \pi_n(j_{1,2} \circ i_{1,2}) = \begin{cases} \mathcal{F}^n(d_2\delta^2) \circ \mathcal{F}^n(d_0\delta^2) \\ \pi_n(j_{02} \circ i_{02}) = \mathcal{F}^n[(d_1\delta^2). \end{cases}$$

C.Q.F.D.

Remarque. — On désignera par le même symbole $\mathcal{F}^n$ le système local classique déterminé ci-dessus et le système local contravariant sur la catégorie $\mathfrak{M}_{\mathrm{B}}$.

15. 6. *Le système local de l'homotopie d'un complexe de Kan.*
Si X est un complexe de Kan, la projection $p : \mathrm{I} \times \mathrm{X} \to \mathrm{I}$ fait de $(\mathrm{I} \times \mathrm{X},\ p,\ \mathrm{I})$ un fibré.

Soit $x \in \mathrm{X}_1$ un 1-simplexe; on considère la section $g : \mathrm{I} \to \mathrm{I} \times \mathrm{X}$ définie par $g\delta^1 = (\delta^1,\ x)$. Si on applique les résultats de (15, 2, 3, 4, 5) on voit que x définit un isomorphisme $\pi_n(\mathrm{X},\ d_0 x) \xrightarrow{\bar{x}} \pi_n(\mathrm{X},\ d_1,\ x)$ tel que si $\sigma \in \mathrm{X}_2$, $\overline{d_2\sigma} \circ \overline{d_0\sigma} = \overline{d_1\sigma}$.

La correspondance :

$$\begin{aligned} \mathrm{X}_0 \ni x &\to \pi_n(\mathrm{X},\ x) \\ \mathrm{X}_1 \ni x &\to \bar{x} \end{aligned}$$

est donc un système local (classique).

16. — L'obstruction $c^{n+1}(g)$ $(n \geqslant 1)$.

16. 1. Soient (E, p, B) un fibré, et $g : B^n \to E$ une section sur le n-squelette. Soit $x \in B_{n+1}$, $x \notin B^n$. On considère le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (I \times O_{n+1}) \cup (1 \times \dot{\Delta}[n+1]) & \xrightarrow{f} & E \\ \big\downarrow \text{inj} & & \big\downarrow p \\ I \times \dot{\Delta}[n+1] & \xrightarrow[\tilde{x} \circ \omega_{n+1}]{} & B \end{array}$$

où f est l'application définie par

$$f(\alpha, O_{n+1}) = gx_0 \quad (\alpha \in I,\ x_0 = d_1 \ldots d_{n+1}x)$$
$$f(1, \beta) = g \circ \tilde{x}(\beta) \quad (\beta \in \dot{\Delta}[n+1]).$$

D'après 2. 3. il existe une application $k : I \times \dot{\Delta}[n+1] \to E$ qui prolonge f au-dessus de $\tilde{x} \circ \omega_{n+1}$. $k \circ \varepsilon_0$ est donc une application

$$(\dot{\Delta}[n+1],\ O_{n+1}) \to (F_{x_0},\ g(x_0))$$

la classe d'homotopie de cette application (cf. 4.5) est un élément de $\pi_n(F_{x_0})$, $g(x_0)$ que l'on désigne par $c^{n+1}(g)$ (x).

Proposition. — *c^{n+1} (g) (x) est indépendant du choix de l'homotopie k qui prolonge f au-dessus de $\tilde{x} \circ \omega_{n+1}$.*

Démonstration. — Soit x une autre homotopie. D'après 2. 5 il existe une homotopie $h : k \circ \varepsilon_0 \sim k \circ \varepsilon_0$ rel 0_{n+1}. C.Q.F.D.

L'application $x \to c^{n+}(g)$ (x) définie pour $x \in B_{n+1}$ non dégénéré est donc une $(n+1)$-cochaîne de

$$Hom^{n+1}\,(C_{*B}, \mathcal{F}^n)\,(B, \mathrm{id})$$

où $\mathcal{F}^n$ est le système local défini par la section $g|B^1$ (cf. 10. 2).

16. 2. Proposition. — *La condition nécessaire et suffisante pour que g soit prolongeable à* B^{n+1} *est que* c^{n+1} $(g) = 0$.

Démonstration.

a. La condition est nécessaire en effet, si g est défini sur B^{n+1}, on peut dans le diagramme de 16. 1 remplacer $\dot{\Delta}[n+1]$ par $\Delta[n+1]$. On obtient une application $k \circ \varepsilon_0 : \Delta[n+1] \to F_{x_0}$

dont la restriction à $\dot{\Delta}[n+1]$ est un représentant de $c^{n+1}(g)x$ $(x \in B_{n+1})$.

On applique alors 4. 7.

b. La condition est suffisante. — Soit $x \in B_{n+1}$. Puisque $c^{n+1}(g)\,(x) = 0$, l'application $k \circ \varepsilon_0$ de 16. 1. est prolongeable à $\Delta[n+1]$ d'après 4. 7. On considère alors le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(I \times \dot{\Delta}[n+1]) \cup (0 \times \Delta[n+1]) \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"] & E \arrow[d, "p"] \\
I \times \Delta[n+1] \arrow[ur, dotted] \arrow[r, "\tilde{x} \circ \omega_{n+1}"'] & B
\end{tikzcd}$$

où f' est l'application définie par

$$f'(\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta) \ (\alpha \in I,\ \beta \in \dot{\Delta}[n+1])$$
$$f'(0, \beta) = k \circ \varepsilon_0(\beta) \ (\beta \in \Delta[n+1]).$$

D'après 2.3, il existe une homotopie $K : I \times \Delta[n+1] \to E$ qui prolonge f' au-dessus de $\tilde{x} \circ \omega_{n+1}$.

On pose $g'x = K \circ \varepsilon_1 \delta^{n+1}$, $g' s_{\alpha_1} \ldots s_{\alpha_q} x = s_{\alpha_1} \ldots s_{\alpha_q} g'x$.

g' est un prolongement de g puisque pour $i = 0, \ldots, n+1$ on a :

$$d_i g'x = d_i(K \circ \varepsilon_1)\delta^{n+1} = (K \circ \varepsilon_1) d_i \delta^{n+1} = (k \circ \varepsilon_1) d_i \delta^{n+1}$$
$$= g \circ \tilde{x} d_i \delta^{n+1} = g d_i x.$$

Remarque. — Il résulte de la démonstration précédente que si g est connue sur un sous-ensemble simplicial $B' \subset B$,

$$c^{n+1}(g) \in \mathit{Hom}^{n+1}\left((C^*{}_B)_{\mathcal{J}}, \mathcal{F}^n\right)(B, B')$$

où l'on a écrit (B, B') au lieu de $((B, \mathrm{id}), (B', i))$ où i est l'injection $i : B' \to B$.

16. 3. Proposition. — *$c^{n+1}(g)$ est un cocycle* $(n > 1)$.

Démonstration.

a. Soient $x \in B_{n+1}$, x non dégénéré, $Q : \tilde{x}^*E \to E$ l'application canonique, $\tilde{x}^*g : \dot{\Delta}[n+1] \to \tilde{x}^*E$ la section définie par $\tilde{x}^*g\,(d_i\delta^{n+1}) = (d_i\delta^{n+1},\ g \circ \tilde{x} d_i \delta^{n+1})$.

Il existe une homotopie $k : I \times \tilde{x}^*E \to \tilde{x}^*E$ stationnaire sur 0_{n+1}, qui prolonge l'identité au-dessus de ω_{n+1}.

Il est clair sur les définitions que :

$$Q \circ (k \circ \varepsilon_0) \circ \tilde{x}^*g : (\dot{\Delta}[n+1], 0_{n+1}) \to (F_{x_0}, g(x_0))$$

est un représentant de $c^{n+1}(g)\,(x)$.

b. Soit alors $y \in B_{n+2}$, y non dégénéré. On a (cf. 10. 2)

$$(\delta c^{n+1}(g))\,(y) = \mathcal{F}^n(\rho)\,c^{n+1}(g)\,(d_0 y) + \sum_{i=1}^{n+2} (-1)^i c^{n+1}(g)\,d_i(y)$$

où ρ désigne le 1-simplexe $d_2 \dots d_{n+2} y$,

— soient i et j les applications définies dans 15. 3,

— $J^{n+1} : \widetilde{d_0 y}^*E \to F_{d_0\rho}$ l'application $Q \circ (k \circ \varepsilon_0)$ définie dans *a* avec $x = d_0 y$,

— $i^{n+1} : F_{d_0\rho} \to \widetilde{d_0 y}^*E$ l'application $x \to (0_{n+1}, x)$,

— $\lambda : \tilde{\rho}^*E \to \tilde{y}^*E$ l'injection canonique,

— $\mu : \widetilde{d_0 y}^*E \to \tilde{y}^*E$ l'injection canonique.

Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(I \times \lambda(\tilde{\rho}^*E)) \cup (1 \times \tilde{y}^*E) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"] & \tilde{y}^*E \arrow[d, "P"] \\
I \times \tilde{y}^*E \arrow[r, "(\mathrm{id} \times P) \circ \omega_{n+2}"'] & \Delta[n+2]
\end{tikzcd}$$

où f est l'application définie par

$$f(1, x) = x \qquad (x \in \tilde{y}^*E)$$

$f(\alpha, \lambda x) = \lambda h\,(\alpha, x)$ $(x \in \tilde{\rho}^*E,\ \ \alpha \in I,\ \ h : I \times \tilde{\rho}^*E \to \tilde{\rho}^*E$ est l'homotopie qui sert à construire $j)$

montre qu'il existe une homotopie $K : I \times \tilde{y}^*E \to \tilde{y}^*E$ qui prolonge f au-dessus de $(\mathrm{id} \times P) \circ \omega_{n+2}$.

Soit Q^{n+2} l'application canonique $\tilde{y}^*E \to E$;

Il résulte de ce qui précède et de *a* que

(i) $Q^{n+2} \circ K \circ \varepsilon_0 \circ \lambda = j$.

(ii) $Q^{n+2} \circ K \circ \varepsilon_0 \circ \tilde{y}^* g \circ \widetilde{d_i \delta}^{n+2} | \dot{\Delta}[n+1]$ est un représentant de $c^{n+1}(g)\,(d_i y)$ pour $i > 0$.

Mais on a aussi :

(iii) $Q^{n+2} \circ K \circ \varepsilon_0 \circ \tilde{y}^* g \circ \widetilde{d_0 \delta}^{n+2} | \dot{\Delta}[n+1]$ est un représentant de $\mathcal{F}^n(\rho)\ c^{n+1}(g)\,(d_0 y)$.

En effet, le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{d_0 y}^*E \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "i^{n+1}"'] & \tilde{y}^*E \arrow[r, "Q^{n+2} \circ K \circ \varepsilon_0"] \arrow[d, "\lambda"'] & F_{d_1\rho} \\
F_{d_0\rho} \arrow[r, "i"] & \tilde{\rho}^*E \arrow[ur, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

On considère alors l'homotopie

$$H = Q^{n+2} \circ K \circ \varepsilon_0 \circ \mu \circ k \circ (\mathrm{id} \times \widetilde{d_0 y}^* g) : I \times \dot{\Delta}[n+1] \to F_{d_1\rho}.$$

On a

$$H \circ \varepsilon_1 = Q^{n+2} \circ K \circ \varepsilon_0 \circ \mu \circ \widetilde{d_0 y}^* g = Q^{n+2} \circ K \circ \varepsilon_0 \circ \tilde{y}^* g \circ \widetilde{d_0 \delta}^{n+2}$$

$$\begin{aligned} H \circ \varepsilon_0 &= Q^{n+2} \circ K \circ \varepsilon_0 \circ \mu \circ i^{n+1} \circ J^{n+1} \circ \widetilde{d_0 y}^* g \\ &= Q^{n+2} \circ K \circ \varepsilon_0 \circ \lambda \circ i \circ J^{n+1} \widetilde{d_0 y}^* g = j \circ i \circ J^{n+1} \circ \widetilde{d_0 y}^* g \end{aligned}$$

de plus H est stationnaire sur 0_{n+1} car cela est vrai pour k (iii) est donc bien vérifié puisque $j \circ i$ induit $\mathcal{F}^n(\rho)$ et $J^{n+1} \circ \widetilde{d_0 y}^* g$ est un représentant de $c^{n+}(g)\,(d_0 y)$ d'après a.

c. Soit alors $\Phi : \ddot{\Delta}[n+2] \to (F_{d_1\rho},\ g(d_1\rho))$ l'application

$$\Phi = Q^{n+2} \circ K \circ \varepsilon_0 \circ \tilde{y}^* g$$

on a $\Phi(d_2 \ldots d_{n+2}\, \delta^{n+2}) = s_0 g(d_1\rho)$ puisque $jg(\rho) = s_0 g(d_1\rho)$. On peut donc appliquer la proposition 4. 6. à Φ. Compte tenu de (ii) et (iii), 4. 6. implique $\delta c^{n+1}(g)\,(y) = 0$.

C.Q.F.D.

16. 4. Soit $f : A \to B$ une application. On définit une section $f^*g : A^n \to f^*E$ du fibré induit par f en posant

$$f^*g\,(x) = (x, gfx) \text{ pour tout } x \in A^n.$$

Désignons par f^{n+1} l'application $Hom^{n+1}\,(C_{*B}, \mathcal{F}^n)\,(f, f, \mathrm{id})$.

Proposition. — $c^{n+1}\,(f^*g) = f^{n+1}c^{n+1}(g)$.

C'est évident sur les définitions (en utilisant par exemple 16. 3 pour définir l'obstruction).

17. — La cochaîne différence.

On peut donner une définition directe de la cochaîne différence (cf. 17. 11). Les propositions 17. 7 (dont la démonstration serait alors analogue à celle de 16. 3. — tout en étant beaucoup plus possible —) et 18. 4. montrent cependant qu'on a intérêt à donner une définition qui mette en évidence les relations existantes entre la cochaîne différence et le cocycle obstruction (cf. Steenrod [18]).

17. 1. *Notations.* — Soient g_0 et g_1 deux sections sur le n-squelette B^n du fibré (E, p, B) et k une homotopie $g_0|B^{n-1} \sim g_1|B^{n-1}$ (cf. 15. 1). On considère le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(I \times B^{n-1}) \cup (0 \times B^n) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{inj}"'] & E \arrow[d, "p"] \\
I \times B^n \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

où la flèche du haut représente l'application égale à k sur $I \times B^{n-1}$ à g_0 sur $0 \times B^n$ et la flèche du bas le composé de la projection $I \times B^n \to B^n$ et de l'injection $B^n \to B$.

D'après 2. 3. il existe une application $\varkappa : I \times B^n \to E$ qui prolonge k et g_0.

$(I \times E, \mathrm{id} \times p, I \times B)$ est un fibré que l'on muni d'une section h sur le n-squelette $(I \times B)^n$ en posant
$h(\alpha, b) = (\alpha, \varkappa(\alpha, b))$ pour $(\alpha, b) \in (I \times B)^n - s_0^n d_0 \delta^1 \times B^n$
$h(\alpha, b) = (\alpha, g_1 b)$ pour $(\alpha, b) \in s_0^n d_0 \delta^1 + B^n$.

On prolonge h à un sous-ensemble de $(I \times B)^{n+1}$ en posant
$h(\alpha, b) = (\alpha, \varkappa(\alpha, b))$ pour $(\alpha, b) = (s_n \ldots \hat{s}_i \ldots s_0 \delta^1, s_i b')$

$$b' \in B_n, \qquad i > 0.$$

On désigne par

$\mathcal{F}$ le système local sur $I \times B$ défini par le n-ième groupe d'homotopie de la fibre et la section $h|(I \times B)^1$, et aussi par $\mathcal{F}$ le système local (contravariant) induit sur la catégorie $\mathfrak{M}_{I,B}$ (cf. 10. 3).

∇^* la transformation naturelle $Hom^*\ (\nabla_{I,B}, \mathcal{F}) : Hom^*\ (L_{I,B}, \mathcal{F}) \to Hom^*\ (K_{I,B}, \mathcal{F})$ (cf. 9. 9 et 9. 10).

f^* la transformation naturelle $Hom^*\ (f_{I,B}\ \mathcal{F})$ (cf. 9. 9. et 9. 10.).

$\mathcal{F}_e (e = 0$ ou $1)$ le système local sur B défini par le n-ième groupe d'homotopie de la fibre et la section $g_e|B^1$.

17. 2. *Explicitation de $\mathcal{F}$.* — Les fibres de

$$(I \times E, \mathrm{id} \times p, I \times B)$$

sont du type $d_e\delta^1 \times F_x$ ($x \in B_0$, $e = 0$ ou 1). Les points bases de ces fibres sont $h(d_e\delta^1, x) = (d_e\delta^1, g_{1-e}x)$.

$\pi_n(d_e\delta^1 \times F_x, h(d_e\delta^1, x))$ est canoniquement isomorphe à $\pi_n(F_x, g_{1-e}x)$. Pour rappeler que la fibre est $d_e\delta^1 \times F_x$ on écrira $\pi_n(d_e\delta^1 \times F_x, h(d_e\delta^1, x)) = (d_e\delta^1, \pi_n(F_x, g_{1-e}x)$ et, comme dans

5. 1 d, on introduira les isomorphismes $i(d_e\delta^1)$, $j(d_e\delta^1)$ qui constituent à écrire ou effacer $d_e\delta^1$. Pour simplifier on écrira comme d'habitude e à la place de $d_{1-e}\delta^1$.

Soit alors $\rho \in B_1$, $x \in B_0$. En utilisant 15. 3 on voit que

(i) $\mathcal{F}(s_0 e, \rho) = i(e)\mathcal{F}_e(\rho)j(e)$,

(ii) $\mathcal{F}(\delta^1, s_0 x) = i(0)\, \overline{k(\delta^1, s_0 x)}\, j(1)$,

où $k(\delta^1, s_0 x) : \pi_n(F_x, g_1 x) \to \pi_n(F_x, g_0 x)$ est l'isomorphisme induit par le 1-simplexe k $(\delta^1, s_0 x) \in F_x$ (cf. 15. 6.) (on rappelle que $k(\delta^1, s_0 x) \in F_x$ car $pk(\delta^1, s_0 x) = s_0 x$ d'après 15. 1.

En appliquant 15. 3. (ii) à $\sigma = (s_0\delta^1, s_1\rho)$ et à $\sigma = (s_1\delta^1, s_0\rho)$ on voit que

(iii) $\mathcal{F}(\delta^1, \rho) = \mathcal{F}(s_0 0, \rho) \circ \mathcal{F}(\delta^1, s_0 d_0 \rho) = \mathcal{F}(\delta^1, s_0 d_1 \rho) \circ \mathcal{F}(s_0 1, \rho)$

les formules (i), (ii) et (iii) explicitent complètement $\mathcal{F}$ en fonction de $\mathcal{F}_e$ et k.

17. 3. *L'équivalence naturelle* $\tau : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_0$ *associée à une homotopie* $g_0|B^1 \sim g_1|B^1$.

Soient $(M, u) \in \mathcal{G}_B$ un modèle ($u : M \to B$, $M \in \mathfrak{M}$), et μ l'homotopie $g_0|B^1 \sim g_1|B^1$. On considère l'isomorphisme

$$\tau : \mathcal{F}_1(M, u) \to \mathcal{F}_0(M, u)$$

défini par $\gamma \to \overline{\mu(\delta^1, u(0))}\,\gamma$ où 0 désigne le zéro-ième sommet de M.

17. 2. (iii) montre que τ est une transformation naturelle.

Dans la suite on prendra $\mu = k|I \times B^1$.

17. 4. *Les transformations naturelles* ψ_e^*($e = 0$ ou 1) ($n > 1$).

Soit Z le système local constant sur I (ou $\mathfrak{M}_I$) de module l'anneau Z des entiers rationnels. On obtient un système local $Z \otimes \mathcal{F}_e$ sur $I \times B$ (ou $\mathfrak{M}_{I,B}$) en posant pour tout $x \in B_0$, $(\alpha, \rho) \in I_1 \times B_1$, $e, e' = 0$ ou 1 :

$$(Z \otimes \mathcal{F}_e)_{e', x} = Z \otimes_Z (\mathcal{F}_e)_x \approx (\mathcal{F}_e)_x$$
$$(Z \otimes \mathcal{F}_e)\,(\alpha, \rho) = \mathrm{id} \otimes \mathcal{F}_e(\rho).$$

On considère alors les homomorphismes

$$\psi_e : (Z \otimes \mathcal{F}_e)_{e', x} \to \mathcal{F}_{e', x}$$

définis par

$$\psi_0 = \mathcal{F}(\alpha, s_0 x) i(0)$$
$$\psi_1 = \mathcal{F}^{-1}(\beta, s_0 x) i(1)$$

où α (resp β) est l'unique 1-simplexe de I tel que $d_1\alpha = 0$, $d_0\alpha = e'$ (resp $d_1\beta = e'$, $d_0\beta = 1$).

D'après 17. 2. (i), (ii), (iii), ψ_e est une transformation naturelle $Z \otimes \mathcal{F}_e \to \mathcal{F}$ de fonctions contravariantes dont la source est $\mathfrak{M}_{I, B}$.

D'après 7. 7 ψ_e induit une transformation naturelle.

$$(1) \qquad Hom^* (K_{I, B}, Z \otimes \mathcal{F}_e) \to Hom^* (K_{I, B}, \mathcal{F})$$

Comme d'autre part on a une transformation naturelle

$$(2) \quad Hom^* (C_I, Z) \otimes Hom^* (C_B, \mathcal{F}_e) \to Hom^* (K_{I, B}, Z \otimes \mathcal{F}_e) \text{ (}^1\text{)}.$$

On en déduit par composition de (1) et (2) une transformation naturelle de foncteurs de source $\mathcal{G}_{I, B}$:

$$\psi_e^* : Hom^* (C_I, Z) \otimes Hom^* (C_B \mathcal{F}_e) \to Hom^* (K_{I, B}, \mathcal{F})$$

17. 5. *L'isomorphisme* λ^* $(n > 1)$.

Soit $u : (\dot{I}, B) \to (I, B)$ l'injection canonique dans $\mathcal{G}_{I, B}$. Pour chaque $p = 0, 1, \ldots$ on définit un isomorphisme

λ^p : Ker $Hom^{p+1} (K_{I, B}, \mathcal{F}) (u) \to Hom^p (C_B, F_0) (B, \mathrm{id})$

de la façon suivante :

$$\text{Ker } Hom^{p+1}(K_{I, B}, \mathcal{F}) (u) = \prod_{\substack{x \in B_p \\ x \text{ non dégénéré}}} \text{Hom} (\delta^1_{\otimes} x, \mathcal{F}(\Delta[1], \Delta[n], \tilde{\delta}^1, \tilde{x}))$$

et

$$Hom^p (C_B, \mathcal{F}_0) (B, \mathrm{id}) = \prod_{\substack{x \in B_p \\ x \text{ non dégénéré}}} \text{Hom} (x, \mathcal{F}_0(\Delta[n], \tilde{x})).$$

Si $\varphi \in$ Ker $Hom^{p+1} (K_{I, B}, \mathcal{F}) (u)$ on pose, pour tout $x \in B_p$, x non dégénéré,

$$(\lambda^p \varphi) (x) = (-1)^p j(0) \varphi(\delta^1_{\otimes} x).$$

Lemme. — $\lambda^{p+1} \delta = \delta \lambda^p$.

Démonstration. — Soit $\rho = d_2 \ldots d_{p+1} x$ avec $x \in B_{p+1}$, x non dégénéré, alors (cf. 10. 2) :

$$(\delta \lambda^p \varphi) (x) = \sum_{i>0} (-1)^i (\lambda^p \varphi) (d_i x) + \mathcal{F}_0(\rho) (\lambda^p \varphi) (d_0 x)$$

$$= \sum_{i>0} (-1)^{i+p} j(0) \varphi(\delta^1 \otimes d_i x) + (-1)^p \mathcal{F}_0(\rho) (j(0) \varphi(\delta^1 \otimes d_0 x))$$

(1) Un objet de $\mathcal{G}_{I, B}$ est un couple formé d'un objet de $\mathcal{G}_I$ et d'un objet de $\mathcal{G}_B$. Le foncteur de gauche associe à (X, Y) $(X \in \mathcal{G}_I, Y \in S_B)$ le complexe $Hom^*(C_I, Z)(X) \otimes_Z Hom^* (C_B, \mathcal{F}_e) (Y)$, à un morphisme de $\mathcal{G}_{I, B}$ le produit tensoriel des morphismes dans $d\mathcal{G}_Z^*$ correspondant aux morphismes dans $\mathcal{G}_I$ et $\mathcal{G}_B$.

Enfin la transformation naturelle (2) est bien évidente : avec des notations évidentes, $\varphi \otimes \varphi'$ elle fait correspondre la cochaîne $x \otimes y \to \varphi(x) \otimes \varphi'(y)$.

et

$$(\delta\varphi)(\delta^1_\otimes x) = -\sum_{i>0}(-1)^i\,\varphi(\delta^1_\otimes d_i x) - \mathcal{F}(s_0 0, \rho)\,\varphi(\delta^1_\otimes d_0 x)$$

d'où

$$(\lambda^{p+1}\delta\varphi)(x) = -\sum_{i>0}(-1)^{i+p+1} j(0)\,\varphi(\delta^1 \otimes d_i x) \\ -(-1)^{p+1} j(0)\,\mathcal{F}(s_0\,0, \rho)\,\varphi(\delta^1_\otimes d_0 x)$$

ce qui démontre le lemme compte tenu de 17. 2 (i).

17. 6. *Définition de la cochaîne différence.* — Soit

$$\varphi_e \in Hom^0(\mathrm{C_I}, Z)(\mathrm{I}, \mathrm{id})$$

la o-cochaîne définie par $\varphi_e(e) = 1$ $\varphi_e(1-e) = 0$ $(e = 0, 1)$.
$c^{n+1}(g_0, g, h) = \nabla^{n+1}c^{n+1}(h) - \psi_0^{n+1}(\varphi_0 \otimes c^{n+1}(g_0)) - \psi_1^{n+1}(\varphi_1 \otimes c^{n+1}(g_1))$
est une $(n+1)$-cochaîne de $\mathrm{Ker}\, Hom^{n+1}(\mathrm{K_{I,B}}, \mathcal{F})(u)$ en effet, si $x \in \mathrm{B}_{n+1}$, x non dégénéré,

$$\nabla^{n+1}c^{n+1}(h)(d_1\delta^1 \otimes x) = c^{n+1}(h)(\nabla d_1\delta^1 \otimes x)) \\ = c^{n+1}(h)(s_0^{n+1}d_1\delta^1, x) = (d_1\delta^1, c^{n+1}(g_0)(x))$$

(la dernière égalité résulte du fait que les faces de $(s_0^{n+1}d_1\delta^1, x)$ sont $(s_0^n d_1\delta^1, d_i x)$ sur lesquelles $h = \mathrm{id} \times g_0$)

$$\psi_0^{n+1}(\varphi_0 \otimes c^{n+1}(g_0))(d_1\delta^1 \otimes x) = \psi_0(1 \otimes c^{n+1}(g_0)(x)) = (d_1\delta^1, c^{n+1}(g_0)x) \\ \psi_1^{n+1}(\varphi_1 \otimes c^{n+1}(g_1))(d_1\delta^1 \otimes x) = 0,$$

donc $c^{n+1}(g_0, g_1; h)(d_1\delta^1 \otimes x) = 0$. De même

$$c^{n+1}(g_0, g_1; h)(d_0\delta^1 \otimes x) = 0.$$

DÉFINITION. — On appelle cochaîne différence la n-cochaîne de $Hom^n(\mathrm{C_B}, \mathcal{F}_0)(\mathrm{B}, \mathrm{id})$ définie par $(n > 1)$

$$d^n(g_0, g_1; h) = (-1)^{n+1}\lambda^n c^{n+1}(g_0, g_1; h).$$

17. 7. PROPOSITION. — $\delta d^n(g_0, g; h) = c^{n+1}(g_0) - \tau c^{n+1}(g_1)$ $(n > 1)$.

Démonstration. — ∇^*, λ^*, ψ_0^*, ψ_1^* commutent avec δ, et $c^{n+1}(h)$, $c^{n+1}(g_0)$, $c^{n+1}(g_1)$ sont des cocyles, donc :

$$\delta d^n(g_0, g_1; h) = (-1)^{n+1}\lambda^{n+1}(-\psi_0(\delta\varphi_0 \otimes c^{n+1}(g_0)) - \psi_1(\delta\varphi_1 \otimes c^{n+1}(g_1))$$

si $x \in \mathrm{B}_{n+1}$, x non dégénéré, on a donc (puisque $(\delta\varphi_0)(\delta^1) = -1$, $(\delta\varphi_1)(\delta^1) = 1)$:

$$\delta d^n(g_0, g_1; h)(x) = -j(0)(-\psi_0(1 \otimes c^{n+1}(g_0)(x) \\ + \psi_1(1 \otimes c^{n+1}(g_1)(x)) = c^{n+1}(g_0)(x) - \tau c^{n+1}(g_1)(x).$$

17. 8. Proposition. — *La condition nécessaire et suffisante pour que k soit prolongeable à* $I \times B^n$ *est que* $d^n(g_0, g_1; h) = 0$.

Démonstration. — Il est clair sur les définitions que la condition nécessaire et suffisante pour que k soit prolongeable à $I \times B^n$ est que h soit prolongeable à $I \times B^n \subset (I \times B)^{n+1}$. Soit φ l'injection $I \times B^n \to I \times B$. On rappelle (cf. [2]) que $\nabla(\delta^1 \otimes x) = \Sigma(-1)^i\ (s_n \ldots \hat{s}_i \ldots s_0\delta^1,\ s_i x)$ ($x \in B_n$, x non dégénéré) et que

$$f(s_n \ldots s_i \ldots s_0\delta^1, s_i x) = 0 \text{ si } i \neq 0,\ \delta^1 \otimes x \text{ si } i = 0.$$

Comme $c^{n+1}(h)\ (s_n \ldots \hat{s}_i \ldots s_0,\ s_i x) = 0$ si $i < 0$ d'après 16. 2. et 17. 1, et que $\varphi^{n+1} f^{n+1} \psi_e^{n+1}\ (\varphi_e \otimes c^{n+1}\ (g_e)) = 0$ (puisque φ_e est une zéro cochaîne), on en déduit que

$$\varphi^{n+1} f^{n+1}\ (\lambda^n)^{-1}\ d^n\ (g_0, g_1; h) = (-1)^{n+1}\ \varphi^{n+1}\ c^{n+1}\ (h).$$

Donc si $d^n(g_0\ g_1; h) = 0$, $\varphi^{n+1}\ c^{n+1}(h) = 0$ ce qui entraîne d'après 16. 2. et 16.4. que h est prolongeable à $I \times B^n$. Réciproquement si $\varphi^{n+1}\ c^{n+1}(h) = 0$, $(\lambda^n)^{-1} d^n(g_0, g_1; h) \in \operatorname{Ker} \varphi^{n+1} f^{n+1}$. Or si $\varphi \in \operatorname{Ker}\ \varphi^{n+1}\ f^{n+1}$, $\varphi(\delta^1 \otimes x) = 0$ pour $x \in B_n$, x non dégénéré. Donc $(\lambda^n)^{-1}\ d^n\ (g_0, g_1; h)$ est nulle car cette cochaîne est nulle sur $d_e\delta^1 \otimes x$ pour $x \in B_{n+1}$, x non dégénéré et sur $\delta^1 \otimes x$, $x \in B_n$, x non dégénéré.

Remarque. — Il résulte de la démonstration, que si k est connue sur un sous-ensemble simplicial $B' \subset B$,

$$d^n(g_0, g_1; h) \in Hom^n\left((C_{*B})_{\mathfrak{J}}, \mathcal{F}_0\right) \qquad (B, B').$$

17. 9. Proposition. — *Si* g_0 *et* g_1 *sont deux sections sur le n-squelette homotopes* rel B^0, *on a* $c^{n+1}(g_0) = c^{n+1}(g_1)$.

Démonstration. — Soit $\varkappa : I + B^n \to E$ l'homotopie donnée, et soit $h : (I \times B)^n \to I \times E$ la section construite à l'aide de $\varkappa$ comme dans 17. 1. D'après 17. 8 on a $d^n\ (g_0, g_1; h) = 0$, donc d'après 17. 7. $c^{n+1}\ (g_0) = \tau c^{n+1}\ (g_1)$. Mais $\varkappa$ étant une homotopie rel B^0, τ est l'identité. C.Q.F.D.

17. 10. Proposition. — $d^n(g_0, g_1; h)$ *ne dépend que de* $k : g_0|B^{n-1} \sim g_1|B^{n-1}$.

Démonstration. — Soit $\varkappa'$ une autre homotopie prolongeant k, et h' la section correspondante.

D'après 2. 5, il existe une application $K: I \times I \times B^n \to E$ telle que :

$$\begin{array}{ll} K(\alpha, 0, x) = \varkappa(\alpha, x) & \alpha \in I, x \in B^n \\ K(\alpha, 1, x) = \varkappa'(\alpha, x), & \alpha \in I, x \in B^n \\ K(\alpha, \beta, y) = k(\alpha, y) & \alpha, \beta \in I, y \in B^{n-1} \\ \underline{p}K(\alpha, \beta, x) = x, & \alpha, \beta \in I, x \in B^n \end{array}$$

on définit alors une application $H: I \times I \times B^n \to I \times E$ en posant

$$H(\alpha, \beta, x) = \alpha, K(\alpha, \beta, x) \quad \text{pour} \quad \beta \in I, \; (\alpha, x) \in (I \times B)^n - s_0 d_0 \delta^1 \times B^n$$

$$H(\alpha, \beta, x) = \alpha, g_1(x) \quad \text{pour} \quad \beta \in I, (\alpha, x) \in s_0^n d_0 \delta^1 \times B^n$$

H est une homotopie (par rapport à la deuxième variable) : $h \sim h'$ rel $I \times B^{n-1}$.

Donc, pour $n > 1$, $c^{n+1}(h) = c^{n+1}(h')$ d'après 17. 9.

C.Q.F.D.

Remarque. — Puisque $d^n(g_0, g_1; h)$ ne dépend que de k, on écrira désormais $d^n(g_0, g_1; k)$ au lieu de $d^n(g_0, g_1; h)$.

17. 11. *Le cas où* $g_0|B^{n-1} = g_1|B^{n-1}$.

Si k est l'homotopie $I \times B^{n-1} \to E$ donnée par

$$k(\alpha, x) = g_0(x) = g_1(x) \quad \text{pour} \quad \alpha \in I, x \in B^{n-1},$$

on pose $d^n(g_0, g_1) = d^n(g_0, g_1; k)$.

Soit $G_x: \dot{\Delta}[n+1] \to E$ l'application définie par

$$\begin{array}{ll} G_x d_0 \delta^{n+1} = (g_0 \circ \tilde{x})\delta^n & \\ G_x d_1 \delta^{n+1} = (g_1 \circ \tilde{x})\delta^n & \\ G_x d_j \delta^{n+1} = (g \circ \tilde{x}) s_0 d_{j-1} \delta^n & \text{pour} \quad j > 1 \end{array}$$

($x \in B_n$, x non dégénéré, $g = g_0|B^{n-1} = g_1|B^{n-1}$).

Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} (I \times 0_{n+1}) \cup (1 \times \dot{\Delta}[n+1]) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{inj}"'] & E \arrow[d, "\underline{p}"] \\ I \times \dot{\Delta}[n+1] \arrow[r, "s_0 x \circ \omega_{n+1}"] & B \end{tikzcd}$$

où la flèche supérieure désigne l'application égale à G_x sur $1 \times \dot{\Delta}[n+1]$ et à $g(d_1 \ldots d_n x)$ sur $I \times 0_{n+1}$ permet d'appliquer 2. 3 : on obtient une homotopie D : $I \times \dot{\Delta}[n+1] \to E$ et $D \circ \varepsilon_0 : (\dot{\Delta}[n+1], 0_{n+1}) \to (F_{x_0}, g(x_0))$ où $x_0 = d_1 \ldots d_n x$.

On voit facilement que la classe d'homotopie de $D \circ \varepsilon_0$ est égale à $d(g_0, g_1)(x)$. En particulier cette classe est indépendante de l'homotopie D qui prolonge G_x. Il revient au même de définir $d(g_0, g)$ de la manière suivante : (cf. 16. 3 *a*). Soit $\tilde{x}^*G$ l'application $\dot{\Delta}[n+1] \to \tilde{x}^*E$ définie par :

$$\tilde{x}^*G(d_0\delta^{n+1}) = \tilde{x}^*g_0(\delta^n) = (\delta^n, g_0(x))$$
$$\tilde{x}^*G(d_1\delta^{n+1}) = \tilde{x}g_1(\delta^{n+1}) = (\delta^n, g_1(x))$$

et pour $j > 1$

$$\tilde{x}^*G(d_j\delta^{n+1}) = \tilde{x}^*g(s_0 d_{j-1}\delta^n) = s_0 d_{j-1}\delta^n, \quad s_0 g d_{j-1} x.$$

Soit D une homotopie : $I \times \tilde{x}^n E \to \tilde{x}^*E$ stationnaire sur O_n, qui prolonge l'identité au-dessus de ω_n. Alors $d(g_0, g_1)(x)$ est la classe d'homotopie de $Q \circ D \circ \varepsilon_0 \circ \tilde{x}^*G$ où Q est l'application canonique $\tilde{x}^*E \to E$.

17. 12. Proposition. — *Soient* g_0, g_1, g_2 *trois sections sur* B^n *qui coïncident sur* B^{n-1}. *On a :*

$$d(g_0, g_2) = d(g_0, g_1) + d(g_1, g_2) \quad (n > 1).$$

Démonstration. — Soit G_{lm} l'application $\tilde{x}^*G$ fabriquée avec les sections g_l et g_m. Soit $G : \ddot{\Delta}[n+2] \to E$ l'application définie par

$$\begin{aligned} G(d_i d_1 \delta^{n+2}) &= G_{02}(d_i\delta^{n+1}) & i &= 0, \ldots, n+1 \\ G(d_i d_0 \delta^{n+2}) &= G_{01}(d_i\delta^{n+1}) & i &= 0, \ldots, n+1 \\ G(d_i d_2 \delta^{n+2}) &= G_{12}(d_i\delta^{n+1}) & i &= 0, \ldots, n+1 \\ G(d_i d_j \delta^{n+2}) &= \widetilde{s_1 s_0 \tilde{x} g(d_{j-2}\delta^n)}\, d_i\delta^{n+1} & i &= 0, \ldots, n+1, \quad j > 2. \end{aligned}$$

on vérifie sans peine que

$$G(d_2 \ldots d_{n+2}\delta^{n+2}) = s_0\tilde{x}^*g(d_1 \ldots d_n\delta^n) = s_0 g(x_0)$$

appliquons la proposition 4. 5. à $Q \circ D \circ \varepsilon_0 \circ G$: on obtient le résultat cherché.

17. 13. Proposition. — *Soit* $\varphi \in Hom^n(C_{*B}, \mathcal{F}_0)$ (B, id); *il existe une section* g_1 *définie sur le n-squelette de* B *telle que* $g_1|B^{n-1} = g_0|B^{n-1}$ *et que* $d(g_0, g_1) = \varphi$.

Démonstration. — Soit $x \in B_n$, x non dégénéré, $x_0 = d_1 \ldots d_n x$, soit γ une application $(\dot{\Delta}[n+1], 0_{n+1})$ $(F_{x_0}, g_0(x_0))$ dans la classe de $\varphi(x) \in \pi_n(F_{x_0}, g_0(x_0))$.

Soit $Y = (0 \times \dot{\Delta}[n+1]) \cup (1 \times \Lambda^1[n+1]) \cup (I \times 0_{n+1})$.
On pose :

$$H(0, \beta) = \gamma(\beta), \qquad \beta \in \dot{\Delta}[n+1]$$
$$H(1, \beta) = \begin{cases} g_0(x) & \text{si} \quad \beta = d_0\delta^{n+1} \\ g_0 s_0 d_{j-1} x & \text{si} \quad \beta = d_j \delta^{n+1} \quad j > 0 \end{cases}$$
$$H(\alpha, 0_{n+1}) = g(x_0) \qquad \alpha \in I, \qquad x_0 = d_1 \ldots d_n x.$$

Le diagramme :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "H"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"'] & E \arrow[d, "p"] \\ I \times \dot{\Delta}[n+1] \arrow[r, "\widetilde{s_0 x \circ \omega_{n+1}}"'] & B \end{tikzcd}$$

est commutatif donc H est prolongeable à $K : I \times \dot{\Delta}[n+1] \to E$ (2. 4. lemme 3). On pose alors $G_x = H \circ \varepsilon_1$, $g_1(x) = G_x(d_1\delta^{n+1})$. g_1 est une section qui coïncide avec g_0 sur B^{n-1} et $d(g_0, g_1) = \varphi$ d'après 17. 8.

Corollaire. — *Si $c^{n+1}(g_0)$ et a sont deux cocycles cohomologues, il existe une section g_1 sur le n-squelette telle que* (i) $g_0|B^{n-1} = g_1|B^{n-1}$, (ii) $a = c^{n+1}(g_1)$ $(n > 1)$.

17. 14. Soit $f : A \to B$ une application. Si g_0 et g_1 sont deux sections $B^n \to E$, homotopes sur B^{n-1} par une homotopie k, f^*g_0 et f^*g_1 sont deux sections $A^n \to f^*E$ homotopes sur A^{n-1} par l'homotopie,

$$f^*k(\alpha, a) = (a, k(\alpha, f(a))) \, (\alpha \in I, \; a \in A^{n-1}).$$

Désignons par f^n l'application $Hom^n(C_{*B}, \mathcal{F}_0)$ (f, f, id).

Proposition. — $d^n(f^*g_0, f^*g_1; \; f^*k) = f^n d^n(g_0, g_1; k)$.
C'est évident, compte-tenu de 16. 4. et du fait que toutes les transformations utilisées pour définir d^n sont naturelles sur $\mathcal{G}_B$ ou $\mathcal{G}_{I, B}$.

18. — Les théorèmes sur l'obstruction.

18. 1. *La classe obstruction.* — Soit g une section sur B^n $c^{n+1}(g)$ est un cocycle On désigne par $\bar{c}^{n+1}(g)$ la classe de cohomologie de $c^{n+1}(g)$.
Conformément aux notations du § 15 et de 13. 2 *b* on a

$$\bar{c}^{n+}(g) \in H^{n+1}(B, \mathcal{F}^n).$$

18. 2. Théorème. — *Soit* g *une section sur le* n*-squelette de* B. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une section* g' *sur* B^n *telle que* $g'|B^{n-1} = g|B^{n-1}$ *et que* g' *soit prolongeable à* B^{n+1} *est que* $\bar{c}^{n+1}(g) = 0$ $(n > 1)$.

Démonstration. — *La condition est nécessaire* :

$$c^{n+1}(g) - c^{n+1}(g') = \delta d(g, g')$$

d'après 17. 7 et $c^{n+1}(g') = 0$ d'après 16. 2 donc $\bar{c}^{n+1}(g) = 0$.

La condition est suffisante : si $\bar{c}^{n+1}(g) = 0$, $c^{n+1}(g)$ et 0 sont deux cocycles cohomologues. Donc il existe une section g' sur B^n telle que $g'|B^{n-1} = g|B^{n-1}$ et $c^{n+1}(g') = 0$ d'après 17. 10, donc g' est prolongeable à B^{n+1} d'après 16. 2.

Remarque. — Si g est une section sur $B^n \cup B'$ $(B' \subset B)$, il résulte de la remarque 16. 2 que $\bar{c}^{n+1}(g) \in H^{n+1}(B, B'; \mathcal{F}^n)$ et de la remarque 18. 7. que le théorème 18. 2. s'applique et donne une condition nécessaire et suffisante pour que $g|B^{n-1}$ soit prolongeable à $B^{n+1} \cup B'$.

18. 3. *Classe différence.* — Soient g_0 et g_1 deux sections $B \to E$, et k une homotopie $g_0|B^{n-1} \sim g_1|B^{n-1}$. Comme d'après 16. 2 $c^{n+1}(g_0)$ et $c^{n+1}(g)$ sont nuls, 17. 7. montre que $d(g_0, g_1; k)$ est un cocycle. On désigne par $\bar{d}(g_0, g; k)$ la classe de cohomologie de $d(g_0, g_1; k)$. C'est un élément de $H^n(B, \mathcal{F}_0)$.

18. 4. Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une homotopie* k' : $g_0|B^n \sim g_1|B^n$ *telle que* $k'|I \times B^{n-2} = k|I \times B^{n-2}$ *est que* $\bar{d}(g_0, g, k) = 0$ $(n \geqslant 2)$.

La condition est nécessaire. — S'il existe une homotopie k' ayant les propriétés exigées, $d^n(g_0, g_1; k') = 0$ d'après 17. 8. Désignons par h' la section fabriquée avec k' de la même manière que h avec k. Comme $k'|I \times B^{n-2} = k|I \times B^{n-2}$, un raisonnement analogue à celui du 17. 9 montre qu'il existe une homotopie

$$H : h|(I \times B)^{n-1} \sim h'|(I \times B)^{n-1} \text{ rel } I \times B^{n-2}.$$

Donc $d^n(g_0, g_1; k) - d^n(g_0, g_1; k') = \lambda^n \nabla^{n+1}(c^{n+1}(h) - c^{n+1}(h'))$ $= \lambda^n \nabla^{n+1} \delta d^n(h, h'; H) = \delta \lambda^{n-1} \nabla^n d^n(h, h'; H)$ d'après 17. 7. et 17. 5. Donc $\bar{d}^n(g_0, g_1; k) = 0$.

La condition est suffisante. — Comme ∇^* induit un isomorphisme en cohomologie cf. 9. 9., ainsi que λ^*, $\bar{d}^n(g_0, g_1; k) = 0$

entraîne que $\bar{c}^{n+1}(h) = 0$. D'après 18. 2. il existe alors une section h' sur $(\mathrm{I} \times \mathrm{B})^{n+1}$ égale à h sur $(\mathrm{I} \times \mathrm{B})^{n-1}$, donc une homotopie $k' : g_0|\mathrm{B}^n \sim g_1|\mathrm{B}^n$ égale à k sur $\mathrm{I} \times \mathrm{B}^{n-2}$.

Remarque. — Si k est une homotopie

$$g_0|\mathrm{B}^{n-1} \cup \mathrm{B}' \sim g_1|\mathrm{B}^{n-1} \cup \mathrm{B}',$$

on voit comme dans 18. 2. que $d(g_0, g_1; k) \in \mathrm{H}^n(\mathrm{B}, \mathrm{B}'; \mathcal{F})$ et que le théorème 18. 4. donne une condition nécessaire et suffisante pour que $k|\mathrm{I} \times \mathrm{B}^{n-2}$ soit prolongeable à $\mathrm{I} \times \mathrm{B}^n \cup \mathrm{B}'$.

18. 5. *Le cas* $n = 0$.

Théorème. — *Si* $\pi_0(\mathrm{F}) = 0$, *toute section sur* B^0 *est prolongeable à* B^1; *réciproquement, si* B_1 *contient un* 1-*simplexe* ρ *tel que* $d_0\rho \neq d_1\rho$, *et si toute section sur* B^0 *est prolongeable à* B^1, $\pi_0(\mathrm{F}) = 0$.

Démonstration. — Le théorème direct est un cas particulier de 16. 2. Réciproquement, soient y_0 et y, deux sommets de $\mathrm{F}_{d_1\rho}$, z un sommet de $\mathrm{F}_{d_0\rho}$. Il existe un 1-simplexe y et un 1-simplexe y' tels que $d_1y = y_0$ $d_0y = z$, $d_1y' = y_1$ $d_0y' = z$; puisque $(\mathrm{E}, p, \mathrm{B})$ est fibré, il existe un 2-simplexe σ de E tel que $d_0\sigma = y'$, $d_1\sigma = y$, $p\sigma = s_0x$. Donc $d_2\sigma \in \mathrm{F}_{d_1\rho}$ est un 1-simplexe d'extrémités y_0 et y_1.

18. 6. *Le cas* $n = 1$. Si $\pi_1(\mathrm{F})$ est commutatif, la théorie précédente est encore valable. Dans le cas contraire, on définit le « cobord » dans Hom^1 $(\mathrm{C}_{*\mathrm{B}}, \mathcal{F})$ par la formule :

$$(\delta\varphi)(x) = \varphi(d_2x) + \mathcal{F}(\rho)\,\varphi(d_0x) - \varphi(d_1x)$$

(pour $x \in \mathrm{B}_2$, $\rho = d_2x$).

Si g_0 et g_1 sont deux sections sur B^1 qui coïncident sur B^0, on définit $d^1(g_0, g_1)$ directement par le procédé explicite de 17. 8, et on vérifie que :

$$\mathcal{F}(\rho)\, d^1(g_0, g_1)(d_0x) + c^2(g_1)(x) = -\, d^1(g_0, g_1)(d_2x) \\ + c^2(g_0)(x) + d^1(g_0, g_1)(d_1x), \quad (x \in \mathrm{B}_2,\ \rho = d_2x).$$

On en déduit immédiatement le :

Théorème 1. — *Soit* g *une section sur le* 1-*squelette de* B. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une section*

g' sur B^1 *telle que* $g'|B^0 = g|B^0$ *et que* g' *soit prolongeable à* B^2 *est que* $c^2(g)$ *soit un cobord.*

Soient g_0 et g_1 deux sections sur B et k une homotopie $g_0|B^0 \sim g_1|B^0$; avec les notations de 17. 1. soit $g'_1 = k \circ \varepsilon_1$.

THÉORÈME 2. — *La condition nécessaire et suffisante pour que k soit prolongeable à* $I \times B^1$ *est que* $d(g_0, g'_1) = 0$.

18. 7. On a donc retrouvé, pour les fibrés au sens de Kan, tous les théorèmes classiques de la théorie des fibrés au sens de Serre dont la base est un C. W-complexe ([1]). Dans une prochaine publication, on se propose d'appliquer ces résultats à la décomposition de Postnikov d'un fibré et d'en déduire entre autres quelques théorèmes énoncés sans démonstration dans [15], et quelques propriétés de la seconde obstruction.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARCUS, Note on cross sections over C.W. complexes, *Quat. J. of*, 2e série, 5, 1954, p. 150-150.

[2] H. CARTAN, Séminaire E.N.S., 7e année, 1954-1955, Algèbre d'Eilenberg Mac-Lane et homotopie.

[3] H. CARTAN, Séminaire E.N.S., 11e année, 1958-1959.

[4] S. EILENBERG, Singular Homology theory, *Ann. of. Math.*, Vol. 45, 1944, p. 63-69.

[5] S. EILENBERG and S. MAC-LANE, On the group H (π, n), *I Ann. of Math.* ,Vol. 58, 1953, p. 55-106.

[6] S. EILENBERG and S. MAC-LANE, Acyclic Models, *Amer J. of Math.*, Vol. 65, 1955, p. 189-199.

[7] S. EILENBERG and ZILBER, Semi-simplicial complexes and singular homology, *Ann. of Math.*, Vol. 51, 1950, p. 499-513.

[8] S. EILENBERG and ZILBER, On product of complexes, *Amer J. of Math.*, Vol. 75, 1953, p. 200-204.

[9] D. KAN, Abstract homotopy, I and II, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, Vol. 41, 1955, p. 1092-1096.

[10] D. KAN, A Combinatorial definition of homotopy groups, *Ann. of Math.*, Vol. 67, 1958, p. 282-312.

[11] D. KAN, Adjoint functors, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 87, 1958, p. 294-329.

[12] V. K. A. M. GUGENHEIM and J. C. MOORE, Acyclic models and Fibre-spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 85, 1957, p. 182-207.

[13] S. MAC-LANE, Simplicial Topology I, *Lecture notes Chicago*, 1959.

[14] J. MILNOR, The geometric realisation of a semi-simplicial complex, *Ann. of Math.*, Vol. 65, 1957, p. 357-162.

[15] J. C. MOORE, C.S.S. complexes and Postnikov systems, *Lecture notes* Princeton, 1957.
[16] J. C. MOORE. *Seminar on algebraïc homotopy.* Princeton 1955.
[17] J. P. SERRE, *Homologie singulière des espaces fibrés.*
[18] N. STEENROD, The topology of fibre bundles, Princeton university press.
[19]
[20] M. ZISMAN, Suite spectrale des fibrés au sens de Kan, *Compte Rendus Acad. Sci.*, t. 248, 1959, p. 762-764.
[21] M. ZISMAN, L'obstruction à la construction d'une section d'un fibré au sens de Kan, *Compte Rendus Acad. Sci.*, t. 250, 1960, p. 646-647.
[22] M. ZISMAN, *Id.*, *Compte Rendus*, *Acad. Sci.* t. 250, 1960 p. 793-794.

(Thèse, Fac. Sciences, Paris, 1960.)

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
10 (1960), 459-472.

ÉTUDE DU POTENTIEL CRISTALLIN DU 6e ORDRE DANS LES TERRES RARES

par Yves. AYANT et Jean. ROSSET (Grenoble).

1. — Exposé de la méthode des polynômes.

Rappelons qu'un tenseur sphérique $T^\lambda_\mu (\mu = \lambda, \lambda - 1 \ldots - \lambda)$ est un ensemble de $2\lambda + 1$ opérateurs qui se transforment dans les rotations comme les fonctions sphériques Y^λ_μ. Cela veut dire que si $\mathcal{R}$ désigne l'opérateur traduisant une rotation R sur les états quantiques du système considéré, on a :

$$\mathcal{R}^{-1} T^\lambda_\mu \mathcal{R} = \sum_{\mu'} \langle \mu | \mathfrak{D}^+_\lambda (R) | \mu' \rangle T^\lambda_{\mu'} = \sum_{\mu'} T^\lambda_{\mu'} \langle \mu' | \mathfrak{D}_\lambda (R) | \mu \rangle \qquad (1)$$

$\mathfrak{D}^+_\lambda$ est la représentation conjuguée de $\mathfrak{D}_\lambda$. De (1) on tire la relation de commutation bien connue :

$$\vec{J} T^\lambda_\mu - T^\lambda_\mu \vec{J} = \sum_{\mu'} T^\lambda_{\mu'} \langle \mu' | \vec{\rho} | \mu \rangle \qquad (2)$$

$\vec{\rho}$ est le vecteur-matrice des rotations infinitésimales dans $\mathfrak{D}_\lambda$.

Soit un système ayant le moment cinétique $\vec{J}$; nous travaillons dans une base $|j, m\rangle$. Il est connu que la sous-matrice $\langle j', m' | T^\lambda_\mu | j, m \rangle$ (pour j, j' et λ fixes) se ramène aux coefficients de Clebsch-Gordan :

$$\langle j', m' | T^\lambda_\mu | j, m \rangle = \langle j' \| T^\lambda \| j \rangle C^{j'j\lambda}_{m'm\mu} \qquad (3)$$

Malheureusement, les coefficients de C. G. d'indice élevé ne sont pas connus. Or, dans le cas très important où $j' = j$, il est possible d'écrire explicitement (3) grâce à l'artifice suivant.

Étant donné un tenseur usuel à λ indices $T_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda}$ (3^λ composantes), on sait que les T^λ_μ sont $(2\lambda + 1)$ combinaisons linéaires des $T_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda}$. Comme tous les T^λ_μ ont même représentative, à un coefficient multiplicatif près, on choisira un T^λ_μ provenant d'un tenseur usuel simple, à savoir : $J_{i_1} J_{i_2} \ldots J_{i_\lambda}$ (J_i désignent les composantes de $\vec{J}$).

Donc on peut choisir les T^λ_μ comme polynômes homogènes de degré λ en les J_i, ou, ce qui revient au même J_z, $J_\pm = J_x \pm iJ_y$.

Dans un monome donné de ces polynômes, si J_+ et J_- interviennent a et b fois respectivement, il est clair que $a - b = \mu'$, à cause des règles de sélection $m' - m = \pm 1$ pour $J_\pm$, μ pour T^λ_μ; supposons $\mu \geqslant 0$ [1]. En utilisant les relations bien connues

$$J_z J_+ - J_+ J_z = J_+ \qquad (4)$$
$$J_- J_+ \quad \text{ou} \quad J_+ J_- = J^2 - J_z^2 \pm J_z \qquad (2)$$

on voit que dans le polynôme T^λ_μ, on peut éliminer les J_- et faire « glisser » les J_+ à gauche, de telle sorte que l'on puisse écrire :

$$T^\lambda_\mu = J_+^\mu . \left(\text{Polynôme en } J_z \text{ et } \vec{J}^2\right) \qquad (6)$$

Les polynômes ne sont plus homogènes à cause de (4) et (5), mais le degré total en J_z, J_+ reste évidemment toujours λ.

De (6), on tire que :

$$\langle j, m + \mu | T^\lambda_\mu | j, m \rangle = \langle m + \mu | J_+^\mu | m \rangle . \,(\text{Polynôme en } m \text{ et } j(j+1)).$$
$$= \langle m + \mu | J_+^\mu | m \rangle \; P^{\lambda j}_\mu(m) \qquad (7)$$

$P^{\lambda j}_\mu(J_z)$ est un polynôme de degré $\lambda - \mu$.

2. — Détermination des polynômes P.

Utilisons la relation (2) sous la forme :

$$J_+ T^\lambda_\mu - T^\lambda_\mu J_+ = \lambda[(\lambda + 1) - \mu(\mu + 1)]^{\frac{1}{2}} \, T^\lambda_{\mu+1}$$

substituons-y (7) et prenons l'élément de matrice entre $\langle m + \mu + 1|$ et $|m\rangle$, nous obtenons :

$$\langle m + \mu + 1 | J_+^{\mu+1} | m \rangle (P^{\lambda, j}_\mu(m) - P^{\lambda, j}_\mu(m + 1))$$
$$= [(\lambda - \mu)(\lambda + \mu + 1)]^{\frac{1}{2}} \langle m + \mu + 1 | J_+^{\mu+1} | m \rangle \, P^{\lambda, j}_{\mu+1}(m)$$

[1] Si $\mu < 0$, on utilise le fait que $T^\lambda_\mu = (-)^\mu (T^\lambda_{-\mu})^*$.

soit :

$$[(\lambda-\mu)(\lambda+\mu+1)]^{\frac{1}{2}}\,P_{\mu+1}^{\lambda,j}(m)=P_{\mu}^{\lambda,j}(m)-P_{\mu}^{\lambda,j}(m+1) \quad (8)$$

(8) est une relation entre deux polynômes de degré $\lambda-\mu-1$. Cette relation est valable pour $m=-j,-j+1\dots j-\mu-1$, c'est-à-dire pour un nombre de valeurs égal à $2j-\mu$. Or, on sait que (3) n'existe que si j, j et λ vérifient la condition triangulaire, qui s'écrit ici :

$$2j \geqslant \lambda.$$

(8) est donc valable pour un nombre de valeurs de m supérieur au degré des polynomes, par suite les deux polynômes apparaissant dans (8) sont *identiques*.

Posons :

$$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x),$$

(8) s'écrit :

$$\Delta P_{\mu}^{\lambda,j}(x)=-[(\lambda-\mu)(\lambda+\mu+1)]^{\frac{1}{2}}\,P_{\mu+1}^{\lambda,j}(x) \quad (9)$$

(9) suggère d'introduire des polynômes auxiliaires :

$$Q_{\mu}^{\lambda,j}(x)=(-)^{\mu}\;[(\lambda+\mu)!/(\lambda-\mu)!]^{\frac{1}{2}}\,P_{\mu}^{\lambda,j}(x) \quad (10)$$

d'où :

$$Q_{\mu+1}^{\lambda,j}(x)=\Delta Q_{\mu}^{\lambda,j}(x) \quad (11)$$

Pour déterminer ces polynômes, il serait souhaitable de connaître les $P_{0}^{\lambda,j}(x)$. Or, cela est possible, car ces polynômes obéissent à des relations d'orthogonalité remarquables. On peut les établir en partant de relations connues pour les coefficients de C. G. On démontre en effet que :

$$\sum_{mm'} C_{m'm\mu}^{jj\lambda}C_{m'm\mu_1}^{jj\lambda_1}=0 \quad \text{si} \quad \lambda\neq\lambda_1 \quad \text{ou} \quad \mu\neq\mu_1 \quad (12)$$

Tenant compte de (3) et (7), on établit sans peine, en se bornant au cas $\mu=\mu_1$:

$$\sum_{m}|\langle m+\mu|J_{+}^{\mu}|m\rangle|^2P_{\mu}^{\lambda,j}(m)P_{\mu}^{\lambda_1,j}(m)=0 \;(\lambda\neq\lambda_1) \quad (13)$$

et, en particulier :

$$\sum_{m}P_{0}^{\lambda,j}(m)P_{0}^{\lambda_1,j}(m)=0\;(\lambda\neq\lambda_1) \quad (14)$$

(14) établit que les $P_0^{\lambda,j}, j\ (x)$ sont des polynômes orthogonaux avec le poids :

$$g(x) = \sum_{m=-j}^{+j} \delta(x - m).$$

Ces polynômes sont assez analogues aux polynômes de Legendre (quand $j \to \infty$ $P_0^{\lambda,j}(x) \to$ Cte $P_\lambda(x/j)$; ils sont de degré λ et alternativement pairs et impairs (noter que pour $\mu \neq 0$ et λ, les $P_\mu^{\lambda,j}\ (x)$ n'ont pas de parité). Ces polynômes ont été étudiés et tabulés pour des besoins tout autres (jusqu'à $\lambda = 10$). Nous conviendrons de les définir pour que leur monome de plus haut degré soit simplement x^λ.

3. — Normalisation.

a) On peut vouloir normaliser ces polynômes en vue d'exprimer directement des coefficients de C. G., soit :

$$C^{jj\lambda}_{m+\mu m\mu} = A\langle m + \mu | J_+^\mu | m\rangle P_\mu^{\lambda,j}(m) \tag{15}$$

On détermine A en donnant à μ la valeur λ. Dans ce cas particulier, le coefficient de C. G. a une forme compacte :

$$C^{jj\lambda}_{m+\lambda m\lambda} = (-)^\lambda \left[\frac{2j+1}{2\lambda+1}\frac{(2\lambda+1)\,!(2j-\lambda)\,!}{(\lambda\,!)^2(\lambda+2j+1)\,!}\frac{(j+m+\lambda)\,!}{(j-m-\lambda)\,!}\frac{(j-m)\,!}{(j+m)\,!}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Par ailleurs, de (10) et (11), on tire :

$$Q_\lambda^{\lambda,j}(x) = \Delta^\lambda P_0^{\lambda,j}(x) = \lambda\,!$$
$$P_\lambda^{\lambda,j}(x) = (-)^\lambda\, \lambda\,!/\sqrt{(2\lambda)\,!}$$

on vérifie que :

$$\langle m + \mu | J^+ | m\rangle = \left[\frac{(j-m)\,!\,(j+m+\mu)\,!}{(j+m)\,!\,(j-m-\mu)\,!}\right]^{\frac{1}{2}}$$

tenant compte de tout cela, on obtient le résultat :

$$A = (2j+1)^{\frac{1}{2}}\frac{(2\lambda)\,!}{(\lambda\,!)^2}\left[\frac{(2j-\lambda)\,!}{(2j+\lambda+1)\,!}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{16}$$

b) *Une autre normalisation est très utile*; considérons les $(2l + 1)$ états orbitaux d'un électron dans un atome, soit

$|l, m\rangle$. Il est très important de connaître la représentative des fonctions sphériques (fonction des coordonnées sphériques de l'électron) sur cette base; celà nous définit un second coefficient de normalisation B tel que :

$$\langle l, m+\mu|Y^\lambda_\mu|l, m\rangle = \int (Y^l_{m+\mu})^* Y^\lambda_\mu Y^l_m \, d\Omega$$
$$= B\langle m+\mu|L^\mu_+|m\rangle P^{\lambda, l}_\mu(m) \qquad (17)$$

Ici, le rôle de j est tenu par l entier; λ est pair, On sait que :

$$\langle l, m+\mu|Y^\lambda_\mu|l, m\rangle = [(2\lambda+1)/4\pi]^{\frac{1}{2}} C^{ll\lambda}_{000} C^{ll\lambda}_{m+\mu m\mu}.$$

Donc, d'après (15) et (16) :

$$B = [(2\lambda+1)/4\pi]^{\frac{1}{2}} A^2 P^{\lambda, j}_0(0).$$

Comme $P^{\lambda, j}_0(0)$ peut s'écrire sous la forme :

$$(-)^{\frac{\lambda}{2}} \frac{\lambda\,!^3}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)!^2 (2\lambda)\,!} \frac{\left(l+\frac{\lambda}{2}\right)!}{\left(l-\frac{\lambda}{2}\right)!}$$

on obtient finalement :

$$B = (-)^{\frac{\lambda}{2}} [(2\lambda+1)/4\pi]^{\frac{1}{2}} \frac{(2\lambda)\,!}{\lambda\,!\left(\frac{\lambda}{2}\right)!^2}$$
$$(2l+1)\frac{(2l-\lambda)\,!}{(2l+\lambda+1)\,!}\frac{\left(l+\frac{\lambda}{2}\right)!}{\left(l-\frac{\lambda}{2}\right)!} \qquad (18)$$

4. — Le terme cristallin du 6^e ordre.

Lorsqu'on étudie un atome ou ion plongé dans un champ cristallin, on traite chaque électron comme soumis à un potentiel du type

$$V = \sum_{\lambda, \mu} A_{\lambda\mu} r^\lambda Y^\lambda_\mu(\theta, \varnothing).$$

Le problème se présente comme un calcul de perturbations « à tiroirs », et on commence par séculariser V par rapport à

l'hamiltonien individuel (intraatomique) de chaque électron, c'est-à-dire que l'on a besoin seulement de la matrice individuelle

$$\langle lm' | \mathrm{V} | lm \rangle. \tag{19}$$

Dans le cas des électrons d seuls interviennent dans (19) les termes $\lambda = 2$ et 4 ($\lambda = 0$) donne lieu à un terme additif constant), mais il faut tenir compte des termes $\lambda = 6$ dans le cas important des électrons $4f$. La méthode des polynômes nous permet d'obtenir facilement les matrices des termes du 6ᵉ ordre de V.

a) D'après (17) :

$$\langle 3, m + \mu | \mathrm{Y}_\mu^6 | 3, m \rangle = \mathrm{B} \langle m + \mu | l_+^\mu | m \rangle . \mathrm{P}_\mu^{6,3}(m),$$
$$\mathrm{B} = -\sqrt{13/4\pi}.7/13.36.$$

b) On sécularise ensuite V par rapport aux interactions (l, l) (répulsion coulombienne entre les électrons $4f$). Nous cherchons la représentative de $\sum\limits_i \mathrm{Y}_\mu^6(\theta_i, \phi_i)$ (i désignant les différents électrons $4f$) sur la base $|\mathrm{L}, \mathrm{M_L}\rangle$. En pratique, nous ne nous intéressons qu'au terme fondamental, L est alors donné par la règle de Hundt. Commençons par la première séquence (c'est-à-dire de $(4f)^1$ à $(4f)^6$). Vues les propriétés des tenseurs sphériques, nous savons que :

$$\left\langle \mathrm{L}, \mathrm{M_L} + \mu \left| \sum_i \mathrm{Y}_\mu^6(\theta_i, \phi_i) \right| \mathrm{L}, \mathrm{M} \right\rangle = \mathrm{Cte}. \langle \mathrm{M_L} + \mu | \mathrm{L}_+^\mu | \mathrm{M} \rangle \mathrm{P}_\mu^{6,\mathrm{L}}(\mathrm{M_L}). \tag{20}$$

Pour déterminer la constante, nous prenons le cas simple de $\mathrm{M_L} = \mathrm{L}$ et $\mu = 0$; on sait que :

$$|\mathrm{L}, \mathrm{L}\rangle = \mathcal{A} \left| \begin{matrix} 1 \\ 3,3 \end{matrix} \right\rangle \left| \begin{matrix} 2 \\ 3,2 \end{matrix} \right\rangle \left| \begin{matrix} 3 \\ 3,1 \end{matrix} \right\rangle \cdots$$

où le symbole $\left| \begin{matrix} \mathrm{i} \\ l, m \end{matrix} \right\rangle$ signifie que l'électron nº i est dans l'état individuel $|l, m\rangle$. $\mathcal{A}$ est l'opérateur antisymétrisant normé. En écrivant la constante de (20) sous la forme $\mathrm{B}\lambda_\mathrm{L}$, on obtient :

$$\lambda_\mathrm{L} \mathrm{P}_0^{6,\mathrm{L}}(\mathrm{L}) = \sum \mathrm{P}_0^{6,3}(m) \qquad \text{où} \qquad m = 3,2 \ldots (3 - n + 1)$$

(n = nombre d'électrons $4f$).

En ce qui concerne la deuxième séquence ($(4f)^8$ à $(4f)^{13}$),

on raisonne sur les trous dont le nombre est $n^* = 14 - n$, ce qui nous ramène au cas précédent, en notant bien que l'interaction cristalline étant du type unaire, il y a renversement de signe; on en déduit pour le coefficient de sécularisation :

$$\lambda_L(n) = -\lambda_L(14 - n) \tag{21}$$

c) Il est enfin nécessaire de séculariser V par rapport au couplage spin-orbite qui lui est généralement supérieur. Le processus est le même; introduisons la base $|J, M_J\rangle$; nous savons que :

$$\langle J, M_J + \mu | Y_\mu^6 | J, M_J \rangle = \text{Cte}.\langle M_J + \mu | J_+^\mu | M_J \rangle \cdot P_\mu^{6, J}(M_J) \tag{22}$$

La constante de (22) se détermine en prenant le cas simple de $M_J = J$, $\mu = 0$. Sortons de la constante $B\lambda_L$, il reste un nouveau coefficient de sécularisation λ_J; comme :

$$|J, M_J\rangle = \sum_{M_L M_S} C^{JLS}_{M_J M_L M_S} |L, M_L\rangle |S, M_S\rangle$$

nous obtenons :

$$\lambda_J P_0^{6, J}(J) = \sum_{M_L} |C^{JLS}_{J M_L J - M_L}|^2 P_0^{6, L}(M_L) \tag{23}$$

Le cas de la deuxième séquence est le plus simple, car l'on a, pour le fondamental du multiplet de structure fine, qui seul nous intéresse, $J = L + S$, donc seul le coefficient de C. G. $M_L = L$, $M_S = S$ est non nul dans (23); dans ce cas :

$$\lambda_J = P_0^{6, L}(L) / P_0^{6, J}(J)$$

Pour la première séquence où l'on a $J = L - S$ pour le fondamental, il faut évaluer les coefficients de C. G. qui ont dans ce cas une forme compacte.

Tableau des Coefficients de Sécularisation

n ...	2	3	4	8	9	10	11	12	13
L ...	5	6	6	3	5	6	6	5	3
J ...	4	9/2	4	6	15/2	8	15/2	6	7/2
λ_L ..	—1/42	5/462	—5/462	1	—1/42	5/462	—5/462	1/42	—1
λ_J ..	27/11	$\frac{969}{13.22}$	$\frac{3.1292}{13.55}$	1/924	6/143	3/26	12/65	10/44	1/7

Remarque. — Pour les valeurs de n non indiquées, $J < 3$, le terme du 6-ième ordre n'existe pas.

5. — Hamiltonien cubique du 6-ième ordre.

Nous définirons Y^6_{cub} comme étant la fonction sphérique d'ordre 6 ayant la même symétrie qu'un cube dont les axes quaternaires sont $Oxyz$. A priori, il est clair que :

$$Y^6_{cub} = Y^6_0 + \alpha(Y^6_4 + Y^6_{4^-})$$

α se détermine en exprimant que $Y^6_{cub}\ (0, \phi) = Y^6_{cub}\ (\pi/2, 0)$ On a :

$$Y^6_0 = \sqrt{\frac{13}{4\pi}\frac{1}{16}}(231\,\chi^6 - 315\,\chi^4 + 105\,\chi^2 - 5) \qquad \chi = \cos\theta$$

$$Y^6_4 = \sqrt{\frac{13}{4\pi}\frac{3}{16}}\sqrt{\frac{7}{2}}(11\chi^2 - 1)\sin^4\theta e^{4i\phi}$$

on obtient :

$$\alpha = -\sqrt{7/2.}$$

Examinons le cas important où V est crée par 8 charges *-e* au sommet d'un cube. En ce qui concerne le 6-ième ordre, nous obtenons :

$$V = \frac{9}{16}\sqrt{\frac{13}{4\pi}}\frac{e^2}{R^7}r^6 Y^6_{cub}$$

(R = distance des sommets au centre).

Nous avons systématiquement étudié les matrices d'ordre $2j + 1$ définies par :

$$H^6_j = P^{6,j}_0(j_z) - \sqrt{7/2}\,[(j_+)^4 P^{6,j}_4(j_z) + \text{Q. C.}]$$

Nous savons que ce sont ces matrices, pour $j = J$, qui donnent la décomposition cristalline (plus exactement, la contribution du 6-ième ordre à cette décomposition), en les multipliant, par exemple dans le cas précédent, par

$$-(16/9)\,(7/13.36)\,(e^2\overline{r^6}/R^7)\,\lambda_L\lambda_J.$$

Le tableau ci-dessous donne les matrices H^6_j, j prenant toutes les valeurs pratiquement intéressantes, c'est-à-dire celles de L et J. Ce n'est que pour les valeurs de J que nous donnons aussi les valeurs propres et les représentations du groupe du cube qui leur sont associées.

Tableau des Matrices H_j^6 (*).

$j = 3$

$$\frac{60}{77}\left|\begin{array}{cccccc}
1 & . & . & . & -7\sqrt{15} & \\
 & -6 & & & & 42 \\
 & & 15 & & & \\
 & & & \boxed{-20} & & \\
\end{array}\right.$$

$j = 4$

$$\frac{420}{77}\left|\begin{array}{ccccccc}
4 & . & . & . & -6\sqrt{70} & & \\
 & -17 & & & & 3\sqrt{7} & \\
 & & 22 & & & & 42 \\
 & & & 1 & & & \\
 & & & & \boxed{-20} & & \\
\end{array}\right.$$

Valeurs propres : $\dfrac{420}{77}\left\{\begin{array}{rl} 64 & \Gamma_3 \\ 4 & \Gamma_4 \\ -20 & \Gamma_5 \\ -80 & \Gamma_1 \end{array}\right.$

$j = 5$

$$\frac{60}{77}\left|\begin{array}{ccccccccc}
210 & & & & & -105\sqrt{210} & & & \\
 & -672 & & & & & -84\sqrt{70} & & \\
 & & 406 & & & & & 91\sqrt{42} & \\
 & & & 504 & & & & & 1\,176 \\
 & & & & -168 & & & & \\
 & & & & & \boxed{-580} & & & \\
\end{array}\right.$$

$j = 6$

$$\frac{120}{77}\left|\begin{array}{ccccccc}
462 & & -294\sqrt{55} & & & & \\
 & -1\,155 & & 220{,}5\sqrt{66} & & & \\
 & & 168 & & -84\sqrt{14} & & \\
 & & & 903 & & 367{,}5\sqrt{10} & \\
 & & & & 462 & & 1\,764 \\
 & & & & & -420 & \\
 & & & & & & \boxed{-840}
\end{array}\right.$$

Valeurs propres :

$$\frac{120}{77}\left\{\begin{array}{rl}
336 & \Gamma_1 \\
3\,696 & \Gamma_2 \\
-1\,008 & \Gamma_3 \\
168 & \Gamma_4 \\
1\,930 & \Gamma_5 \\
-2\,770 & \Gamma_5
\end{array}\right.$$

$j = 8$

$$60\left|\begin{array}{ccccccccc}
104 & & -12\sqrt{455} & & & & & & \\
 & -169 & & -19\sqrt{273} & & & & & \\
 & & -78 & & -2\sqrt{15\,015} & & & & \\
 & & & 65 & & -3\sqrt{1\,001} & & & \\
 & & & & 128 & & 6\sqrt{154} & & \\
 & & & & & 93 & & 6\sqrt{1\,155} & \\
 & & & & & & 2 & & 252 \\
 & & & & & & & -85 & \\
 & & & & & & & & \boxed{-120}
\end{array}\right.$$

Valeurs propres :

$$60\left\{\begin{array}{ll} -\ 64 & \Gamma_1 \\ 384 & \Gamma_3 \\ -\ 208 & \Gamma_3 \\ 116 + 256{,}2 & \Gamma_4 \\ 164 + 259{,}7 & \Gamma_5 \end{array}\right.$$

$j = 7/2$

$$\frac{1\,920}{704}\left|\begin{array}{cccccc} 2 & & & & -6\sqrt{35} & \\ & -10 & & & & 14\sqrt{3} \\ & & 18 & & & \\ & & & -10 & & \end{array}\right.$$

Valeurs propres :

$$\frac{1\,920}{704}\left\{\begin{array}{ll} -\ 40 & \Gamma_6 \\ -\ 24 & \Gamma_7 \\ +\ 32 & \Gamma_8 \end{array}\right.$$

$j = 9/2$

$$\frac{7\,680}{704}\left|\begin{array}{ccccccc} 6 & & & & -15\sqrt{14} & & \\ & -22 & & & & -3\sqrt{14} & \\ & & 20 & & & & 8\sqrt{21} \\ & & & 12 & & & \\ & & & & -16 & & \end{array}\right.$$

Valeurs propres :

$$\frac{7\,680}{704}\left\{\begin{array}{ll} 16 \pm \sqrt{1\,360} & \Gamma_8 \\ -\ 64 & \Gamma_6 \end{array}\right.$$

$j = 15/2$

$$
60 \left|
\begin{array}{ccccccccc}
65 & & & -5\sqrt{1365} & & & & & \\
& -117 & & & -3\sqrt{5005} & & & & \\
& & -39 & & & -7\sqrt{429} & & & \\
& & & 59 & & & -3\sqrt{77} & & \\
& & & & 87 & & & 6\sqrt{231} & \\
& & & & & 45 & & & 42\sqrt{15} \\
& & & & & & -25 & & \\
& & & & & & & -75 &
\end{array}
\right.
$$

Valeurs propres :

$$
60 \left\{
\begin{array}{rl}
-40 & \Gamma_6 \\
-312 & \Gamma_7 \\
-162{,}1 & \Gamma_8 \\
64{,}0 & \Gamma_8 \\
274{,}1 & \Gamma_8
\end{array}
\right.
$$

Remarque. — Les matrices sont écrites dans l'ordre habituel des lignes et colonnes (de j à $-j$); on les complète par symétrie par rapport à la diagonale et à l'antidiagonale.

6. — Effets du terme du 6-ième ordre.

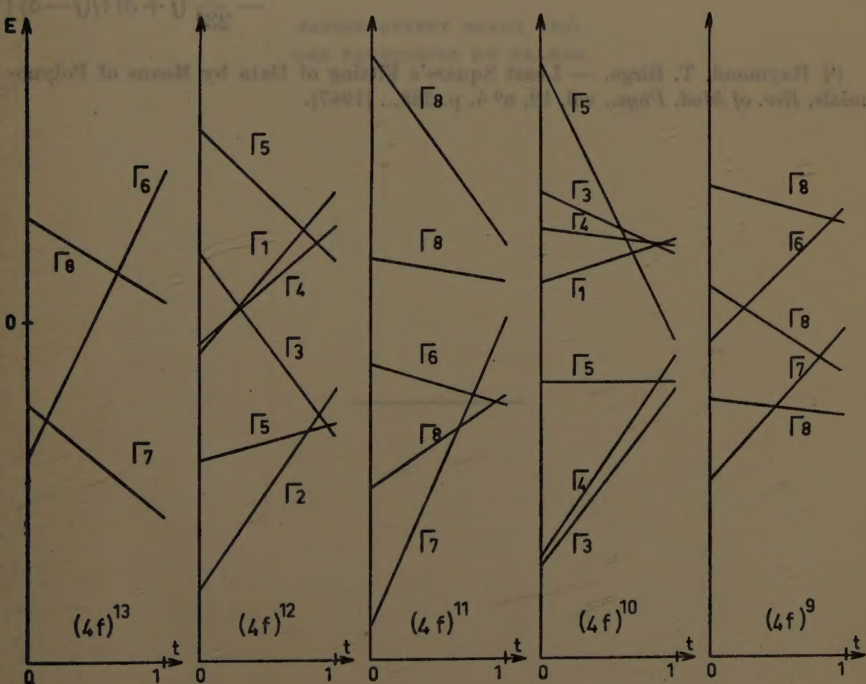
En pratique, le niveau fondamental du multiplet cristallin joue un rôle essentiel : aux basses températures, c'est lui qui fixe la loi de la susceptibilité paramagnétique, ainsi que la courbe d'aimantation, ou encore le facteur de Lande de la résonance paramagnétique; le terme du 6-ième ordre peut alors jouer de deux façons :

a) il peut provoquer une intervention de niveaux, c'est-à-dire que la représentation associée au niveau fondamental

change; donc changement de vecteur propre, d'où une altération radicale dans les propriétés précédentes.

b) si le fondamental n'est pas seul de sa représentation (et s'il n'y a pas interversion de niveaux), son ou ses vecteurs propres ne sont plus déterminés par la seule symétrie cubique, mais par la nature exacte de l'hamiltonien.

Nous donnons à titre indicatif le diagramme ci-contre schématisant l'évolution des niveaux pour un hamiltonien du type $tH^{(4)} + (1 - t)\, H^{(6)}$, $H^{(4)}$ et $H^{(6)}$ étant les hamiltoniens cubiques de 4e et 6e ordre (en unités arbitraires mais avec leur signe) pour les systèmes $(4f)^{13}$ à $(4f)^{9}$; $t/(1-t)$ est donc proportionnel à $\overline{r^4}$. $R^2/\overline{r^6}$. Le diagramme montre que l'influence du 6e ordre doit être faible pour $(4f)^{13}$ (Yb^{3+}), ce qui



est conforme aux résultats expérimentaux. Sur $(4f)^9$ (Dy^{3+}), le 6e ordre ne change probablement pas la représentation du niveau fondamental mais altère ses vecteurs propres (2 autres

niveaux partageant avec le fondamental la même représentation).

Dans les 3 autres cas le terme du 6e ordre, même assez faible, peut changer la représentation du fondamental, ce qui altère totalement le comportement magnétique aux basses températures de la substance.

APPENDICE

Polynômes. $P_0^{\lambda,j}(x)$ $n = 2j + 1$

$\lambda = 2$ .... $x^2 - j(j+1)/3$

$\lambda = 4$ .... $x^4 - \frac{1}{14}(3n^2 - 13)x^2 + \frac{3}{35}(j+2)!/(j-2)!$

$\lambda = 6$ .... $x^6 - \frac{5}{44}(3n^2 - 31)x^4 + \frac{1}{176}(5n^4 - 110n^2 + 329)x^2$

$$- \frac{5}{231}(j+3)!/(j-3)!$$

(1) Raymond, T. Birge. — Least Square's Fitting of Data by Means of Polynomials, *Rev. of Mod. Phys.*, vol. 19, n° 4, p. 288... (1947).

ACHEVÉ D'IMPRIMER
SUR LES PRESSES DE
L'IMPRIMERIE DURAND
A CHARTRES
SEPTEMBRE 1960

PAPIER OFFSET BLANC VII/I
DES PAPETERIES DE FRANCE

DÉPÔT LÉGAL : 4e TRIMESTRE 1960
N° 3545.
Printed in France